

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

DIVISIÓN DE CIENCIAS FORESTALES

**PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO EN MASAS
ESPECÍFICAS DE *Pinus durangensis* MTZ. EN EL
ESTADO DE DURANGO**

T E S I S

**QUE COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS, EN
CIENCIAS FORESTALES**

PRESENTA:

JOSÉ CARLOS MONÁRREZ GONZÁLEZ

Chapingo, Estado de México

Junio, 2003



DIRECCION ACADEMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXAMENES PROFESIONALES



PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO EN MASAS ESPECIFICAS DE *Pinus*
durangensis MTZ., EN EL ESTADO DE DURANGO

Tesis realizada por **José Carlos Monárrez González** bajo la dirección del
Comité Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito
parcial para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIAS FORESTALES

DIRECTOR:



DR. HUGO RAMÍREZ MALDONADO

ASESOR:



M.C. J. CARMEN AYALA SOSA

ASESOR:



DR. DIODORO GRANADOS SANCHEZ

DEDICATORIA

A DIOS, por todo.

A MIS PADRES, Gloria González Gandarilla y Ezequiel Monárrez Vázquez,
por el cariño, apoyo y firmes enseñanzas.

A MIS HERMANOS, Ezequiel, Juan Antonio y Alan Ezequiel, por los
momentos compartidos y apoyarme siempre.

A TODA MI FAMILIA, por su apoyo y singular alegría.

A MIS COMPAÑEROS Y AMIGOS, por la amistad y compañerismo
brindado.

GRACIAS

AGRADECIMIENTOS

AL pueblo de México, que a través del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), me brindo el apoyo para realizar mis estudios de Maestría en Ciencias en Ciencias Forestales.

A la Universidad Autónoma Chapingo, por haberme dado la oportunidad de formarme profesionalmente en sus aulas.

Al Dr. Hugo Ramírez Maldonado, por su amistad, apoyo y dirección del presente trabajo.

Al M. C. J. Carmen Ayala Sosa y Dr. Diodoro Granado Sánchez por su participación en la revisión y presentación de ésta tesis.

Al M. C. Andrés Quiñones, por su amistad y consejos, para mi mejor formación académica.

A la Consultoría “Roberto Trujillo”, por el apoyo incondicional para realizar la fase de campo, del presente trabajo de investigación.

Al Sr. Mario Moreno y Sra. Lilia Sifuentes, por la amistad y apoyo brindado en la revisión bibliográfica.

A todas y cada una de las personas que de alguna manera me apoyaron y me brindaron su amistad.

DATOS BIOGRÁFICOS

El autor nació el 15 de febrero de 1978, en el municipio de Durango, Durango; egresó en el año de 1999, de la carrera de Ingeniero Forestal de la División de Ciencias Forestales de la Universidad Autónoma Chapingo. Se desempeñó de octubre de 1999 a abril del 2000, en la prestación de servicios técnicos forestales con el Ing. Francisco González Gandarilla, posteriormente en agosto del 2000, ingresa a la División de Ciencias Forestales de la Universidad Autónoma Chapingo donde cursó la Maestría en Ciencias en Ciencias Forestales, terminando los créditos correspondientes a cursos obligatorios, laboró de agosto del 2002 a diciembre del mismo año, como asesor del Programa para el Desarrollo de Plantaciones Forestales Comerciales, en el estado de Durango.

PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO EN MASAS ESPECÍFICAS DE *Pinus durangensis* Mtz. EN EL ESTADO DE DURANGO

Dirigido por Dr. Hugo Ramírez Maldonado.

RESUMEN

La presente investigación se realizó en el Predio Particular Sierra de Nayar, municipio de Victoria de Durango. Se trabajó con información proveniente de análisis troncal y sitios de medición única en masas puras y coetáneas de *Pinus durangensis* Mtz., con el objetivo de generar funciones de: crecimiento e incremento para altura total y diámetro normal, Volumen, Índice de sitio, Índice de densidad y finalmente una función que permita predecir el rendimiento actual a nivel rodal.

Los modelos que tuvieron mejor ajuste para generar las curvas de crecimiento resultaron ser para altura total el modelo de Chapman-Richards y para el diámetro normal el modelo de Schumacher. El modelo de volumen que tuvo el mejor ajuste fue la ecuación lineal de la variable combinada y en la estimación de la calidad de sitio, la ecuación que expresó mejor la tendencia de los datos fue la función de Chapman-Richards, en su versión polimórfica, por el método de la diferencia algebraica.

Se elaboraron dos índices de densidad: la Relación Área-Árbol (RAA) y el Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR), teniendo un buen ajuste en ambos.

Finalmente al combinar las funciones anteriores, se realizó la predicción explícita del rendimiento actual, donde el modelo que mejor ajuste dio es el que incluye el área basal como indicador de la densidad, en la fórmula básica del modelo de Schumacher.

Palabras clave: *Pinus durangensis* Mtz., crecimiento, incremento, Volumen, Índice de sitio, Índice de densidad, rendimiento, rodal.

PREDICTION OF YIELD IN SPECIFIC MASSES OF *Pinus durangensis* Mtz. IN THE STATE OF DURANGO

Directed by Hugo Ramírez Maldonado, D. Ph..

ABSTRACT

This study was conducted in the privately-owned site "Sierra del Nayar", municipality of Victoria de Durango. Information from branch analysis and measurement sites only in pure and even-aged masses of *Pinus durangensis* Mtz. Was used to generate functions of growth and increments for total height and normal diameter, volume, and site index, density index, and finally, a function that allows prediction of current yield at the level of the stand.

The models that had the best fit for generating growth curves were the Chapman-Richards model for total height and the Schumacher model for normal diameter. The volume model with the best fit was the linear equation for the combined variable and, in the estimation of quality of the site, the equation that best expressed the trend of the data was the Chapman-Richards function, in its polymorphic version by the method of algebraic difference.

Two density indexes were created: The Tree-Tree Ratio (RAA) and Reineke Index of Stand Density (IDRR), both with good fit.

Finally, when the above functions were combined, explicit current yield was predicted, for which the model that gave the best fit was that which includes the basal area as indicator of density, in the basic formula of the Schumacher model.

Key words: *Pinus durangensis* Mtz., growth, increment, volume, site index, density index, yield, stand.

CONTENIDO

APROBACIÓN DE TESIS DE GRADO.....	i
DEDICATORIA.....	ii
AGRADECIMIENTOS.....	iii
DATOS BIOGRÁFICOS.....	iv
RESUMEN.....	v
ABSTRACT.....	vi
CONTENIDO.....	vii
INDICE DE CUADROS.....	xi
INDICE DE FIGURAS.....	xiv
 1. INTRODUCCION	 1
 2. OBJETIVOS.....	 3
2.1. Objetivo general.....	3
2.2. Objetivos específicos.....	3
 3. REVISION DE LITERATURA.....	 4
3.1. Modelaje en el manejo Forestal.....	4
3.1.1. Clasificación de Modelos de Crecimiento y Rendimiento.....	4
3.1.2. Modelos de totalidad del Rodal.....	6
3.1.2.1. Modelos de crecimiento mecanicistas.....	6
3.1.2.1.2. Modelo de Schumacher.....	7
3.1.2.1.3. Modelo de Chapman-Richards.....	8
3.1.2.1.3. Función Weibull.....	9
3.1.3. Modelos empíricos.....	11
3.1.4. Modelos de procesos.....	11
3.2. Crecimiento e incremento de árboles y masa forestales.....	12
3.3. Funciones de volumen.....	13

3.3.1. Selección de modelos de volúmenes.	14
3.4. Calidad de sitio.....	16
3.4.1. Índice de sitio.....	17
3.4.1.1. Familia de curvas.....	18
3.4.1.2 Métodos para generar curvas de índice de sitio.....	19
3.4.1.2.1. Método de la curva guía.	19
3.4.1.2.1. Método de la diferencia algebraica.	19
3.4.1.2.2. Método de la predicción de parámetros.	20
3.5. Densidad.....	21
3.5.1. Métodos para determinar la densidad (índices de densidad)...	22
3.5.1.1. Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR).....	24
3.5.1.2. La relación área-árbol (RAA).....	26
3.5.1.3. El factor de competencia de copas (FCC).....	27
3.6. Predicción del crecimiento y rendimiento	28
3.6.1. Predicción explícita del rendimiento	28
 4. MATERIALES Y METODOS.....	 32
4.1. Área de estudio.....	32
4.1.1. Ubicación geográfica.....	32
4.1.2. Clima.....	32
4.1.3. Hidrología.....	34
4.1.4. Fisiografía y Orografía.....	
4.1.5. Geología y Suelos.....	34
4.1.6. Vegetación.....	35
4.2. Metodología.....	35
4.2.1. Toma de datos.....	35

4.2.2. Funciones de Crecimiento.....	38
4.2.3. Funciones de Volumen.....	41
4.2.4. Funciones de índice de sitio.....	44
4.2.4.1. Método de la curva guía.....	44
4.2.4.2. Método de la diferencia algebraica.....	46
4.2.5. Funciones de densidad.....	49
4.2.5.1. Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR).....	49
4.2.5.2. Relación área-árbol.....	50
4.2.6. Predicción del rendimiento usando modelos de totalidad del rodal o de predicción explícita	52
4.2.6.1. Rendimiento actual.....	52
4.2.6.2. Rendimiento futuro.....	54
5. RESULTADOS.....	55
5.1. Características dasométricas de masas puras y coetáneas de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., creciendo de manera natural.	55
5.1.1. Análisis troncal	56
5.2. Funciones de crecimiento.....	57
5.3. Funciones de volumen.....	61
5.3.1. Ecuación de volumen generada.....	64
5.3.2. Modelo de grosor de corteza.....	64
5.3.3. Construcción de la tabla de volumen.....	67
5.4. Funciones de índice de sitio.....	67
5.4.1. Método de la curva Guía.....	68
5.4.2. Método de diferencia algebraica.....	72
5.5. Funciones de Densidad.....	75

5.5.1. La Relación Área – Árbol (RAA)	76
5.5.2. Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR).....	79
5.6. Predicción del rendimiento usando modelos de totalidad del rodal o de predicción explícita.....	84
6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	89
7. LITERATURA CONSULTADA.....	93

INDICE DE CUADROS

Cuadro		Página
1	Modelos lineales sin considerar la forma del árbol, para generar ecuaciones de volumen.....	15
2	Modelos no lineales sin considerar la forma del árbol, para generar ecuaciones de volumen.....	15
3	Modelos lineales y no lineales considerando la forma del árbol, para generar ecuaciones de volumen.....	16
4	Clasificación de los índices de densidad.....	23
5	Ecuaciones utilizadas en la cubicación de los fustes de los árboles derribados.....	36
6	Ecuaciones de Incremento Corriente Anual e Incremento Medio Anual.....	39
7	Ecuaciones para obtener el punto de culminación del Incremento Corriente Anual e Incremento Medio Anual.....	40
8	Modelos de crecimiento en altura dominante-edad y ecuación de índice de sitio por el método de la curva guía.....	44
9	Ecuaciones para generar la familia de curvas anamórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la curva guía.....	45
10	Ecuaciones para generar la familia de curvas polimórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la curva guía.....	46
11	Ecuaciones de ajuste por el método de la diferencia algebraica, para obtener curvas anamórficas y polimórficas.....	47

12	Ecuaciones para generar la familia de curvas anamórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la diferencia algebraica.....	48
13	Ecuaciones para generar la familia de curvas polimórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la diferencia algebraica.....	48
14	Características dasométricas de sitios de muestreo de masas coetáneas de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., creciendo de manera natural.....	55
15	Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir las curvas de crecimiento promedio e incrementos diferenciales en altura total (m) y diámetro normal (cm) para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	58
16	Resumen de los análisis de varianza de los modelos lineales para construir tablas de volúmenes (m ³) para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	63
17	Resumen de los análisis de varianza de los modelos linealizados para construir tablas de volúmenes (m ³) para <i>Pinus durangensis</i> Mtz. en Durango, México.....	65
18	Resumen de los análisis de varianza de los modelos no lineales para construir tablas de volúmenes (m ³) para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	65
19	Resumen de los análisis de varianza del modelo lineal para estimar el grosor de corteza (cm), para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	66
20	Tabla de diámetro con corteza, para estimar grosor de corteza y diámetro sin corteza, para <i>Pinus durangensis</i> Mtz. en Durango, México, a partir de la ecuación $gc = 0.13656 + 0.05188 dcc$	66

21	Tabla de volumen de fuste total sin corteza (m^3) para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en poblaciones naturales de Durango, México, a partir de la ecuación de la Variable combinada $V_{ft} = 0.00076 + 0.43023 D^2 H$	67
22	Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir curvas anamórficas y polimórficas de índice de sitio por el método de la curva guía para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	69
23	Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir curvas anamórficas por el método de la diferencia algebraica para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	73
24	Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir curvas polimórficas por el método de la diferencia algebraica para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	74
25	Estadísticas sobresalientes de la Relación Área- Árbol, para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	79
26	Resumen del análisis de varianza del modelo linealizado para generar los parámetros de la función del Índice de Densidad de Rodales, con densidad normal, para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	81
27	Número de árboles por diámetro cuadrático para cada Índice de Densidad de Rodales de Reineke considerada.....	83
28	Resumen del análisis de varianza de los modelos 4, 5, 6, 7,8 y 9 para la predicción explícita del rendimiento actual de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., en Durango, México.....	87

INDICE DE FIGURAS

Figura		Pagina
1	Localización del área de estudio.....	33
2	Árbol de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., reconstruido a diferentes edades a partir del análisis troncal.....	56
3	Patrones de crecimiento e incremento en altura total (a) y diámetro normal (b) de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., hasta la edad de 100 años, empleando el modelo de Schumacher, en Durango, México.....	59
4	Patrones de crecimiento e incremento en altura total (a) y diámetro normal (b) de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., hasta la edad de 100 años, empleando el modelo de Chapman-Richards, en Durango, México.....	60
5	Patrones de crecimiento e incremento en altura total (a) y diámetro normal (b) de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., hasta la edad de 100 años, empleando el modelo de Weibull, en Durango, México.....	62
6	Curvas de índice de sitio para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., a la edad base de 68 años, empleando el método de la curva guía y modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull (anamórficas y polimórficas) en Durango, México.....	71
7	Curvas de índice de sitio para <i>Pinus durangensis</i> Mtz., a la edad base de 68 años, empleando el método de la diferencia algebraica y modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull (anamórficas y polimórficas) en Durango, México.....	75
8	Relación Área-Árbol para un árbol de diámetro "d" del área ocupada por un árbol individual por hectárea para rodales puros de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., con densidad normal en Durango, México.....	78

9	Número de árboles por hectárea para un árbol de diámetro "d", utilizando la Relación Área-Árbol para rodales puros de <i>Pinus durangensis</i> Mtz., con densidad normal en Durango, México.....	80
10	Línea de referencia a densidad normal, del número de árboles por hectárea, ajustada mediante la ecuación $N = 15063.0499 D_c^{-0.658}$, del Índice de Densidad de Rodales de Reineke.....	83
11	Número de árboles por hectárea por diámetro cuadrático, ajustada mediante la ecuación $N = IDRR(D_c/D_{cr})^{-0.658}$, para diferentes Índices de Densidad de Rodales de Reineke, a un diámetro cuadrático de referencia de 25.4 cm.....	84

1. INTRODUCCIÓN

La extensión territorial del país es de 1' 964,375 km², con una superficie continental de 1'959,248 km² y una insular de 5, 127 km²; esta extensión lo ubica en el decimocuarto lugar entre los países del mundo con mayor territorio. Según el Inventario Nacional Forestal Periódico, de la superficie total de bosques con que cuenta el país, 21.6 millones de ha tiene potencial comercial. De esta superficie, sólo se aprovechan actualmente 8.6 millones de ha. De incorporarse toda la superficie potencial al manejo, se producirían alrededor de 30 millones de m³ de madera, de los cuales 38% podría provenir de coníferas, 32% de especies tropicales y 30% de encinos y otros árboles latifoliados (Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (SEMARNAT) y Comisión Nacional Forestal (CONAFOR), 2002).

Uno de los problemas principales del manejo forestal consiste en que sólo 8.6 millones de ha, están bajo manejo técnico de algún tipo, lo que representa 15.1 % de la superficie total arbolada de 53 millones de ha (SEMARNAT y CONAFOR, 2002).

La determinación de la edad de cosecha y regímenes de manejo óptimos son algunas de las decisiones más importantes que enfrentan quienes administran los recursos forestales al planificar el proceso de producción primario. Los modelos de crecimiento y rendimiento son herramientas que facilitan la toma de decisiones por al menos tres razones: 1) Permiten predecir el rendimiento y consecuentemente optimizar la cosecha del bosque, 2) Permiten evaluar regímenes o tratamientos de manejo alternativos y 3) Pueden usarse como una herramienta para controlar rendimientos. Así, sin la ayuda de estas herramientas, es difícil desarrollar planes de manejo forestal adecuados (Valdez, 2000).

Es pues importante para hacer mas eficiente el manejo de los recursos forestales evaluar el rendimiento de las especies, para ello la cuantificación y ajuste para obtener tablas de volúmenes, la evaluación de la calidad de sitio, de los niveles de densidad y del crecimiento y atributos del rodal, son sustantivos al realizar estudios para la predicción del rendimiento maderable a través del tiempo.

Dado que en el estado de Durango, una de las especies más importantes por su distribución y calidad de su madera es el *Pinus durangensis* Mtz., conocido comúnmente como pino cenizo, se decidió en el presente trabajo de investigación generar una base cuantitativa que permita realizar un manejo sostenible de la especie, para esto en su primera etapa se generaron las curvas de crecimiento, la cuantificación del volumen, el desarrollo de los índices de sitio, índices de densidad y finalmente la predicción del rendimiento actual y futuro.

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo general

Elaborar un sistema de estimación para predecir el rendimiento de *Pinus durangensis* Mtz. en bosques naturales del estado de Durango.

2.2. Objetivos específicos

Determinar ecuaciones de crecimiento, volumen, índice de sitio y densidad para masas puras y coetáneas de *Pinus durangensis* Mtz..

Describir la metodología para generar las ecuaciones de crecimiento, de volumen, índice de sitio, índices de densidad y predicción explícita del rendimiento actual.

Generar para el área de interés las herramientas silvícolas que permitan realizar un manejo adecuado de *Pinus durangensis* Mtz..

3. REVISION DE LITERATURA

3.1. Modelaje en el manejo forestal

En el ámbito forestal, el utilizar los modelos matemáticos sirve para representar el comportamiento de fenómenos biológicos como el crecimiento, ya que aquí el factor tiempo, ha sido una de las limitantes para describir directamente el desarrollo de un rodal desde su inicio hasta el momento de su cosecha (Mendoza, 1983).

Zepeda (1990), indica que según la clasificación en base a objetivos usada por Mendoza (1983), los modelos más usados en el manejo forestal son:

- a). Simuladores: Modelos cuyo propósito es reproducir tanto el funcionamiento de los elementos internos del fenómeno de interés, como su dinámica global (Mendoza, 1983).
- b). Predictores: Modelos cuyo interés básico estriba en predecir el desarrollo de un fenómeno o su comportamiento en condiciones distintas de aquellas que sirvieron de base para su construcción (Mendoza, 1983).
- c). Optimizadores: Modelos cuya función es detectar estados específicos del objetivo de estudio, según algún criterio de optimización (Mendoza, 1983).

3.1.1. Clasificación de modelos de crecimiento y rendimiento

Davis y Johnson (1987), combinando los puntos de vista de Munro (1974) y Clutter *et al.*, (1983), usando la terminología de Clutter *et al.*, (1983), proponen la siguiente clasificación:

I. Modelos de totalidad del rodal

- A. Modelos de densidad libre
 - 1. Tablas de rendimiento normal
 - 2. Tablas de rendimiento empíricas
- B. Modelos de densidad variable
 - 1. Predicción del volumen actual
 - a. Modelos explícitos
 - b. Modelos implícitos (distribuciones diamétricas)
 - 2. Predicción del crecimiento y volumen futuro
 - a. Modelos explícitos
 - i. Predicción directa del crecimiento
 - ii. Predicción de la densidad del rodal
 - b. Modelos implícitos (distribuciones diamétricas)

II. Modelos de clases diamétricas

- A. Tablas empíricas de proyección de estructuras
- B. Modelos de crecimiento de clases diamétricas

III. Modelos de árboles individuales

- A. De la distancia dependiente
- B. De la distancia independiente

Zepeda (1990), indica que actualmente no existe una clasificación universalmente aceptada que cubran todos los tipos de modelos, para estimar el incremento y rendimiento de rodales.

Conviene aclarar, que en el presente estudio, para realizar la predicción utilizaron modelos de totalidad del rodal.

3.1.2. Modelos de totalidad del rodal

Bajo este enfoque la unidad primaria de modelaje es el rodal por lo que la información correspondiente a cada árbol es innecesaria. No se requiere información espacial de cada árbol, ni de sus atributos individuales, sino de los atributos globales o promedio del rodal (Davis y Johnson, 1987; Zepeda, 1983 y 1990).

De acuerdo con Ramírez y Zepeda (1994), los medios de construcción configuran con base a conceptos teóricos que se tengan sobre el crecimiento e incremento de árboles y masas forestales.

Presentamos algunos tipos de modelos:

3.1.2.1. Modelos de crecimiento mecanicistas

Son aquellos que se obtienen resolviendo ecuaciones diferenciales o de diferencia, que representan algunos supuestos sobre el tipo de crecimiento que se desea modelar (Draper y Smith, 1981).

Una de las principales características de los modelos mecanicistas es la de expresar el crecimiento como una función de la edad, aún cuando la edad no provee una explicación de las causas del fenómeno, ya que las relaciones entre la edad y el crecimiento, si bien son de importancia teórica y práctica, al mismo tiempo son hipotéticas y representan una aproximación de la realidad, ya que el crecimiento es el resultado de la relación genotipo–ambiente (Prodan, 1968).

De acuerdo con Zepeda (1983), entre los modelos mecanicistas mas populares, entre otros, se enlistan los modelos: Monomolecular, Logístico o autocatalítico, Peel-Reed, Gompertz, Von Bertalanffy, Chapman-Richards o generalizado de Von Bertalanffy, Thomasius, Weck, de eficiencia de

Mitscherlich, de dependencia fisiológica o crecimiento exponencial negativo, Spillman, Backman, Schumacher y Lundqvist o generalizando de Schumacher.

A continuación se describen tres tipos de modelos mecanicistas, populares por su uso en el ámbito forestal:

3.1.2.1.2. Modelo de Schumacher

Inicialmente se desarrolló para relacionar el volumen con la edad, sin embargo, el principal supuesto del modelo es que el crecimiento proporcional varía inversamente con la edad, es decir, a medida que aumenta la edad disminuye la tasa de crecimiento (Schumacher, 1939). La ecuación de Schumacher se registra así:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 \left(\frac{1}{t}\right)} \quad \beta_0 > 0, \beta_1 > 0$$

Donde:

y = Variable de estudio

β_0 = Parámetro del valor asintótico

β_1 = Parámetro de la tasa de crecimiento

t = Edad

MacKinney, *et al.*, (1937) citados por Schumacher (1939), señalaron que la curva de rendimiento volumétrico de un rodal coetáneo presenta ciertas características en común con otras curvas de crecimiento, las cuales son:

1. La curva de rendimiento vale cero en el intercepto y tienen un valor máximo finito a edad avanzada justamente antes de que el rodal empiece a decrecer, de ahí en adelante, el rodal pierde su uniformidad.
2. La curva muestra una tasa declinante del porcentaje de incremento.

3. La pendiente de la curva de crecimiento aumenta al inicio de la vida y decrece en los últimos años.

El modelo de Schumacher ha sido bastante usado desde que fue dado a conocer por su autor en 1939 (Acosta, 1991; Ramírez, 1989; Acosta *et al.*, 1992, Cumplido, 2002).

3.1.2.1.3. Modelo de Chapman-Richards

Este modelo de crecimiento se le conoce también como modelo de Richards o generalización de Von Bertalanffy; aunque fue reportado por Mitscherlich en 1919, éste volvió a conocerse por los investigadores americanos con el artículo “una curva flexible de crecimiento de uso empírico” por Richards en 1959 (Zeide, 1993). Este es una expresión matemática de una hipótesis que implica causas esenciales del fenómeno de crecimiento, es decir, los parámetros en el modelo tienen interpretación biológica o fisiológica (Pienaar y Turnbull, 1973), características deseables para representar el crecimiento biológico de los árboles a través de una ecuación.

Richards (1959), en estudios de crecimiento de plantas y Chapman (1961), en crecimiento de peces, discutieron que la relación de Von Bertalanffy de 2/3 era muy restrictiva para aplicarla a diferentes formas de vida. Ambos autores sugirieron que el valor de la constante debe ser indefinido. Ellos propusieron una generalización del modelo, el cual tuviera amplias aplicaciones en estudios botánicos (Pienaar y Turnbull, 1973; Zamudio y Allende, 1997), esto es:

Ecuación de Von Bertalanffy:

$$Y = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Ecuación de Chapman-Richards:

$$Y = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 t}\right)^{\beta_2}$$

Donde:

Y = Variable dependiente

t = Variable independiente (tiempo)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Coeficientes de regresión

La ventaja de la ecuación de Chapman-Richards es su flexibilidad y es valorada por su exactitud (Richards, 1959,).

El modelo de crecimiento de Chapman-Richards puede aplicarse al crecimiento de árboles individuales así como al crecimiento de rodales. Para árboles que crecen bajo condiciones ambientales relativamente estables, se puede argüir que la tasa potencial de crecimiento de biomasa, por ejemplo, es el resultado de una tasa anabólica y catabólica. La tasa anabólica, esto es, la tasa de metabolismo constructivo, se asume que es proporcional al área fotosintética del árbol; también se asume que hay una relación alométrica entre la biomasa viva y el área fotosintética (Peinaar y Turnbull, 1973).

La flexibilidad depende del número de parámetros en una ecuación, y no hay razón para suponer que la ecuación de Chapman-Richards podría ser más flexible que cualquier otra ecuación con tres parámetros, aunque sí, que otra de dos parámetros (Zeide, 1993).

3.1.2.1.3. Weibull

Fisher y Tippet en (1928), derivaron una función de distribución de probabilidades al desarrollar estudios sobre "valores extremos". Esta misma función fue derivada y presentada por Weibull en 1939, como una función adecuada para el estudio de finalidad de materiales (Torres *et al.*, 1992; Magaña *et al.*, 1992; citado por García 1998). A partir de entonces se le han

encontrado propiedades para modelar el crecimiento y rendimiento de los árboles (Bailey y Dell, 1973; Torres, 2001).

La función Weibull es altamente flexible, es capaz de asumir virtualmente todo aumento monótonico de la forma de crecimiento sigmoideal que se encuentra en el universo biológico, es poseedora de algunas características que son de particular interés en la construcción teórica de modelos de crecimiento (García, 1998; y Cumplido, 2002).

La función acumulativa Weibull puede escribirse así:

$$y = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 t^{\beta_2}} \right)$$

Donde:

Y = Variable dependiente

t = Variable independiente (tiempo)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Coeficientes de regresión

Shapiro y Gross (1981), citados por Cumplido (2002), señalaron que el modelo Weibull se ha aplicado extensamente en los años recientes debido a que:

1. Para muchas situaciones en las cuales los datos no pueden ser ajustados por un modelo exponencial, el modelo Weibull puede usarse.
2. Es uno de los modelos paramétricos más comúnmente usado en análisis de datos. Entonces, la literatura concerniente al tema se desarrolla rápidamente.
3. Las diferencias relacionadas a dos parámetros desconocidos es más difícil hacerlas con el modelo exponencial que con la Weibull, que ha sido tratada desde hace más de dos décadas.

3.1.3. Modelos empíricos

Un modelo empírico es aquel seleccionado para aproximar experimentalmente un modelo mecanicista desconocido a través de polinomios de algún orden conveniente (Draper y Smith, 1981).

Dentro de este tipo de modelos, se ubican los que se subclasifican como modelos empíricos biológicamente realistas, tales como los modelos de Hossfeld, Hogersshoff, Patterson y generalizando de Schumacher, descritos por Zepeda (1990).

Por su parte, también existen los modelos biológicamente no realistas, mismos que carecen prácticamente de fundamentación biológica, ya que son de naturaleza empírica artificial y sin relación directa con la teoría de crecimiento (Pienaar, 1965), lo que los convierte solo en expresiones matemáticas de la relación existente entre variables respuesta y predictorias de una base de datos particular, donde el único criterio imperante es el de mejor ajuste a los datos (Pienaar, 1965 y Zepeda, 1990). Ejemplo de estos modelos son los trabajos de Myers (1966, 1967 y 1971), citados por Zepeda (1990).

3.1.4. Modelos de procesos

Son modelos que simulan los eventos biológicos mediante los cuales el bióxido de carbono, los nutrimentos, el agua y la luz son convertidos en biomasa a través de la fotosíntesis. El desarrollo de estos modelos implica simular la diferenciación de células, el engrosamiento de sus paredes y la agregación de tejido leñoso a árboles completos, no ha llegado a un nivel que motive el interés de los administradores del bosque (Ramírez, 1994).

3.2. Crecimiento e incremento de árboles y masa forestales

El crecimiento de los árboles o masas forestales es predicho mediante curvas que relacionan el tiempo con su crecimiento o incremento. Entre otras ecuaciones o modelos de crecimiento que ajustan esta relación, los mas usados son: Modelo de Schumacher, Chapman-Richards y Weibull .

Para analizar las características de las curvas de crecimiento e incremento de árboles y masas forestales, es necesario entender los siguientes conceptos (Klepac, 1983):

Incremento: Es el aumento en el tamaño de un organismo vivo en un cierto intervalo de tiempo.

Incremento Corriente Anual (ICA): Es el crecimiento que logra un árbol o una masa en el curso de un año.

Incremento Medio Anual (IMA): Es el promedio anual del incremento total; se obtiene dividiendo las dimensiones de un árbol o una masa entre su edad.

Rendimiento: Es la cantidad total efectiva de producto útil susceptible de ser obtenida de un sitio dado.

Producción: es la madera producida por un sitio, sea bruta o neta, el rendimiento es la porción del producto útil obtenido de ésta.

Una curva de crecimiento es una representación gráfica de tamaño con respecto a edad y una curva de incremento muestra el incremento periódico o anual, también referido a la edad.

Una curva de crecimiento, en la mayoría de los casos, toma una forma sigmoideal, similar a una curva de suma de frecuencias. Empieza en el origen o en un punto fijo, sube lentamente al principio y luego con mayor velocidad, después hay un cambio del gradiente (punto de inflexión) de la curva, el incremento disminuye y luego se mueve asintóticamente hacia delante a algún valor final determinado por la naturaleza genética del organismo y por las limitaciones ambientales (Prodan, 1968; Yang, *et al.*, 1978; Daniel, *et al.*, 1982; citado por Cumplido, 2002).

La curva de incremento corriente inicia con el valor cero, aumenta al principio lentamente y después fuertemente, alcanza un máximo, empieza a disminuir y asintóticamente se acerca a cero (Ayerde, 1996).

La curva de incremento medio es unimodal, semejante a la curva de incremento corriente, pero sube más lentamente y del mismo modo decrece (Prodan, 1968; citado por Cumplido, 2002).

3.3. Funciones de volumen

Caballero (1972) y Sosa (1981), menciona que pocas actividades dentro de la dasonomía se equiparan en importancia a las que se realizan para la elaboración de "ecuaciones de volumen".

Spurr (1952) menciona que existen métodos directos e indirectos de construcción de tablas de volúmenes, siendo básicamente el problema de construir una tabla de volúmenes un problema estadístico.

Uno de los objetivos de los análisis de regresión es hacer predicciones, y para lograr este objetivo se requiere encontrar el modelo de regresión que mejor se ajuste a los datos observados. Infante y Zárate (1996), Cailliez (1980)

y Romahn *et al.* (1994) presentan una descripción general de las técnicas de regresión.

La obtención de tablas de volúmenes fue hasta hace unos años en México motivo de grandes investigaciones debido a la necesidad de estas tablas como herramienta útil e importante en la toma de decisiones forestales. Ante el advenimiento de programas de cálculo de gran capacidad como el paquete SAS (Statistical Analysis System) y las computadoras personales, los cálculos y el tiempo necesarios para su obtención se han simplificado muchísimo (Chapra y Canale, 1994), lo cual hace que el investigador se enfoque más al análisis estadístico de los datos y al conocimiento preciso de la gramática de cada programa para poder optimizar el tiempo invertido en la obtención de tales tablas (Rodríguez y Moreno, 1982; Zepeda *et al.*, 1990; Garcia, 1998).

Caballero (1976), Cailliez (1980) y Romahn (1994), coinciden en establecer que las etapas fundamentales en la construcción de ecuaciones de volúmenes son:

1. Elección de la muestra.
2. Mediciones de campo.
3. Cálculo de los volúmenes individuales.
4. Probar diferentes funciones y seleccionar la ecuación óptima de volumen.

3.3.1. Selección de modelos de volúmenes.

Con la finalidad de determinar los mejores modelos para generar las ecuaciones, se utilizan generalmente los siguientes modelos empíricos lineales y no lineales (Caballero, 1972; Clutter *et al.*, 1983; Romahn *et al.*, 1994; Renteria, 1995; Prodan *et al.*, 1997) (Cuadros 1,2 y 3):

Cuadro 1. Modelos lineales sin considerar la forma del árbol, para generar ecuaciones de volumen.

Nombre	Función
De coeficiente mórfico constante	$v = \beta_0 d^2 h$
De la variable combinada	$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 h$
De la variable combinada generalizada	$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 h + \beta_3 d^2 h$
Australiana	$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 h + \beta_3 d^2 h$
Meyer modificada	$v = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 dh + \beta_3 d^2 h$
Comprensible	$v = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 dh + \beta_3 d^2 + \beta_4 h + \beta_5 d^2 h$
De Naslund	$v = \beta_0 + \beta_1 d^2 + \beta_2 d^2 h + \beta_3 d^2 + \beta_4 d^2 h$
De Takata	$v = d^2 h / (\beta_0 + \beta_1 d)$

Donde: v = Volumen (m^3); d = Diámetro normal (m); h = Altura (m);

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ = Coeficientes de regresión.

Cuadro 2. Modelos no lineales sin considerar la forma del árbol, para generar ecuaciones de volumen.

Nombre	Función no lineal	Función linealizada
De Schumacher	$v = \beta_0 d^{\beta_1} h^{\beta_2}$	$\text{Log } v = \log \beta_0 + \beta_1 \log(d) + \beta_2 \log(h)$
Logaritmica con intercepto	$v = \beta_0 + \beta_1 d^{\beta_1} h^{\beta_2}$	No es linealizable
De Korsun	$v = \beta_0 (d + 1)^{\beta_1} h^{\beta_2}$	$\text{Log } v = \log \beta_0 + \beta_1 \log(d+1) + \beta_2 \log(h)$
Modelo de Dwigth	$v = \beta_0 d^{\beta_1} h^{(3-h)}$	$\text{Log } v = \log \beta_0 + \beta_1 \log(d) + (3 - \beta_1) \log(h)$
De la variable combinada	$v = \beta_0 (d^2 h)^{\beta_1}$	$\text{Log } v = \log \beta_0 + \beta_1 \log(d^2 h)$
Modelo de Thornber	$v = \beta_0 (h/d)^{\beta_1} d^2 h$	$\text{Log } v = \log \beta_0 + \beta_1 \log(h/d) + \log(d^2 h)$
Variable transformada de Honer	$v = \left(d^2 / \left(\beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{h} \right) \right) \right)$	No es linealizable
Berkhout	$v = \beta_0 d^{\beta_1}$	$\text{Log } v = \log \beta_0 + \beta_1 \log(d)$
Wenk	$v = g \left(\frac{h^2}{\beta_0 d^{1/2}} + \beta_1 d^{1/2} \right)$	No es linealizable

Donde: v = Volumen (m^3); d = Diámetro normal (m); h = Altura (m); g = Área basal (m^2); $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Coeficientes de regresión.

Cuadro 3. Modelos lineales y no lineales considerando la forma del árbol, para generar ecuaciones de volumen.

Nombre	Función
Abreviada	$v = \beta_0 + \beta_1 F d^2 h$
De la variable combinada	$v = \beta_0 + \beta_1 F + \beta_2 d^2 h + \beta_3 F d^2 h$
De forma a través del diámetro	$v = \beta_0 d^{\beta_1} h^{\beta_2} d_u^{\beta_3}$
De la variable combinada	$v = \beta_0 (F d^2 h)^{\beta_1}$

Donde: v = Volumen (m^3); d = Diámetro normal (m); h = Altura (m); F = Coeficiente de forma; $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ = Coeficientes de regresión.

3.4. Calidad de sitio

En el contexto del manejo forestal, la calidad de sitio puede definirse como la producción potencial de madera de un sitio para una especie en particular o tipo de bosque (Clutter *et al.*, 1983; Davis y Johnson, 1987).

La calidad o capacidad productiva del sitio como un concepto biológico que representa el crecimiento y desarrollo de una especie como respuesta a todas las condiciones ambientales, no puede expresarse matemáticamente, por lo que se opta representarla a través de valores índice denominados índice de sitio o de productividad, los que son una expresión cuantitativa de la calidad de sitio (Alder, (1980); Prodan *et al.*, 1997;).

Para la evaluación de la calidad de sitio, Clutter *et al.*, (1983) clasifica los métodos en los siguientes: directos e indirectos. Dentro de los primeros está la estimación a partir de registros permanentes de producción, la estimación basada en datos de volumen del rodal y la estimación basada en datos de altura del rodal, dentro de los segundos está la estimación a partir de la relación que hay entre especies, la estimación a partir de características de la

vegetación y la estimación a partir de factores climáticos, topográficos y edáficos.

Otra clasificación es dada por Moreno (1996), que los describe así:

- ◆ Métodos basados en las características dasométricas del arbolado.
 - a) Estimación a partir de la producción de volumen maderable.
 - b) Estimación a partir a través de la relación altura – edad.
- ◆ Método de la vegetación.
 - a) Especies del sotobosque.
 - b) Espectro indicador de especies.
 - c) Hábitat tipo.
- ◆ Métodos basados en factores del medio ambiente.
 - a) Estudios suelo - sitio
 - b) Clasificación de suelos
 - c) Ordenación.
- ◆ Métodos multifactoriales.
- ◆ Método del índice de sitio

3.4.1. Índice de sitio

El índice de sitio es uno de los métodos más usados para determinar la calidad de estación en masas coetáneas perfectamente puras, con la base en relaciones de datos de altura dominante – edad y se define como la altura dominante alcanzada por un rodal coetáneo a una edad de referencia o edad base determinada (Zepeda, 1984; Zepeda y Rivero, 1984).

Se menciona que la altura promedio de un rodal es afectada por la edad y calidad del sitio, así como por la densidad del rodal, por ello, se usa normalmente la altura dominante de un rodal coetáneo a una determinada edad, ya que se considera que esta no es afectada por la densidad (Alder, 1980).

La evaluación anterior requiere entonces tanto la suposición de un modelo que represente la altura dominante – edad, como de un comportamiento de la familia de curvas generada bajo el mismo modelo (Torres, 2001).

3.4.1.1. Familia de curvas

La familia de curvas de índice de sitio se ha dividido en dos clases: anamórficas y polimórficas y dentro de las polimórficas en articuladas y desarticuladas (Clutter *et al.*, 1983).

Las curvas anamórficas se caracterizan por presentar la misma forma, ya que son proporcionales y la pendiente de la altura de las curvas a cualquier edad guarda una relación constante entre ellas (Clutter *et al.*, 1980) y tienen un punto de inflexión a la misma edad para todas ellas. Es decir, las curvas de índice de sitio son anamórficas si hay una tasa relativa de crecimiento constante para todas las curvas (Zepeda y Rivero, 1984; Madrigal y Ramírez, 1995).

Las curvas polimórficas son familias de curvas con pendiente variable, que generalmente no guardan una relación de paralelismo entre ellas, explicadas en escala logarítmica y no son proporcionales por no depender unas de otras, por esta razón sus puntos de inflexión ocurren a edades diferentes (Clutter *et al.*, 1980; Zepeda y Rivero, 1984).

Las curvas polimórficas al no ser proporcionales unas de otras, indican que existen distintos hábitos de crecimiento para las diferentes clases de índice de sitio (Clutter *et al.*, 1983; Aguirre, 1984; Quiñónez, 1995).

Las curvas polimórficas pueden ser articuladas o desarticuladas. Las articuladas son curvas que guardan una determinada relación, aunque no proporcional y éstas no llegan a cruzarse en los rangos de interés, mientras que las desarticuladas no tienen ninguna relación entre ellas y es posible que se crucen dentro del rango de interés (Bailey y Clutter, 1974; Clutter *et al.*, 1983).

3.4.1.2 Métodos para generar curvas de índice de sitio

Existen tres métodos generales para construir curvas de índice de sitio, mismos que utilizan información proveniente de parcelas temporales, árboles muestra o parcelas permanentes y análisis troncales (Clutter *et al.*, 1983).

3.4.1.2.1. Método de la curva guía.

Es un método empleado para generar curvas de índice de sitio de tipo anamórficas o polimórficas. La técnica consiste en ajustar en forma analítica un modelo matemático para obtener una curva promedio o curva guía en todo el rango de observaciones altura dominante – edad, a partir de la cual se traza curva guía de las que se genera una familia de curvas, las cuales representan diferentes índices de sitio. Los datos de altura dominante – edad pueden ser obtenidos de una variedad de rodales de diferentes edades y calidad de estación (Clutter *et al.*, 1983).

3.4.1.2.1. Método de la diferencia algebraica.

Es un procedimiento bastante flexible y puede ser aplicado con cualquier ecuación de altura para producir curvas anamórficas o polimórficas. Para utilizar

este método se requieren datos provenientes de sitios permanentes para la remediación de árboles o de análisis troncales. La técnica puede ser aplicada a cualquier ecuación funcional entre la altura dominante y la edad, para generar curvas anamórficas y polimórficas. El paso inicial en el desarrollo de este método, consiste en desarrollar en una forma de diferencia algebraica la ecuación a ser ajustada para la altura dominante-edad, en la cual se debe contar con mediciones de altura dominante H_1 y H_2 tomadas de los mismos sitios o individuos a edades E_1 y E_2 (Clutter *et al.*, 1983).

Posteriormente se expresa en diferencia algebraica la altura dominante remedida H_2 como una función de la edad de remediación E_2 , edad inicial E_1 y la altura dominante inicial H_1 (Clutter *et al.*, 1983; Ramírez *et al.*, 1987).

3.4.1.2.2. Método de la predicción de parámetros.

Este método se desarrolló para ajustar curvas de índice de sitio de tipo polimórficas.

El procedimiento requiere remediciones de sitios permanentes o análisis troncales e involucra los siguientes pasos (Clutter *et al.*, 1983):

- a) Ajustar una ecuación altura dominante – edad del mismo modelo para cada árbol de análisis troncal.
- b) A cada árbol se le determina su índice de sitio para la misma edad base.
- c) Cada parámetro en el modelo se propone como una función índice de sitio.

Las curvas de índice de sitio generadas por este método, generalmente no pasan por la altura prescrita como índice a la edad base, lo que representa un serio inconveniente teórico.

3.5. Densidad

La densidad del rodal puede considerarse como el principal factor, después de la calidad de sitio, para determinar la productividad de un sitio forestal. Asimismo, es el principal factor que el silvicultor puede manejar durante el desarrollo de rodal (Daniel *et al.*, 1982).

A continuación se presentan algunas definiciones tomadas de Zepeda (1983), que con frecuencia se utilizan:

Espacio de crecimiento: Extensión ocupada por un árbol de un rodal determinado, susceptible de ser expresado en términos de la distancia que existe entre los individuos de un rodal, área horizontal de la copa y espacio de raíces.

Densidad: Grado de ocupación real, en un momento dado, del área de un sitio o lugar por árboles.

Rodal de densidad normal: Es aquel en el que todo espacio de crecimiento es ocupado en forma efectiva para el buen desarrollo del arbolado en el existente (Husch *et al.*, 1972). Generalmente se supone que el rodal con densidad normal es aquel en el cual las copas de los árboles se aproximan pero no se tocan y la mortalidad empieza a manifestarse (Zepeda, 1984; Zepeda y Rivero, 1987).

Índice de densidad: Indicador, cualquiera que este sea, del grado de ocupación del área de un sitio por árboles.

Línea de referencia: Sucesión de puntos que representa el comportamiento de una norma de densidad determinada.

Diámetro cuadrático: Es el diámetro del área basal promedio de un sitio cubierto por árboles a una determinada densidad.

Diámetro cuadrático de referencia: Diámetro cuadrático utilizado para definir el Índice de Densidad de Rodales de Reineke. En Estados Unidos se a usado con un valor de 10 pulgadas (25.4 cm), pero en realidad puede usarse cualquier diámetro conveniente.

Se puede afirmar que el concepto de la densidad no es mas que una unidad de medición que se refiere a la presencia de árboles sobre un área determinada, por ejemplo: número de árboles por unidad de superficie, área basal por unidad de superficie o volumen de los árboles o parte de ellos por unidad de superficie (Becerra, 1986).

La densidad se clasifica en absoluta y relativa. Se define como densidad absoluta a aquella medida en términos de número de árboles, área basal o volumen por unidad de área. En cambio, la densidad relativa es la medida cuantitativa como un coeficiente de la población expresada en número de árboles, área basal o volumen como una proporción de la densidad del rodal para alcanzar un objetivo de manejo para una edad e índice de sitio implicados. La densidad relativa de un rodal en términos cualitativos se divide en subpoblado, completamente poblado y sobrepoblado (Zepeda y Villarreal, 1984; Balderas y Rodríguez, 1989).

3.5.1. Métodos para determinar la densidad (índices de densidad)

En vista de que la evaluación de la densidad es importante, se han propuesto varios métodos, sin embargo, todavía no se ha llegado a un acuerdo

en lo relativo a cual es la forma mas confiable para describir la densidad (Daniel *et al.*, 1982) (Cuadro 4).

Cuadro 4. Clasificación de los índices de densidad.

Basado en	Índice
Número de árboles	Índice Ocular
	Índice Kohler
	Índice Khil'mi
	Índice de Rodales de Reineke
Área del fuste	Índice de Lexen
Área basal	Niveles de densidad
Diámetro normal	Método de D mas
	Método de D veces
	Relación área-árbol
	Factor de competencia de copas
Volumen	Incremento de volumen de Stage
	Tablas de rendimiento normal
Altura dominante	Índice de Hummel
	Índice de Stage
	Índice de Czarnowski
Conteo angular o distancia	Densidad puntual de Spurr.
Espacio de crecimiento	Guías de densidad

Fuente: Becerra, 1985.

Cada uno de los métodos tienen un enfoque especial sobre la medición de la densidad del rodal, pero Curtis (1970), citado por Becerra (1982), demostró, matemáticamente, las relaciones existentes entre la mayoría de ellos y encontró que las diferencias son principalmente de forma algebraica.

Entre los indicadores, los utilizados en México por su facilidad y sencillez para definir la densidad de los rodales, son el Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR), la Relación Área – Árbol (RAA) y el Factor de Competencia de Copas (FCC) (Balderas y Rodríguez, 1989).

3.5.1.1. Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR)

El IDRR es un indicador del número de árboles por unidad de superficie, que un rodal podría tener a un diámetro cuadrático de referencia, pareciéndose en este sentido a un índice de sitio en el cual se tiene una altura a una edad base de referencia (Reineke, 1933; citado por Becerra, 1985).

El supuesto de este procedimiento es el de que, para una especie dada, el número máximo de árboles que es posible tenga un rodal coetáneo plenamente poblado, está correlacionado negativamente con su diámetro cuadrático medio; la curva que representa esta relación asume la forma de una línea recta cuando se traza sobre papel logarítmico de 3 a 6 ciclos (Reineke, 1933; citado por Becerra, 1985; Clutter *et al.*, 1983 y Zepeda, 1984).

Para calcular este índice, por métodos de regresión no lineal se estima la relación funcional entre número de árboles y diámetro cuadrático medio mediante la relación:

$$N = \beta_0 Dc^{\beta_1} \dots\dots\dots \text{MODELO NO LINEAL}$$

$$\ln N = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln Dc \dots\dots\dots \text{MODELO LINEALIZADO}$$

Donde:

N = No. de árboles por hectárea

D_c = Diámetro cuadrático medio

Ln = Logaritmo natural

β_0 = Interceptada al origen, en escala logarítmica

β_1 = Pendiente de la curva de referencia, en escala logarítmica

El grado de densidad de rodales considerados bajo la misma condición restrictiva (Línea base o de referencia), se expresa numéricamente como el número de árboles por unidad de área cuando D_c es igual a 25.4 cm (Clutter *et al.*, 1983), o bien el diámetro de referencia conveniente.

$$N = \beta_0 (25.4)^{\beta_1}$$

Donde:

$IDRR$ = Índice de Densidad de rodales de Reineke

β_0 = Interceptada al origen, en escala logarítmica

β_1 = Pendiente de la curva de referencia, en escala logarítmica

Por lo que para cualquier rodal con N y D_c conocidos, Reineke (1933), definió su índice de densidad como:

$$IDRR = \beta_0 \left(\frac{25.4}{D_c} \right)^{\beta_1}$$

La ecuación se puede manipular algebraicamente para calcular el número de árboles por hectárea cuando el rodal alcance un determinado IDRR y los árboles tengan un diámetro cuadrático medio determinado. Asimismo, se puede estimar el diámetro cuadrático del rodal dado un IDRR y el número de árboles o el número de árboles dado el IDRR y el D_c (Zepeda, 1983).

3.5.1.2. La relación área-árbol (RAA)

La RAA es un índice de estimación de la densidad propuesto por Chisman y Schumacher (1940).

En el método de la RAA se supone distribuye la superficie del suelo ocupada por la copa de un árbol individual dentro de un rodal normal de acuerdo con su diámetro normal (Daniel *et al.*, 1982).

De acuerdo con Spurr (1952), Daniel *et al.*, (1982) y Zepeda (1984), la RAA es la proporción en porcentaje que del espacio de crecimiento disponible en una parcela ocupan los árboles de un diámetro normal determinado.

Se basa en el supuesto que el área del terreno "y" ocupada por un árbol de diámetro, "d", puede expresarse satisfactoriamente por la relación (Zepeda 1984):

$$y = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2$$

Lo anterior supone que el área del terreno ocupada por un árbol está relacionada con el diámetro normal mediante una parábola (Spurr, 1952) y la superficie del suelo ocupada por la copa de un árbol individual de un diámetro normal, se distribuye en el terreno de acuerdo a su diámetro normal (Daniel *et al.*, 1982).

La aplicación de este método requiere el uso de una parcela fija y el diámetro de todos los árboles para calcular la relación. Cada especie requiere el cálculo de una nueva serie de constantes para la ecuación cuadrática.

3.5.1.2. El factor de competencia de copas (FCC).

El FCC es un índice cuantitativo que permite comparar el grado de densidad lateral que pueden soportar los árboles de una especie, independientemente de la edad, calidad de sitio, número de árboles por unidad de superficie y tamaño medio de los árboles y permite una visión apreciable de las razones por las que algunas especies pueden crecer en rodales más densos que otros (Daniel *et al.*, 1982).

El FCC se diseñó para aportar información acerca de la máxima cantidad de espacio disponible que puede utilizar un árbol y acerca el mínimo necesario para que el árbol pueda permanecer dentro del rodal (Krajicek *et al.*, 1961).

Este índice se basa en el supuesto de que existe una correlación entre el diámetro de copa del árbol que creció libremente, sin interferencias, y su diámetro normal (Krajicek *et al.*, 1961).

De acuerdo con Krajicek *et al.*, (1961), “el único caso en que las relaciones diámetro de copa/diámetro normal no se confunden por efecto de la competencia, es cuando los árboles crecen libremente”.

La relación funcional entre el diámetro de copa (dc) y el diámetro normal (d) de árboles que han crecido sin interferencia, se asume que es de la forma (Zepeda, 1984):

$$dc = \beta_0 + \beta_1 d$$

Donde:

dc = Diámetro de copa

d = Diámetro normal

β_0 = Interceptada al origen

β_1 = Pendiente de la curva de referencia

El FCC está basado en una relación verificada entre la anchura de la copa y el diámetro normal y mide la competencia con mas exactitud que los otros métodos actualmente en uso (Krajicek *et al.*, 1961).

3.6. Predicción del crecimiento y rendimiento

En la predicción del rendimiento existen dos casos, la predicción del rendimiento actual y la predicción del rendimiento futuro y para estos existen dos tipos de sistemas de predicción, el explícito y el implícito. En el sistema de predicción explícita la relación entre la variable dependiente e independiente es especificada, en cambio en el sistema de predicción implícita, se involucra información básica de la estructura del rodal, trabajando con modelos matemáticos de distribución de diámetros (Davis y Johnson, 1987).

Acosta (1991), menciona que para la predicción implícita, se incurren en más errores de estimación al hacer las predicciones, debido a que a través de todo el procedimiento que se realiza, los errores de estimación se van acumulando. Además que desde el punto de vista práctico y de confiabilidad, es preferible usar los modelos de predicción explícita del rodal que los de distribuciones diamétricas.

3.6.1. Predicción explícita del rendimiento

Este tipo de modelos se caracterizan porque la solución de las ecuaciones que comprende el sistema, proporciona la estimación del volumen por unidad de área y la predicción puede ser para estimar el rendimiento actual, el cual no considera la proyección de la densidad futura, o rendimiento futuro el cual si considera dicha proyección (Clutter *et al.*, 1983).

La manera de operar es la siguiente: el crecimiento neto o bruto se calcula estimando el rendimiento a dos edades diferentes. Cuando se obtiene el crecimiento estimado por medio de diferenciar una ecuación de crecimiento, es necesario contar con una función que describa el cambio en la densidad del rodal en el tiempo. Para rodales naturales esto incluye generalmente una ecuación para proyectar área basal inicial, edad y el periodo de proyección (Burkharts y Brooks, 1982; citado por Acosta, 1991).

Uno de los modelos mas utilizados para predecir el rendimiento actual es la forma básica del modelo de Schumacher (Clutter *et al.*, 1983):

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2(1/E) + \beta_3 f(Is) + \beta_4 f(ID)$$

Donde:

V = Volumen sin corteza por hectárea

E = Edad del rodal

$f(Is)$ = Función de Índice de sitio

$f(ID)$ = Función de densidad del rodal

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ = Parámetros a estimar

A partir de este modelo se han generado muchos, pero sin cambiar la estructura básica del mismo.

Respecto a la predicción del rendimiento futuro, se puede utilizar el mismo modelo básico de Schumacher, no obstante, es necesario proyectar la función densidad. Por lo tanto si el interés es proyectar el crecimiento de un árbol a edades futuras, lo que requiere es el índice de sitio propio de ese rodal, la edad de proyección y la predicción de la densidad a la edad proyectada. Así el problema se reduce a predecir la función de densidad (Clutter *et al.*, 1983). Estos mismos autores presentan la siguiente ecuación como de Bennett para hacer la predicción de la densidad:

$$\ln A_2 = \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \ln A_1 + 5.1649 \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$$

Donde:

A_2 = Área basal predicha a la edad proyectada

E_1 = Edad actual

A_1 = Área basal a la edad actual

E_2 = Edad proyectada

La ecuación se puede ajustar directamente y después se sustituye en el modelo básico de Schumacher, o de otra manera se puede ajustar el modelo completo una vez que se incluye sin ajustar el modelo básico de Schumacher (Acosta, 1991).

Clutter *et al.*, (1983) también citan el modelo que inicialmente desarrolló Clutter (1963) y después Sullivan y Clutter (1972). Primero derivaron el área basal en el periodo de proyección con el siguiente modelo:

$$\ln B_2 = \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \ln B_1 + \alpha_0 \left(1 - \frac{E_1}{E_2} \right) + \alpha_1 IS \left(1 - \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \right)$$

Donde:

IS = Índice de sitio

B_2 = Área basal predicha a la edad proyectada

E_1 = Edad actual

B_1 = Área basal a la edad actual

E_2 = Edad proyectada

α_0, α_1 = Parámetros a estimar

Después desarrollaron otro modelo para la predicción del rendimiento futuro, mismo que al anexarle el modelo anterior quedó como sigue:

$$\ln V = \beta_0 + \beta_1 IS + \beta_2 \left(\frac{1}{E_2} \right) + \beta_3 \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \ln B1 + \beta_4 \left(1 - \frac{E_1}{E_2} \right) + \beta_5 IS \left(1 - \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \right)$$

Donde:

V = Volumen ppor unidad de área a la edad

IS = Índice de sitio

E_1 = Edad inicial

E_2 = Edad proyectada

$B1$ = Área basal inicial

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ = Parámetros del rodal

Con esté enfoque de modelo se puede predecir lo siguiente (Clutter *et al.*, 1983):

1. Volumen actual
2. Volumen futuro
3. Tasa de crecimiento instantánea en volumen
4. Área basal futura
5. Tasa de crecimiento instantánea en área basal

4. MATERIALES Y MÉTODOS

4.1. Área de estudio

El área de estudio se encuentra en la región noreste de México, donde *Pinus durangensis* Mtz. se encuentra distribuida en poblaciones naturales mixtas y puras.

4.1.1. Ubicación geográfica

El presente estudio se llevó a cabo en el estado de Durango, México, en poblaciones naturales de *Pinus durangensis* Mtz., específicamente en el predio particular Sierra del Nayar, ubicado dentro de las coordenadas geográficas siguientes: 23 ° 30' y 23 ° 39' de latitud norte, 104 ° 53' y 105 ° 05 ' de longitud oeste con respecto al meridiano de Greenwich (Consultaría Forestal "Roberto Trujillo", 2000).

4.1.2. Clima

De acuerdo al sistema de Koppen modificado por García (1987), se identifica con la formula C(W2) lo cual indica que es un clima templado subhúmedo con lluvias en verano, con temperatura media anual entre 12 y 18° C, de temperatura del mes mas frío entre -3 y 18° C, con una precipitación pluvial en el mes mas seco, de menos de 40 mm. La mayor incidencia de heladas se presenta durante los meses de noviembre a febrero (García, 1987).

4.1.3. Hidrología

Se encuentra ubicado en la región hidrológica No. 11 denominada PRESIDIO-SAN PEDRO (RH11Bc05), (RH11Bc06) y (RH11Bc07), en la

cuenca (B) del río Acaponeta, subcuencas (b) y (c), del río San Diego y Quebrada del Espíritu Santo, microcuencas (01), (04), (05), (06), (07), (10), (11) y (12) respectivamente (Consultaría Forestal "Roberto Trujillo", 2000).

Todos los arroyos confluyen en la Quebrada de San Diego formando el río Acaponeta y posteriormente vierten sus aguas en el Océano Pacífico (Consultaría Forestal "Roberto Trujillo", 2000).

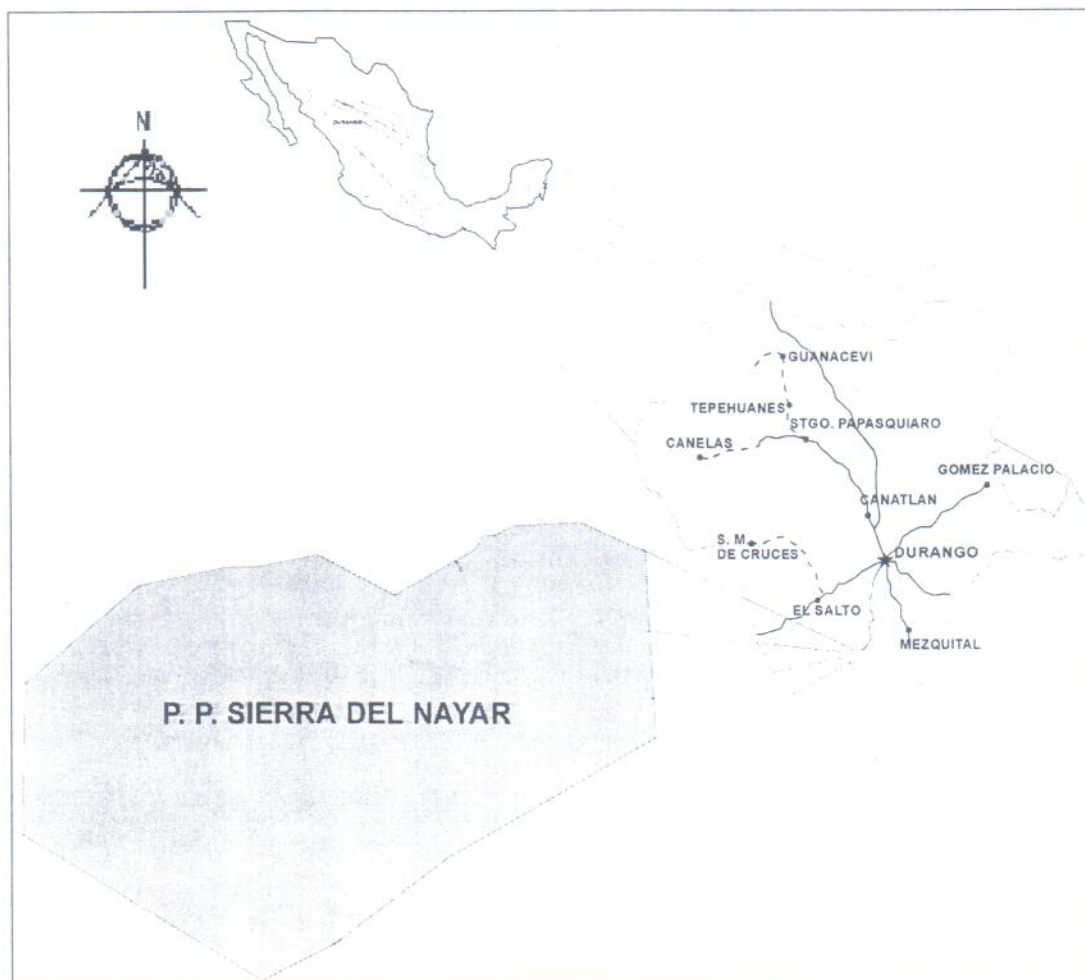


Figura 1. Localización del área de estudio.

4.1.4. Fisiografía y Orografía

Se ubica en la provincia de la Sierra Madre Occidental en su parte alta, siendo su orografía en general accidentada, dando formación a numerosas planicies y lomeríos. Existen pendientes pronunciadas que dificultan en algunos casos el acceso a los macizos forestales y sobre todo impiden que las brechas de acceso se puedan mantener en buenas condiciones en la temporada de lluvias (Consultaría Forestal "Roberto Trujillo", 2000).

Los puntos mas altos son: Cerro Blanco, Cerro Gacho, Cerro la Cebadilla. Cerro de la providencia, Alto del Cordón de los Indios, Alto de los Lobos, Alto de la Mesa de los Negros, Cerro del Estudiante y Cerro de los Tepehuanos (Consultaría Forestal "Roberto Trujillo", 2000).

Las topoformas existentes son mesetas, cañadas y montañas con pendientes desde zenitales hasta acantilados de 90°, aunque predominan laderas con inclinaciones cuya pendiente oscila entre los 17° y los 36°. Las exposiciones Noreste, suroeste y Noroeste son las que se presentan con mayor frecuencia, combinándose con todos los grados de pendiente (Consultaría Forestal "Roberto Trujillo", 2000).

4.1.5. Geología y Suelos

El asiento geológico del área data del periodo cenozoico medio. Los tipos de rocas existentes son ígneas extrusivas ácidas, aunque existen afloramientos de basaltos y rocas calcáreas. De acuerdo a la clasificación FAO-UNESCO adaptada para México por la DETENAL, los suelos presentes en el área se identifican como Cambisol Eútrico, Regosol Eútrico, Feozem Háplico y Litosol, todos de textura media. Existen superficies ocupadas por afloramientos

rocosos, siendo generalmente tobas riolíticas en bloques mayores de 8 m³ sobre todo con cauces y márgenes de arroyos perennes (Consultaría Forestal “Roberto Trujillo”, 2000).

4.1.6. Vegetación

Las asociaciones vegetales comprenden diferentes especies de coníferas y latifoliadas, predominando los géneros *Pinus* y *Quercus*. En el género *Pinus* se encuentra representado por las siguientes especies en orden de importancia: *Pinus durangensis*, *Pinus leiophylla*, *Pinus cooperi*, *Pinus engelmannii*, *Pinus ayacahuite*, *Pinus teocote*, *Pinus arizonica*, *Pinus chihuahuana* y *Pinus lumholtzii*. Del género *Quercus* se presentan las siguientes especies: *Quercus grisea*, *Quercus arizonica*, *Quercus crassifolia*, y *Quercus rubiaceae* entre otras. También encontramos especies como *Juniperus spp* y *Arbutus spp*. (Consultaría Forestal “Roberto Trujillo”, 2000).

4.2. Metodología

Para cumplir con los objetivos planteados, el estudio se dividió en los siguientes temas: Toma de datos, Funciones de crecimiento, Funciones de volumen, Funciones de índice de sitio, Funciones de densidad y Predicción explícita del rendimiento.

4.2.1. Toma de datos

Para obtener la información necesaria y cumplir con los objetivos, se derribaron 47 árboles de *Pinus durangensis* Mtz., a estos se les realizó análisis troncal.

El arbolado seleccionado para ser derribado, se eligió de acuerdo a lo siguiente: ser de clase dominante en altura, no presentar bifurcaciones, estar

sano, libre de defectos, libre de daños mecánicos y que representaran las diferentes calidades de sitio.

Midiéndose las siguientes variables:

- ◆ *No. de control*
- ◆ *Especie*
- ◆ *Diámetro normal (1.3 m)*
- ◆ *Grosor de corteza*
- ◆ *Altura total*
- ◆ *Altura de fuste limpio*
- ◆ *Diámetro de copa*
- ◆ *Vigor*
- ◆ *Clase (dominante o codominante)*

El análisis troncal se realizó siguiendo la metodología de Klepac (1983), realizando las siguientes mediciones:

- ◆ *No. de árbol*
- ◆ *Diámetro del árbol*
- ◆ *Grosor de corteza*
- ◆ *Control por rodaja*
- ◆ *Control de sección*
- ◆ *No. de anillos por rodaja*
- ◆ *Longitud de las secciones*
- ◆ *Edad de cada sección*
- ◆ *Edad total del árbol*
- ◆ *Diámetro sin corteza en cada rodaja a diferentes edades, utilizando decenios*
- ◆ *Edad a la altura inicial de 30cm.*

La cubicación hecha a las secciones del fuste del árbol se ejemplifica en el Cuadro 5:

Cuadro 5. Ecuaciones utilizadas en la cubicación de los fustes de los árboles derribados.

Fuste	Tipo dendrometrico	Formula
Punta	Paraboloide apolónico	$V = \frac{A_0 L}{2}$
Secciones	Truncado de paraboloide apolónico o formula de Smalian	$V = \left(\frac{A_0 + A_1}{2} \right) L$
Tocón	Cilindro o Formula de Huber	$V = \frac{A_m L}{2}$

Fuente: Romanh, 1994.

Donde: V = Volumen (m³); A₀ = Área de la sección menor (m²); A₁ = Área de la sección mayor (m²); A_m = Área de la sección media (m²); L = Longitud (m).

Para la determinación de los índices de sitio, se utilizaron las mediciones hechas en el análisis troncal, apoyados con datos de inventario recabados por la Consultaría Forestal "Roberto Trujillo".

En la construcción de los índices de densidad se realizaron mediciones en 62 sitios cuadrados de 25 m² de masas puras y coetáneas en diferentes calidades de sitio de *Pinus durangensis* Mtz., a una densidad donde el espacio de crecimiento es ocupado en forma efectiva para el buen desarrollo del arbolado existente, se supuso que esto ocurre cuando las copas de los árboles se aproximan unas a otras y la mortalidad aun no se manifiesta (se denominó en este trabajo a esta densidad, densidad normal), se buscó que estas condiciones prevalecieran en la muestra abarcando dentro de lo posible las diferentes categorías diamétricas.

Cabe mencionar que al manejar sitios de 25 m², se incurre en una sobrestimación en el número de árboles por hectárea en las categorías diamétricas mayores, de tal manera que estos podrán representar una densidad similar a la completa tendiendo a máxima, lo cual en términos objetivos resulta imposible definir de manera unívoca, pero en la práctica puede ser al menos una referencia para fincar el análisis que se hace.

En estos sitios se tomaron las siguientes variables:

- | | |
|--------------------------|----------------------------------|
| ◆ <i>No. de sitio</i> | ◆ <i>Altura total</i> |
| ◆ <i>Especie</i> | ◆ <i>Grosor de corteza</i> |
| ◆ <i>No. de árboles</i> | ◆ <i>Edad promedio del sitio</i> |
| ◆ <i>Diámetro normal</i> | ◆ <i>Densidad</i> |

La base de datos recabada en su totalidad, fue capturada en el programa EXCEL de Office XP, para su análisis y posterior aplicación.

4.2.2. Funciones de Crecimiento

Con la finalidad de obtener las curvas de crecimiento y sus respectivas curvas de incremento corriente anual (ICA) e incremento medio anual (IMA), se probó a la base de datos los siguientes tres modelos o ecuaciones no lineales: Schumacher (Ecuación 1), Chapman-Richards (Ecuación 2) y la Función Weibull (Ecuación 3).

$$y = \beta_0 e^{\left(-\beta_1 \frac{1}{E}\right)} \dots\dots\dots(1)$$

$$y = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 E}\right)^{\beta_2} \dots\dots\dots(2)$$

$$y = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 E^{\beta_2}}\right) \dots\dots\dots(3)$$

Donde:

y = Variables dependientes: altura (m) y diámetro (cm)

E = Edad (años)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados

Estos modelos no lineales se ajustaron mediante el Paquete Statistical Analysis System (SAS), utilizando el procedimiento NLIN, que comprende el método DUD, el cual no usa derivadas y se basa en el método del descenso de la mayor pendiente, con este se obtuvieron los valores preliminares de los parámetros, que posteriormente fueron usados al emplear los métodos GAUSS, NEWTON y MARQUARDT, que implica el uso de las derivadas parciales con respecto a cada uno de los parámetros para encontrar los mejores estimadores (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

De acuerdo con Martínez y Castillo (1987), el método MARQUARDT, combina tanto el método DUD, GAUSS y NEWTON, obteniendo de una manera mas rápida y precisa, los parámetros de la ecuación.

La selección de las mejores ecuaciones se hizo con base a la Suma de Cuadrados del Error (SCE), a la bondad de ajuste del Cuadrado Medio del Error (CME), el valor y probabilidad de Fc, los estadísticos R^2 y Pseudo R^2 , intervalos de confianza de los estimadores, coeficiente de variación y un análisis gráfico de la distribución de los residuales (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

La ecuación que genera la curva de crecimiento, es la función integral, de tal manera que para generar la curva del incremento corriente anual (ICA), esta se obtiene por cálculo diferencial, tomando la primera derivada de las funciones originales con respecto a la edad (Cuadro 6).

Para generar la curva del incremento medio anual (IMA), se dividió la ecuación integral entre la edad.

Cuadro 6. Ecuaciones de Incremento Corriente Anual e Incremento Medio Anual.

Modelo	Función	Incremento corriente anual (ICA)	Incremento corriente medio anual (IMA)
Schumacher	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 \left(\frac{1}{t}\right)}$	$ICA = \frac{\beta_1}{t^2} y$	$IMA = \frac{y}{t}$
Chapman-Richards	$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2}$	$ICA = \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 - e^{-\beta_1 t})} y$	$IMA = \frac{y}{t}$
Weibull	$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t^{\beta_2}})$	$ICA = \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2 - 1} (\beta_0 - y)$	$IMA = \frac{y}{t}$

Fuente: Ayerde, 1996.

Donde: y = Función integral; ICA = Incremento Corriente Anual; IMA= Incremento Medio Anual; t = Edad (años); $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ =Parámetros de regresión.

El punto de culminación del ICA, se obtuvo tomando la segunda derivada de la función original con respecto de la edad, o bien, obteniendo la primera derivada de la función del incremento corriente anual con respecto a la edad, igualando respectivamente a cero y despejando la edad (Cuadro 7).

El punto de culminación del IMA, se obtuvo tomando la primera derivada de la función del IMA con respecto de la edad, igualando a cero y despejando la edad.

Finalmente para la elaboración y presentación de las gráficas finales, se utilizó el programa EXCEL de OFFICE XP.

Cuadro 7. Ecuaciones para obtener el punto de culminación del Incremento Corriente Anual e Incremento Medio Anual.

MODELO	Culminación del Incremento Corriente Anual (ICA)	Culminación del Incremento Medio Anual (IMA)
Schumacher	$PCICA = \frac{\beta_1}{2}$	$PCIMA = \beta_1$
Chapman-Richards	$PCICA = \frac{\ln(\beta_2)}{\beta_1}$	$\frac{e^{\beta_1 PCIMA}}{\beta_1 PCIMA} = \beta_2$, donde: $PCIMA > PCICA$
Función Weibull	$PCICA = \left(\frac{\beta_2 - 1}{\beta_1 \beta_2} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$	$PCIMA > PCICA$, tal que: $e^{(\beta_1 PCIMA)} = 1 + \beta_1 \beta_2 PCIMA^{\beta_2}$

Fuente: Ayerde, 1996.

Donde: $PCICA$ = Punto de culminación del Incremento Corriente Anual; $PCIMA$ = Punto de culminación del Incremento Medio Anual; e = Exponente natural; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros de regresión.

4.2.3. Funciones de Volumen

Con la utilización de técnicas de regresión lineal simple, múltiple y no lineal, se procedió a ajustar a la base de datos los siguientes modelos lineales y no lineales:

Modelos lineales (Clutter *et al.*, 1983; Romahn *et al.*, 1994; Prodan *et al.*, 1997):

Coeficiente de Forma Constante:

$$V = \beta_0 D^2 H$$

Variable Combinada:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D^2 H$$

Variable Combinada Generalizada:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D^2 + \beta_2 H + \beta_3 D^2 H$$

Australiana de Stoat:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D^2 + \beta_2 D^3 + \beta_3 H + \beta_4 (1/H)$$

Meyer Modificada:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_2 DH + \beta_3 D^2 H$$

Comprensible:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_2 DH + \beta_3 D^2 + \beta_4 H + \beta_5 D^2 H$$

Naslund:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D^2 + \beta_2 D^2 H + \beta_3 H^2 + \beta_4 DH^2$$

Modelos no lineales (Clutter *et al.*, 1983; Romahn, 1994; Prodan *et al.*, 1997):

Schumacher o logarítmica sin intercepto:

$$V = \beta_0 D^{\beta_1} H^{\beta_2}$$

Logarítmica con intercepto:

$$V = \beta_0 + \beta_1 D^{\beta_2} H^{\beta_3}$$

De la Variable Combinada:

$$V = \beta_0 (D^2 H)^{\beta_1}$$

Variable Transformada de Honer:

$$V = D^2 / (\beta_0 + \beta_1 (1/H))$$

Berkhout:

$$V = \beta_0 D^{\beta_1}$$

Dwight:

$$V = \beta_0 D^{\beta_1} H(3 - \beta_1)$$

Korsun:

$$V = \beta_0 (D + 1)^{\beta_1} H^{\beta_2}$$

Takata:

$$V = D^2 H / (\beta_0 + \beta_1 D)$$

Thornber:

$$V = \beta_0 (H/D)^{\beta_1} D^2 H$$

Wenk:

$$V = g (H^2 / (\beta_0 D^{1/2}) + \beta_1 D^{1/2})$$

Donde:

V = Volumen (m^3)

D = Diámetro normal (m)

H = Altura (m)

g = Área basal (m^2)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ = Parámetros a ser estimados

Las ecuaciones se ajustaron con paquete Statistical Analysis System (SAS), utilizando los siguientes procedimientos, REG o GLM para regresiones lineales, con la opción R e INFLUENCE, para detectar datos atípicos, NOINT para regresiones sin interceptada; COLLIN, COLLINOINT, VIF y TOL para detectar la multicolinealidad en las variables predictoras y el PLOT, para graficar los residuales con los valores predichos, esto para confirmar los supuestos del modelo, es decir, que los errores no estén correlacionados, se

distribuyan normalmente y con varianza uniforme (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

Al realizar un ajuste preliminar en el paquete Statistical Analysis System (SAS), en la opción R e INFLUENCE, en las distintas funciones se procedió a determinar que valores deberían ser excluidos del análisis, los indicadores en esta opción fueron los siguientes: HAT DIAG (Matriz Diagonal), RSTUDENT (Residuales estudentizados), COVRATIO, DFFITS, DFBETAS y D de COOK'S (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

Los modelos no lineales se ajustaron con el procedimiento NLIN, utilizando los siguientes métodos interactivos para encontrar los mejores estimadores DUD, GAUSS, NEWTON y MARQUARDT (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

La selección de los mejores ecuaciones se hizo con base a la Suma de Cuadrados del Error (SCE), a la bondad de ajuste del Cuadrado Medio del Error (CME), al valor y probabilidad de F_c , los estadísticos R^2 y Pseudo R^2 , al valor y probabilidad de t de Student, Intervalos de Confianza de los Estimadores, Coeficiente de Variación (CV) y un análisis gráfico de la distribución de los residuales, según fuera el caso (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

Finalmente una vez seleccionado el mejor modelo, se generó la tabla de volumen, utilizando para su elaboración y presentación el programa EXCEL de Office XP.

Cabe mencionar que los procedimientos mencionados para determinar y mejorar el ajuste, dependiendo de la situación fueron utilizados en los puntos a ver mas adelante.

4.2.4. Funciones de índice de sitio

Para generar la familia de curvas de índice de sitio, se utilizaron dos procedimientos: el método de la curva guía y método de la diferencia algebraica:

4.2.4.1. Método de la curva guía

Con este método se generaron curvas de índice de sitio de tipo anamórficas y polimórficas.

Esta técnica consistió en ajustar en forma analítica los modelos matemáticos de Schumacher, Chapman – Richards y la Weibull, esto con la finalidad de obtener una curva promedio o curva guía en la relación altura dominante–edad, a partir de la cual se trazan curvas guía, las cuales representan los diferentes índices de sitio, a una edad base determinada (Cuadro 8).

Cuadro 8. Modelos de crecimiento en altura dominante-edad y ecuación de índice de sitio por el método de la curva guía.

Ecuación	Ecuación de crecimiento	Ecuación de Índice de sitio
Schumacher	$H = \beta_0 e^{-\beta_1 \left(\frac{1}{E}\right)}$	$IS = \beta_0 e^{-\beta_1 \left(\frac{1}{EB}\right)}$
Chapman-Richards	$H = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 E}\right)^{\beta_2}$	$IS = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 EB}\right)^{\beta_2}$
Función Weibull	$H = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 E^{\beta_2}}\right)$	$IS = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 EB^{\beta_2}}\right)$

Fuente: García, 1998.

Donde: H= Altura dominante (m); E = Edad (años); IS = Índice de sitio (m); EB= Edad base (años); e = Base de logaritmo natural; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados.

La edad base utilizada será aquella, donde los árboles alcancen un diámetro comercial con corteza de 25 a 30 cm.

Posteriormente para construir las familias de curvas se despejan los parámetros de valor asintótico o de forma.

Para generar las curvas anamórficas, de la ecuación del índice de sitio se despeja el parámetro asintótico (β_0) y su expresión se sustituye en la ecuación original, con lo que el valor asintótico se considera implícito y el o los parámetros de forma son comunes para todos los sitios (Cuadro 9).

Cuadro 9. Ecuaciones para generar la familia de curvas anamórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la curva guía.

Ecuación	Para generar la familia de curvas anamórficas	Para la calificación del Índice de sitio
Schumacher	$H = IS e^{\beta_1 \left(\frac{1}{EB} - \frac{1}{E} \right)}$	$IS = H e^{-\beta_1 \left(\frac{1}{EB} - \frac{1}{E} \right)}$
Chapman-Richards	$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 E}}{1 - e^{-\beta_1 EB}} \right)^{\beta_2}$	$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 EB}}{1 - e^{-\beta_1 E}} \right)^{\beta_2}$
Función Weibull	$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 E^{\beta_2}}}{1 - e^{-\beta_1 EB^{\beta_2}}} \right)$	$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 EB^{\beta_2}}}{1 - e^{-\beta_1 E^{\beta_2}}} \right)$

Fuente: García, 1998.

Donde: H= Altura dominante (m); E = Edad (años); IS = Índice de sitio (m); EB= Edad base (años); e = Base de logaritmo natural; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados.

A diferencia de las curvas anamórficas, en donde para generar las familias de curvas se considera implícita la asíntota, en la familia de curvas polimórficas, se despeja algunos de los β 's de los exponentes y se obtienen las ecuaciones que adoptan las familias de curvas. En este caso se consideró al parámetro β_1 , para el modelo de Schumacher y la Weibull y al parámetro β_2 , para el modelo de Chapman-Richards (Cuadro 10).

4.2.4.2. Método de la diferencia algebraica

Al igual que el anterior, este método genera curvas de índice de sitio de tipo anamórficas o polimórficas. El paso inicial en el desarrollo de este método, consistió en desarrollar en una forma de diferencia algebraica las ecuaciones de Schumacher, Chapman–Richards y la Weibull, para la altura dominante - edad.

Cuadro 10. Ecuaciones para generar la familia de curvas polimórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la curva guía.

Ecuación	Para generar la familia de curvas polimórficas	Para la calificación del índice de sitio
Schumacher	$H = \beta_0 \left(\frac{IS}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{EB}{E} \right)}$	$H = \beta_0 \left(\frac{H}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{E}{EB} \right)}$
Chapman-Richards	$H = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 E} \right)^{\left(\frac{\ln \left(\frac{IS}{\beta_0} \right)}{\ln \left(1 - e^{-\beta_1 EB} \right)} \right)}$	$IS = \beta_0 \left(1 - e^{-\beta_1 EB} \right)^{\left(\frac{\ln \left(\frac{H}{\beta_0} \right)}{\ln \left(1 - e^{-\beta_1 E} \right)} \right)}$
Función Weibull	$H = \beta_0 \left(1 - e^{\left(\frac{E}{EB} \right)^{\beta_2} \ln \left(1 - \frac{IS}{\beta_0} \right)} \right)$	$IS = \beta_0 \left(1 - e^{-\left(\frac{EB}{E} \right)^{\beta_2} \ln \left(1 - \frac{H}{\beta_0} \right)} \right)$

Fuente: Garcia, 1998.

Donde: H= Altura dominante (m); E = Edad (años); IS = Índice de sitio (m); EB= Edad base (años); e = Base de logaritmo natural; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados.

Para generar el tipo de familia de curvas (anamórficas o polimórficas), se identifica el parámetro que las origina, se resuelve dicha ecuación con respecto a ese parámetro, resolviendo para dos mediciones consecutivas de pares de datos altura dominante (H1 y H2) y edad (E1 y E2), igualamos ambas ecuaciones y resolvemos en términos de la segunda medición (H2), la cual es ajustada a la base de datos (Cuadro 11).

La edad base utilizada será aquella, donde los árboles alcancen un diámetro comercial con corteza de 25 a 30 cm.

Cuadro 11. Ecuaciones de ajuste por el método de la diferencia algebraica, para obtener curvas anamórficas y polimórficas.

Ecuación	Ecuación de ajuste para las curvas anamórficas	Ecuación de ajuste para las curvas polimórficas
Schumacher	$H2 = H1 e^{\beta_1 \left(\frac{1}{E1} - \frac{1}{E2} \right)}$	$H2 = \beta_0 \left(\frac{H1}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{E1}{E2} \right)}$
Chapman-Richards	$H2 = H1 \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 E2}}{1 - e^{-\beta_1 E1}} \right)^{\beta_2}$	$H2 = \beta_0 \left(\frac{H1}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-\beta_1 E2})}{\ln(1 - e^{-\beta_1 E1})} \right)}$
Función Weibull	$H2 = H1 \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 E2^{\beta_2}}}{1 - e^{-\beta_1 E1^{\beta_2}}} \right)$	$H2 = \beta_0 \left(1 - \left(1 - \frac{H1}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{E2}{E1} \right)^{\beta_2}} \right)$

Fuente: García, 1998.

Donde: H2= Altura dominante a la edad 2 (años); H1= Altura dominante a la edad 1 (años);

E2 = Edad 2 (años); E1 = Edad 1 (años); e = Base de logaritmo natural; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados.

El parámetro que origina las curvas anamórficas es el β_0 , para los tres modelos de crecimiento, en cambio para generar las curvas polimórficas se considero al parámetro β_1 , para el modelo de Schumacher y la Weibull y al parámetro β_2 , para el modelo de Chapman-Richards (Cuadro 12 y 13).

Las ecuaciones utilizadas en cada método, se ajustaron con el Paquete Statistical Analysis System (SAS), utilizando el procedimiento NLIN, que comprende el método DUD, el cual no usa derivadas, con este se obtuvieron los valores preliminares de los parámetros, que posteriormente fueron usados al emplear el método MARQUARDT (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

Cuadro 12. Ecuaciones para generar la familia de curvas anamórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la diferencia algebraica.

Ecuación	Para generar la familia de curvas anamórficas	Para la calificación del índice de sitio
Schumacher	$H = IS e^{\beta_1 \left(\frac{1}{EB} - \frac{1}{E} \right)}$	$IS = H e^{\beta_1 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{EB} \right)}$
Chapman-Richards	$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 E}}{1 - e^{-\beta_1 EB}} \right)^{\beta_2}$	$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 EB}}{1 - e^{-\beta_1 E}} \right)^{\beta_2}$
Función Weibull	$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 E^{\beta_2}}}{1 - e^{-\beta_1 EB^{\beta_2}}} \right)$	$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_1 EB^{\beta_2}}}{1 - e^{-\beta_1 E^{\beta_2}}} \right)$

Fuente: García, 1998.

Donde: H= Altura dominante (años); IS = Índice de sitio (años); E= Edad (años); EB = Edad base (años); e = Base de logaritmo natural; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados.

Cuadro 13. Ecuaciones para generar la familia de curvas polimórficas y para calificar su índice de sitio, con el método de la diferencia algebraica.

Ecuación	Para generar la familia de curvas polimórficas	Para la calificación del índice de sitio
Schumacher	$H = \beta_0 \left(\frac{IS}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{EB}{E} \right)}$	$IS = \beta_0 \left(\frac{H}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{E}{EB} \right)}$
Chapman-Richards	$H = \beta_0 \left(\frac{IS}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-\beta_1 E})}{\ln(1 - e^{-\beta_1 EB})} \right)}$	$IS = \beta_0 \left(\frac{H}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-\beta_1 EB})}{\ln(1 - e^{-\beta_1 E})} \right)}$
Función Weibull	$H = \beta_0 \left(1 - \left(1 - \frac{IS}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{EB}{E} \right)^{\beta_2}} \right)$	$IS = \beta_0 \left(1 - \left(1 - \frac{H}{\beta_0} \right)^{\left(\frac{E}{EB} \right)^{\beta_2}} \right)$

Fuente: García, 1998.

Donde: H= Altura dominante (años); IS = Índice de sitio (años); E = Edad (años); EB = Edad base (años); e = Base de logaritmo natural; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados.

Para la elaboración y presentación de las gráficas finales, se utilizó el programa EXCEL de Office XP.

4.2.5. Funciones de densidad

Mediante técnicas de regresión lineal y no lineal, se procedió a ajustar las ecuaciones para el Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR) y la Relación Área-Arbol (RAA).

4.2.5.1. Índice de Densidad de Rodales de Reineke

Una vez hecha la captura de datos del número de árboles por hectárea, y el diámetro cuadrático medio de los 52 sitios que representan la densidad normal que será utilizada como norma. Se procedió a estimar la línea de referencia y ubicar el diámetro de referencia (25.4 cm), ajustando la siguiente ecuación a la base de datos (Clutter, *et al.*, 1983):

$$N = \beta_0 Dc^{\beta_1}$$

$$\ln N = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln Dc$$

Donde:

N = No. de árboles por hectárea

Dc = Diámetro cuadrático medio con corteza (cm)

$\ln$ =logaritmo natural

β_0, β_1 = Parámetros a ser estimados

La ecuación se ajustó con el paquete Statistical Analysis System (SAS), utilizando los siguientes procedimientos, REG o GLM para regresión lineal, con la opción R e INFLUENCE, para detectar datos atípicos y el PLOT, para graficar los residuales con los valores predichos, esto para confirmar los

supuestos del modelo, es decir, que los errores no estén correlacionados, se distribuyan normalmente y con varianza uniforme (Draper et al., 1981, Martínez, 1982, Infante y Zarate, 1996).

Posteriormente se graficaron Índices de Densidad de Rodales de Reineke, utilizando las siguientes dos ecuaciones (Husch *et al.*, 1972; citado por Zepeda, 1984):

$$IDRR = N (D_{cr}/D_c)^{\beta_1}$$

$$N = IDRR (D_c/D_{cr})^{\beta_1}$$

Donde:

$IDRR$ = Índices de Densidad de Rodales de Reineke

N = No. de árboles por hectárea

D_c = Diámetro cuadrático medio con corteza (cm)

D_{cr} = Diámetro cuadrático de referencia (cm)

β_1 = Parámetro estimado

Finalmente para la elaboración y presentación de las gráficas finales, se utilizó el programa EXCEL de Office XP.

4.2.5.2. Relación área-árbol

Una vez realizada la estimación del número de árboles, suma de diámetros y suma de diámetros cuadráticos a hectárea, a una densidad normal; se procedió a estimar los coeficientes de regresión muestral del modelo (Husch *et al.*, 1972; citado por Zepeda, 1984):

$$RAA = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2$$

Donde:

RAA = Relación área-árbol

d =diámetro con corteza (cm)

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = parámetros a ser estimados

Si se considera la función original para un número N de parcelas separadas e independientes, con un área constante como unidad, los coeficientes pueden estimarse con el método de mínimos cuadrados. Para cumplir con la condición de minimización de la suma de cuadrados de los residuales, se trabajaron las siguientes ecuaciones normales (Chisman y Schumacher, 1940; citado por Zepeda, 1984)):

$$\beta_0 \sum_{i=1}^N X_0^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^N X_0 \cdot X_1 + \beta_2 \sum_{i=1}^N X_0 \cdot X_2 = \sum_{i=1}^N X_0^3$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^N X_0 \cdot X_1 + \beta_1 \sum_{i=1}^N X_1^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^N X_1 \cdot X_2 = \sum_{i=1}^N X_0 \cdot X_1^2$$

$$\beta_0 \sum_{i=1}^N X_0 \cdot X_2 + \beta_1 \sum_{i=1}^N X_1 \cdot X_2 + \beta_2 \sum_{i=1}^N X_2^2 = \sum_{i=1}^N X_0 \cdot X_2^2$$

Donde:

N = Número de parcelas independientes con un área constante

X_0 = Número de árboles por unidad de área considerada

X_1 = Suma de diámetros por unidad de área

X_2 = Suma de diámetros cuadráticos por unidad de área

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados

Utilizando el paquete Statistical Analysis System (SAS), las ecuaciones se ajustaron, mediante el procedimiento IML, que trabaja notación matricial y se obtuvieron los mejores estimadores.

Finalmente para la elaboración y presentación de las gráficas finales, se utilizó el programa EXCEL de office XP.

4.2.6. Predicción del rendimiento usando modelos de totalidad del rodal o de predicción explícita

El presente trabajo involucra únicamente la predicción explícita, ya que la base de datos con la que se trabaja no cuenta con la información suficiente para realizar la predicción implícita.

Cabe señalar que Acosta (1991), menciona que en la predicción implícita, se incurre en más errores de estimación al hacer las predicciones, debido a que a través de todo el procedimiento que se realiza los errores de estimación se van acumulando. Además que desde el punto de vista práctico y de confiabilidad, es preferible usar los modelos de predicción explícita del rodal que los de distribuciones diamétricas.

4.2.6.1. Rendimiento actual

Para la predicción del rendimiento actual se usó la fórmula básica del modelo de Schumacher (Clutter *et al.*, 1983):

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2(1/E) + \beta_3 f(Is) + \beta_4 f(ID)$$

Donde:

V = Volumen sin corteza por hectárea (m^3)

E = Edad promedio del rodal (años)

$f(Is)$ = Función de Índice de sitio (años)

$f(ID)$ = Función de densidad del rodal

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ = Parámetros a ser estimados

Las ecuaciones basadas en el modelo de Schumacher (Clutter *et al.*, 1983), que fueron ajustadas son:

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (Is) + \beta_4 (IDRR) \dots\dots\dots(4)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 \ln (Is) + \beta_4 (IDRR) \dots\dots\dots(5)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (1/Is) + \beta_4 \ln (A) \dots\dots\dots(6)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (Is) + \beta_4 \ln (A) \dots\dots\dots(7)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 \ln (Is) + \beta_4 \ln (A) \dots\dots\dots(8)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (Is) + \beta_4 \ln (N) + \beta_5 (1/Is) (IDRR) \dots\dots\dots(9)$$

Donde:

V = Volumen sin corteza por hectárea (m^3)

E = Edad promedio del rodal (años)

Is = Índice de sitio (m); a una edad base de 68 años

A = Área basal con corteza por hectárea (m^2)

N = Número de árboles por hectárea

$IDRR$ = Índice de Densidad de Rodales de Reineke

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ = Parámetros a ser estimados

La base de datos obtenida de 62 sitios, se ajustó a las ecuaciones ya mencionadas, utilizando el paquete Statistical Analysis System (SAS), mediante el procedimiento **REG**, por Mínimos Cuadrados, seleccionando el modelo que mejor ajuste obtuvo.

4.2.6.2. Rendimiento futuro

Al contar únicamente con datos de sitios de una sola medición, no fue posible realizar la predicción del cambio de la densidad a través del tiempo, buscando entonces realizar la predicción futura del rendimiento actual, se utilizó la ecuación de Bennett (1970), citado por Clutter *et al.*, (1983), la cual predice la densidad futura mediante:

$$\ln A_2 = \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \ln A_1 + 5.1649 \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$$

Donde:

A_2 = Área basal predicha a la edad proyectada

E_1 = Edad actual

A_1 = Área basal a la edad actual

E_2 = Edad proyectada

De esta manera tomando la ecuación ajustada del rendimiento actual, sustituimos en ella la predicción de la densidad hecha de la ecuación de Bennett y obtenemos el rendimiento futuro.

5. RESULTADOS

Cumpliendo con los objetivos planteados se obtuvieron los siguientes resultados:

5.1. Características dasométricas de masas puras y coetáneas de *Pinus durangensis* Mtz., creciendo de manera natural.

En el Cuadro 14, se presenta parte de la información obtenida de 15 sitios de muestreo de *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México y que fueron utilizados en esta investigación, cubriendo un rango de edades de 13 a 115 años.

Cuadro 14. Características dasométricas de sitios de muestreo de masas coetáneas de *Pinus durangensis* Mtz., creciendo de manera natural.

S*	EP	N	DNCC	DC	AP	ABCC	VTSC
1	115	1200	0.335	0.336	22	105.580	1133.47
2	100	1200	0.338	0.34	21	107.736	1117.20
3	80	1600	0.302	0.312	20	114.610	1107.70
4	68	1600	0.27	0.271	18	91.609	796.304
5	57	2800	0.237	0.24	16	123.522	941.693
6	55	1600	0.24	0.243	16	72.382	565.906
7	50	1400	0.241	0.242	18	63.863	561.573
8	47	2000	0.21	0.21	16	69.272	552.079
9	43	1800	0.2	0.205	16	56.549	431.503
10	40	2400	0.176	0.179	13	58.388	371.931
11	30	2400	0.15	0.163	11	42.412	225.163
12	28	2400	0.14	0.145	10	36.945	181.966
13	25	2800	0.1	0.102	8	21.991	87.910
14	20	3200	0.085	0.087	6.9	18.158	63.524
15	13	4800	0.04	0.041	4.5	6.032	16.883

*Con fines de comparación, las variables fueron extrapoladas a una hectárea.

* Sitios con densidad normal.

Donde: S = No. de sitio; EP = Edad promedio (años); N = No. de árboles por hectárea; DNCC = Diámetro promedio con corteza (m); DC = Diámetro cuadrático (m); AP = Altura promedio (m); ABCC = Área basal con corteza (m²); VTSC = Volumen total sin corteza (m³).

5.1.1. Análisis troncal

El análisis troncal se realizó a 47 árboles de *Pinus durangensis* MTZ., siguiendo la metodología de Klepac (1983), se presenta el ejemplo de uno de los árboles estudiados en la Figura 2.

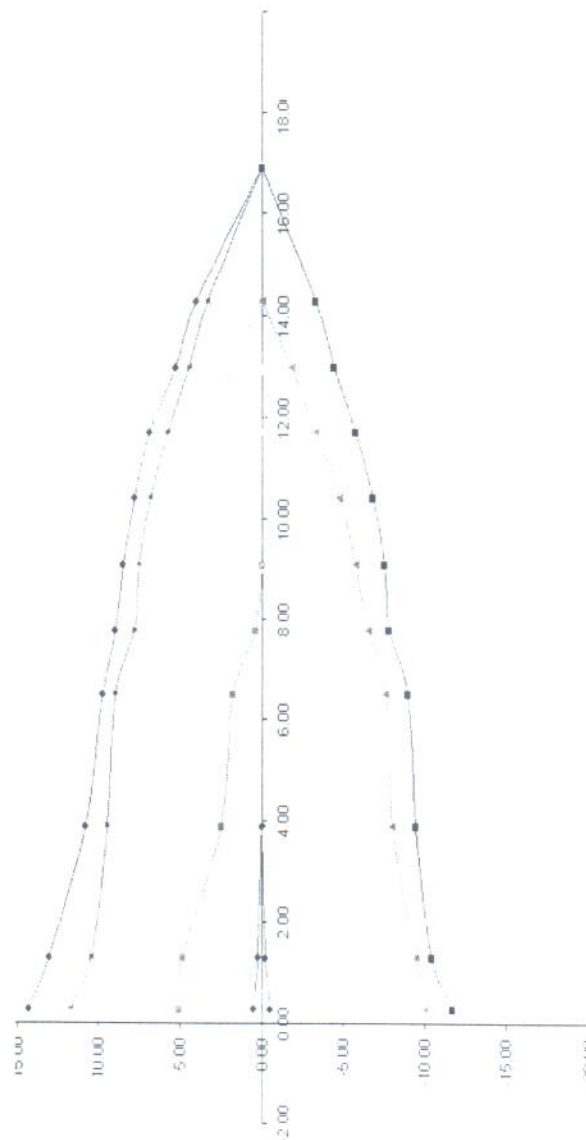


Figura 2. Árbol tomado de de *Pinus durangensis* Mtz., reconstruido a diferentes edades a partir del análisis troncal.

5.2. Funciones de crecimiento

Con el uso de técnicas de regresión no lineal, se ajustó a la base de datos los modelos de Schumacher, Chapman-Richards y Weibull, utilizando para ello el paquete Statistical Analysis System (SAS) y empleando el procedimiento NLIN.

Con el fin de cubrir el rango de edades, en diámetro normal y altura, se tomó la información resultante del análisis troncal realizado. De esta base de datos se eliminaron los datos que debido a su comportamiento fueran atípicos, y que influirían en la falta de ajuste de las ecuaciones.

De los modelos probados, el análisis estadístico da evidencia de que para la altura total, el mejor modelo resultó ser el de Chapman-Richards y para el diámetro normal el de Schumacher, de acuerdo a los criterios de bondad de ajuste (Suma de Cuadrados del Error, Cuadrado Medio del Error, la Pseudo R², Intervalos de confianza de los estimadores), además del análisis gráfico de residuales contra los valores predichos (Cuadro 15).

De las ecuaciones de crecimiento se obtuvieron las ecuaciones para generar las curvas de incremento medio anual y por derivación parcial las ecuaciones para el incremento corriente anual (figuras 3,4 y 5).

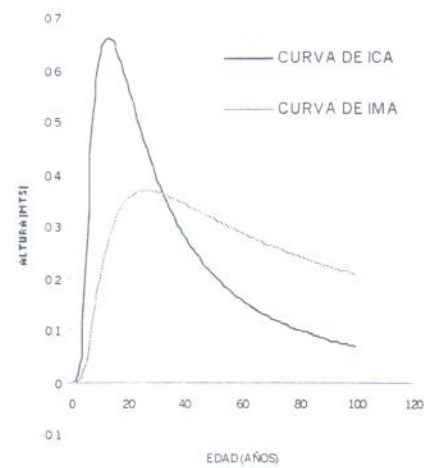
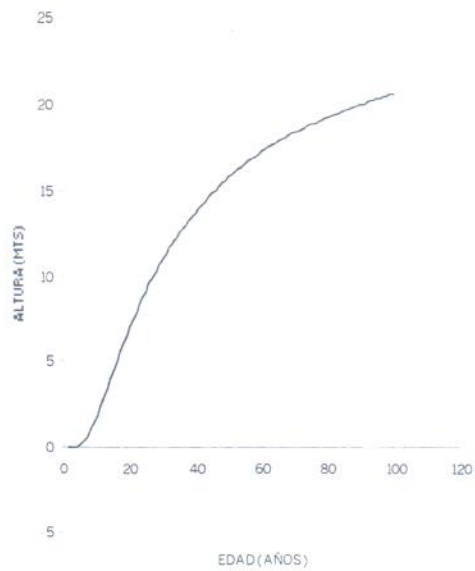
De acuerdo a lo anterior se puede observar que según el modelo de Schumacher el máximo ICA para altura total ocurre a la edad de 13 años y el máximo IMA y punto de intersección donde $ICA = IMA$ ocurre a la edad de 27 años, Figura 3 (a). Para el Diámetro normal la culminación de ICA ocurre a la edad de 17 años y el máximo IMA y punto de intersección donde $ICA = IMA$ ocurre a la edad de 35 años, Figura 4 (b).

Cuadro 15. Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir las curvas de crecimiento promedio e incrementos diferenciales en altura total (mts.) y diámetro normal (cms.) para *Pinus durangensis* Mts. en Durango, México.

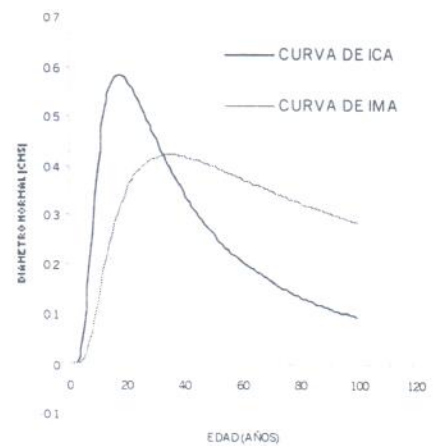
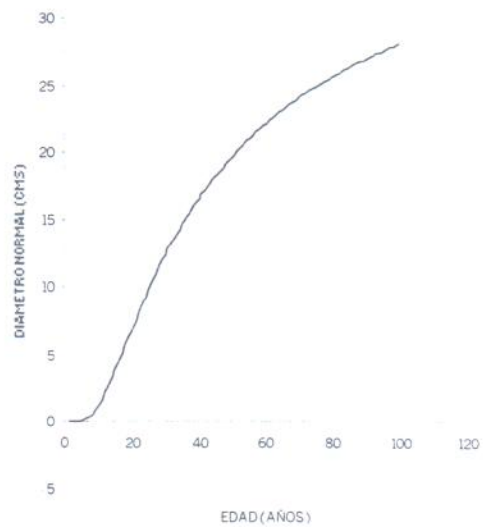
MODELO	VAR	SCE	CME	FC	R ²	PARÁMETRO	STD DEL ERROR ASINT.	LIMITES	
								INF. 95 %	SUP. 95 %
SCHUMACHER	ALT	1675.4	6.64	2889.79	0.96	$\beta_0 = 26.90$	0.8557	25.2189	28.589
						$\beta_1 = 26.87$	1.2569	24.4010	29.351
	DIA	4085.8	16.21	1819.54	0.93	$\beta_0 = 39.76$	1.7322	36.3582	43.181
						$\beta_1 = 34.79$	10.8669	31.1219	38.475
CHAPMAN- RICHARDS	ALT	1634.8	6.51	1968.64	0.96	$\beta_0 = 21.54$	1.1359	19.3065	23.780
						$\beta_1 = 0.033$	0.00536	0.0258	0.0468
						$\beta_2 = 1.730$	0.2174	1.3039	2.1601
	DIA	4111.6	16.38	1200.1	0.93	$\beta_0 = 29.91$	2.1742	25.6316	34.195
						$\beta_1 = 0.0346$	0.00608	0.0226	0.0465
						$\beta_2 = 2.048$	0.3277	1.4393	2.7303
WEIBULL	ALT	1640.5	6.53	1961.56	0.96	$\beta_0 = 20.71$	1.0483	18.6514	22.780
						$\beta_1 = 0.0058$	0.00163	0.00260	0.0090
						$\beta_2 = 1.4126$	0.0961	1.2233	1.601
	DIA	4150.3	16.53	1188.12	0.93	$\beta_0 = 28.6035$	2.0091	24.6467	32.560
						$\beta_1 = 0.0026$	0.00101	0.00065	0.0046
						$\beta_2 = 1.5612$	0.1268	1.3114	1.8110

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R² = Pseudo R²; ALT = altura; DIA = diámetro. $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros estimados de los modelos.

Con el modelo de Chapman – Richards, el máximo ICA para altura total ocurre a la edad de 15 años y el máximo IMA y punto de intersección donde ICA = IMA ocurre a la edad de 28 años Figura 4 (a). Para el Diámetro normal la culminación de ICA ocurre a la edad de 21 años y el máximo IMA y punto de intersección donde ICA = IMA ocurre a la edad de 38 años, Figura 4 (b).

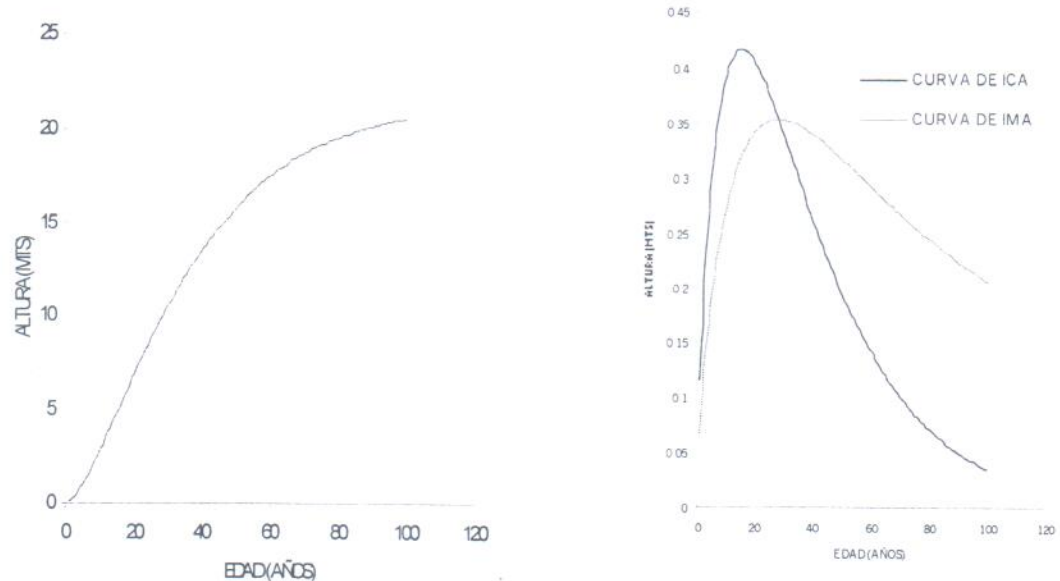


(a)

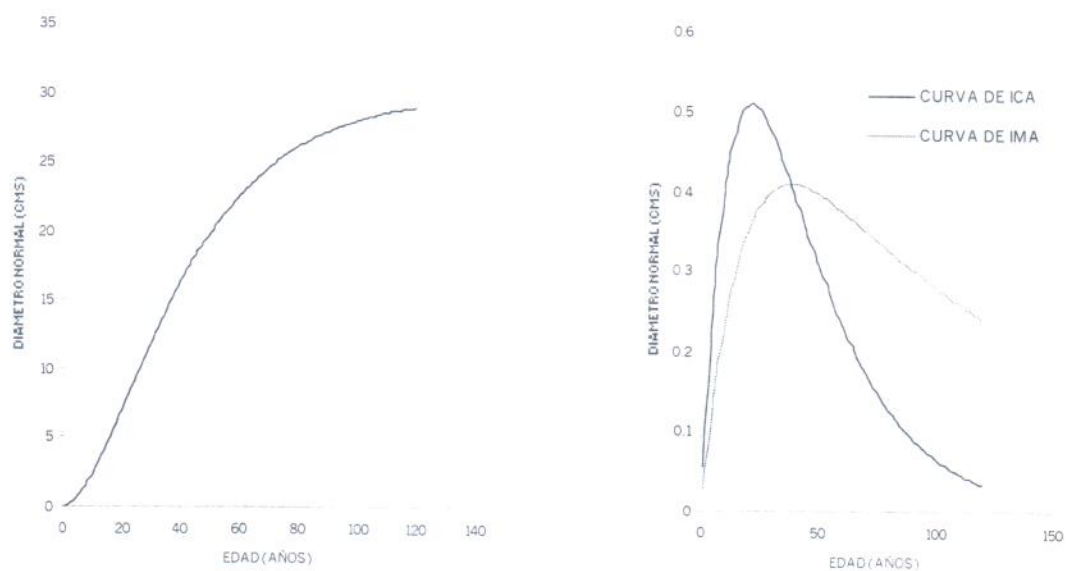


(b)

Figura 3. Patrones de crecimiento e incremento en altura total (a) y diámetro normal (b) de *Pinus durangensis* Mtz. hasta la edad de 100 años, empleando el modelo de Schumacher, en Durango, México.



(a)



(b)

Figura 4. Patrones de crecimiento e incremento en altura total (a) y diámetro normal (b) de *Pinus durangensis* Mtz. hasta la edad de 100 años, empleando el modelo de Chapman-Richards, en Durango, México.

En el modelo de Weibull, el máximo ICA para altura total ocurre a la edad de 16 años y el máximo IMA y punto de intersección donde $ICA = IMA$ ocurre a la edad de 23 años, Figura 5 (a). Para el Diámetro normal la culminación de ICA ocurre a la edad de 28 años y el máximo IMA y punto de intersección donde $ICA=IMA$ ocurre a la edad de 40 años, Figura 5 (b).

Con base a lo anterior, se determino la edad del turno técnico de 28 años para altura total y 35 años para diámetro normal, mismas edades que ocurren cuando culmina el IMA y es el punto de intersección donde $ICA = IMA$.

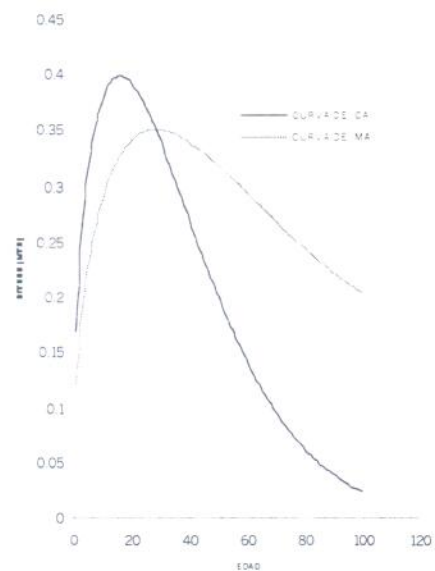
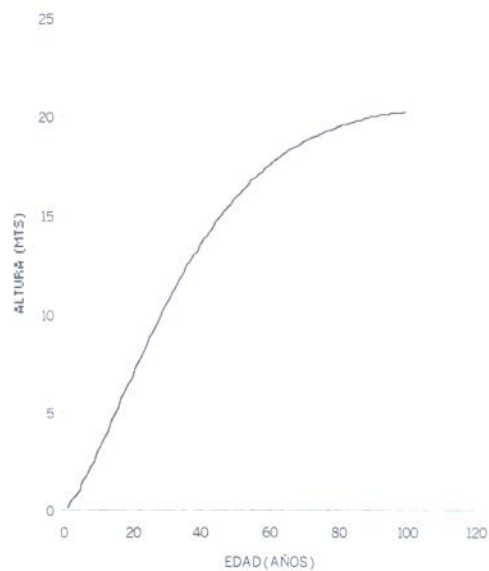
5.3. Funciones de Volumen

Con base en el uso de técnicas de regresión lineal simple, múltiple y no lineal, se ajustaron los modelos lineales y no lineales mencionados en el punto 3.3.1 de la metodología. Los modelos no lineales que utilizando la transformación logaritmo natural, se linealizaron se ajustaron con procedimientos de regresión lineal simple o múltiple.

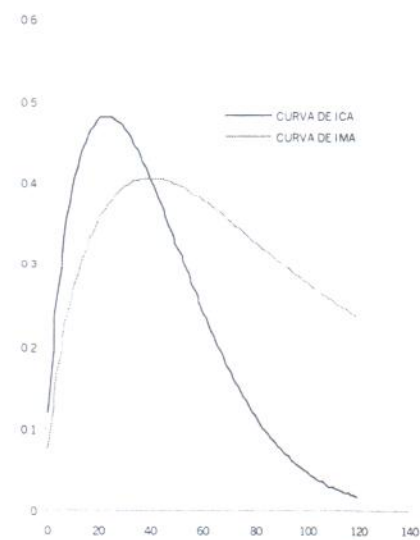
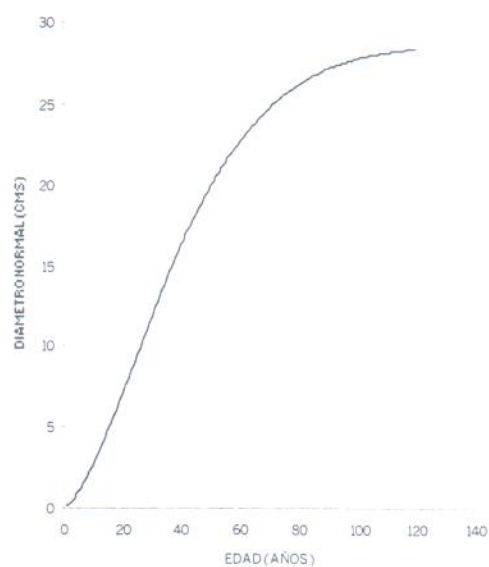
Al realizar una corrida preliminar de los modelos, en las gráficas de residuales contra valores predichos y con el procedimiento R INFLUENCE del paquete Statistical Analysis System (SAS), se detectaron y eliminaron los datos atípicos que influyen en la falta de ajuste de las ecuaciones generadas.

De acuerdo a lo anterior se eliminaron un total de 14 observaciones.

Principalmente en los modelos con transformación logarítmica, en sus gráficas de residuales contra valores predichos, se busco que no presentaran los datos el problema de heterocedasticidad, de ser así se procedió a su corrección.



(a)



(b)

Figura 5. Patrones de crecimiento e incremento en altura total (a) y diámetro normal (b) de *Pinus durangensis* Mtz. hasta la edad de 100 años, empleando el modelo de Weibull, en Durango, México.

Finalmente se ajustaron todos los modelos (cuadros 16, 17 y 18) y con base a su bondad de ajuste y no presentaran el problema de multicolinealidad, se decidió el modelo que generara la tabla de volumen para fuste total sin corteza.

Cuadro 16. Resumen de los análisis de varianza de los modelos lineales para construir tablas de volúmenes (m^3) para *Pinus durangensis* Mtz. en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R ²	PARÁMETROS	STD DEL ERROR ASINTÓTICO	PRUEBA DE T DE STUDENT	PR > T
COEFICIENTE								
MÓRFICO	0.06577	0.000255	62853.2	0.99	$\beta_0 = 0.4310$	0.00172	250.71	0.0001
VARIABLE					$\beta_0 = 0.0007$	0.00128	0.6	0.5507
COMBINADA	0.06568	0.000256	37922.6	0.99	$\beta_1 = 0.4302$	0.00221	194.74	0.0001
					$\beta_0 = 0.00003$	0.00251	0.01	0.9885
COMBINADA					$\beta_1 = 0.10548$	0.20181	0.52	0.0446
GENERALIZADA*	0.06142	0.00024	12024.1	0.99	$\beta_2 = 0.00010$	0.00031	0.33	0.2906
					$\beta_3 = 0.42235$	0.01053	40.12	0.046
					$\beta_0 = -0.0944$	0.00743	-12.71	0.0001
AUSTRALIANA DE					$\beta_1 = -0.8144$	0.60313	-1.35	0.1781
STOAT*	0.18945	0.00074	2703.55	0.97	$\beta_2 = 24.2013$	1.79211	13.5	0.0001
					$\beta_3 = 0.01242$	0.00085	14.55	0.0001
					$\beta_4 = 0.11302$	0.01377	8.21	0.0001
					$\beta_0 = -0.00059$	0.00224	-0.27	0.7911
MEYER	0.06124	0.00024	12060.5	0.99	$\beta_1 = 0.0161$	0.04158	0.39	0.6981
MODIFICADA*					$\beta_2 = 0.00148$	0.00389	0.38	0.7027
					$\beta_3 = 0.42082$	0.01018	41.35	0.0001
					$\beta_0 = 0.00702$	0.00373	1.88	0.0608
					$\beta_1 = 0.06616$	0.11094	0.6	0.5515
					$\beta_2 = 0.02531$	0.00761	3.33	0.0010
COMPENSIBLE*	0.06154	0.00024	8153.05	0.99	$\beta_3 = -0.4271$	0.57714	-0.74	0.4599
					$\beta_4 = -0.0030$	0.00104	-2.89	0.0042
					$\beta_5 = 0.3792$	0.02680	14.15	0.0001
					$\beta_0 = 0.0017$	0.00197	0.90	0.3705
					$\beta_1 = 1.4772$	0.30298	4.88	0.0001
NASLUND*	0.5906	0.00023	11375.8	0.99	$\beta_2 = 0.2456$	0.03205	7.67	0.0001
					$\beta_3 = -0.0002$	0.000057	-3.89	0.0001
					$\beta_4 = 0.00227$	0.00045	4.97	0.0001

*PRESENTAN MULTICOLINEALIDAD

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R² = Coeficiente de determinación; $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ = Parámetros estimados de los modelos.

5.3.1. Ecuación de volumen generada

De acuerdo a la Suma de Cuadrados del Error (SCE = 0.06568), Cuadrado Medio del Error (CME = 0.000255), Coeficiente de determinación ($R^2 = 0.995$), Pruebas de Hipótesis y adecuada distribución de residuales, se eligió la ecuación lineal de la Variable combinada, con la que se obtuvieron los mejores resultados (cuadros 16,17 y 18).

La ecuación obtenida tiene la forma siguiente:

$$V_{ft} = 0.00076 + 0.43023 D^2 H$$

Donde:

V_{ft} = Volumen fuste total sin corteza (m^3)

D = Diámetro normal sin corteza (m)

H = Altura (m)

El modelo predice el volumen sin corteza a partir del diámetro normal sin corteza y la altura total de cada individuo. Por lo anterior se decidió hacer las predicciones de crecimiento y rendimiento para volumen sin corteza.

5.3.2. Modelo de grosor de corteza

Puesto que en la toma de datos no se determinó la variable grosor de corteza, fue necesario ajustar un modelo de grosor de corteza en función del diámetro normal con corteza, para así estimar el diámetro sin corteza, para calcular el volumen individual. Para ajustar este modelo se utilizó una muestra que contempló la medición grosor de corteza y diámetro normal.

Cuadro 17. Resumen de los análisis de varianza de los modelos linealizados para construir tablas de volúmenes (m^3) para *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R ²	PARÁMETROS	STD DEL ERROR ASINTÓTICO	PRUEBA DE T DE STUDENT	PR > T
SCHUMACHER	20.5914	0.08014	10490.8	0.98	$\beta_0 = -0.3523$	0.199	-1.77	0.0778
					$\beta_1 = 1.842$	0.03460	53.24	0.0001
					$\beta_2 = 0.69165$	0.05463	12.65	0.0001
VARIABLE COMBINADA	21.445	0.08312	20220.3	0.98	$\beta_0 = -0.9952$	0.02366	-42.06	0.0001
					$\beta_1 = 0.868$	0.00611	142.20	0.0001
BERKHOUT	33.444	0.1296	12873.1	0.98	$\beta_0 = 2.113$	0.05187	40.75	0.0001
					$\beta_1 = 2.23$	0.01969	113.46	0.0001
THORNBUR	20.5971	0.0801	10490.8	0.98	$\beta_0 = -0.3523$	0.19900	-1.77	0.0778
					$\beta_1 = -0.1529$	0.04702	-3.25	0.0013
					$\beta_2 = 0.8445$	0.00943	89.54	0.0001
KORSUN	54.02807	0.2169	2684.89	0.95	$\beta_0 = -8.730$	0.11467	-76.13	0.0001
					$\beta_1 = 13.357$	0.81936	16.30	0.0001
					$\beta_2 = 1.80414$	0.08381	21.53	0.0001

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R² = Coeficiente de determinación; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros estimados de los modelos.

Cuadro 18. Resumen de los análisis de varianza de los modelos no lineales para construir tablas de volúmenes (m^3) para *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R ²	PARÁMETRO	STD DEL ERROR ASINTÓTICO	LÍMITES	
							INF. 95 %	SUP. 95 %
LOGARITMICA CON INTERCEPTO	0.1018	0.000389	10736.4	0.99	$\beta_0 = -0.0006$	0.00205	-0.00472	0.00333
					$\beta_1 = 0.3429$	0.0402	0.2637	0.4221
					$\beta_2 = 1.9264$	0.0244	1.8784	1.9744
					$\beta_3 = 1.0443$	0.0344	0.9767	1.1119
TRANSFORMADA DE HONER	0.1059	0.000401	25392.4	0.99	$\beta_0 = 0.0007$	0.00369	-0.00655	0.00798
					$\beta_1 = 2.3130$	0.0700	2.1751	2.4509
WENK	0.3427	0.00130	7754.63	0.98	$\beta_0 = 56.475$	4.8021	47.0199	65.9307
					$\beta_1 = 13.165$	0.5363	12.1096	14.2217
TAKATA	0.1014	0.000384	26520.8	0.99	$\beta_0 = 2.1789$	0.0447	2.0908	2.267
					$\beta_1 = 0.5454$	0.1628	0.2248	0.8660
DWIGHT	0.1027	0.000389	26182.4	0.99	$\beta_0 = 0.3817$	0.0159	0.3505	0.413
					$\beta_1 = 1.9486$	0.0181	1.913	1.984

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R² = Estadístico Pseudo R²; $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ = Parámetros estimados de los modelos.

Para esto se ajustó el siguiente modelo lineal (Cuadro 19):

$$gc = \beta_0 + \beta_1 dcc$$

Donde:

gc = Grosor de corteza (cm)

dcc = Diámetro con corteza (cm)

β_0, β_1 = Parámetro estimado

Cuadro 19. Resumen del análisis de varianza del modelos lineal para estimar el grosor de corteza (cm), para *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R2	PARÁMETROS	STD DEL	PRUEBA	PR > T
						ERROR	DE T DE	
						ASINTÓTICO	STUDENT	
CON	22.2999	0.10773	1018.93	0.83	$\beta_0=0.13656$	0.03847	3.55	0.0005
INTERCEPTA					$\beta_1=0.05188$	0.00163	31.92	0.0001

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R2 = Coeficiente de determinación; β_0, β_1 = Parámetros estimados de los modelos.

La ecuación obtenida quedo de la forma siguiente:

$$gc = 0.13656 + 0.05188 dcc$$

Cuadro 20. Tabla de diámetro con corteza, para estimar grosor de corteza y diámetro sin corteza, para *Pinus durangensis* Mtz. en Durango, México, a partir de la ecuación $gc = 0.13656 + 0.05188 dcc$.

Diámetro con corteza (cm)	Grosor de corteza (cm)	Diámetro sin corteza (cm)
5	0.39596	4.60404
10	0.65536	9.34464
15	0.91476	14.08524
20	1.17416	18.82584
25	1.43356	23.56644
30	1.69296	28.30704
35	1.95236	33.04764
40	2.21176	37.78824

5.3.3. Construcción de la tabla de volumen

En el Cuadro 21, se muestran los volúmenes estimados (m^3) para masas puras de *Pinus durangensis* Mtz., con valores máximos de diámetro normal con corteza de 40 cm y altura máxima de 24 m.

Cuadro 21. Tabla de volumen de fuste total sin corteza (m^3) para *Pinus durangensis* Mtz. en poblaciones naturales de Durango, México, a partir de la ecuación de la Variable combinada $V_{ft} = 0.00076 + 0.43023 D^2 H$.

DCC (CM)	DSC (CM)	ALTURA TOTAL (M)										
		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
5	4.60	0.0025	0.0041	0.0058	0.0075	0.0092	0.0109	0.012	0.0143	0.0160	0.017	0.019
10	9.34	0.0075	0.0143	0.0211	0.0278	0.0346	0.0414	0.048	0.0549	0.0617	0.068	0.075
15	14.08	0.0160	0.0312	0.0464	0.0617	0.0769	0.0921	0.107	0.1226	0.1378	0.153	0.168
20	18.82	0.0278	0.0549	0.0820	0.1091	0.1361	0.1632	0.190	0.2174	0.2444	0.271	0.298
25	23.56	0.0431	0.0854	0.1277	0.1700	0.2123	0.2546	0.296	0.3392	0.3815	0.423	0.466
30	28.30	0.0617	0.1226	0.1835	0.2444	0.3053	0.3663	0.427	0.4881	0.5490	0.609	0.670
35	33.04	0.0837	0.1666	0.2495	0.3324	0.4153	0.4983	0.581	0.6641	0.7470	0.829	0.912
40	37.78	0.1091	0.2174	0.3257	0.4340	0.5422	0.6505	0.758	0.8671	0.9754	1.083	1.192

5.4. Funciones de índice de sitio

El objetivo de generar curvas de índices de sitio es seleccionar el patrón de desarrollo en altura que el rodal puede seguir como un medio para calificar la productividad del sitio (Clutter *et al.*, 1983).

Para generar esas curvas de crecimiento se emplearon tres tipos de modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull, utilizando dos procedimientos: el método de la curva guía y método de la diferencia algebraica

Para lograr lo anterior se utilizó la información obtenida del análisis troncal realizado a los 47 árboles de la clase dominante y codominante, los cuales representan la variabilidad existente en los sitios.

Como lo que se trata es de captar toda la variabilidad y potencial genético de los individuos y de la respuesta de crecimiento en altura en los microambientes en que se desarrollan, no se discrimina ningún árbol elegido por presentar tendencias atípicas del resto de los seleccionados y que pueden influir en la obtención de mejor o peor ajuste. Lo anterior ya que de acuerdo con Clutter, *et al.*, (1983) no es raro que en estudios de índice de sitio se obtengan bajos ajustes en las regresiones, lo cual puede deberse a la respuesta del crecimiento de los árboles en diferentes condiciones o errores del muestreo.

5.4.1. Método de la Curva Guía

Con este método se generaron curvas anamórficas y polimórficas, contemplando una edad base de 68 años, que es la edad aproximada a la cual se obtiene el diámetro comercial con corteza (25-30 cm).

Al ajustar la base de datos se observa que los modelos Chapman-Richards y Weibull, logran un mejor ajuste para este tipo de curvas y aunque el modelo de Weibull presenta una menor suma de cuadrados del error ($SCE = 2166.1$) y por consecuencia el cuadrado medio del error ($CME = 8.2363$) y la desviación estándar del error asintótico es menor, el ajuste difiere muy poco del modelo de Chapman-Richards (Cuadro 22).

Quedando las ecuaciones de ajuste de Schumacher (a), Chapman-Richards (b) y Weibull (c), cuando la edad se hace igual a la edad base:

$$I_s = 24.462 e^{(-24.261(1/EB))} \dots\dots\dots (a)$$

$$I_s = 18.642 (1 - e^{(-0.0494 EB)})^{2.1516} \dots\dots\dots (b)$$

$$I_s = 18.074 (1 - e^{(-0.00041 EB)^{1.57542}}) \dots\dots\dots (c)$$

Donde:

I_s = Índice de sitio (m)

EB = Edad base (m)

Cuadro 22. Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir curvas anamórficas y polimórficas de índice de sitio por el método de la curva guía para *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R2	PARÁMETROS	STD DEL	LIMITES	
						ERROR ASINTÓTICO	INFERIOR 95 %	SUPERIOR 95 %
SCHUMACHER	4526.7	8.5409	4557.2	0.94	$\beta_0 = 24.462$	0.5776	23.3278	25.5970
					$\beta_1 = 24.261$	0.9239	22.4464	26.0765
CHAPMAN-RICHARDS	2178.6	8.2837	1569.67	0.94	$\beta_0 = 18.642$	0.7235	17.2177	20.0667
					$\beta_1 = 0.0494$	0.00651	0.0366	0.0622
					$\beta_2 = 2.1516$	0.3236	1.5153	2.7898
WEIBULL	2166.1	8.2363	1579.22	0.94	$\beta_0 = 18.074$	0.6443	16.8060	19.3432
					$\beta_1 = 0.0041$	0.00148	0.00124	0.00705
					$\beta_2 = 1.5754$	0.1144	1.3506	1.8013

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R2 = Coeficiente de determinación; $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros estimados de los modelos.

Para generar las curvas anamórficas, de la ecuación del índice de sitio se despeja el parámetro asintótico (β_0) y su expresión se sustituye en la ecuación original, para generar la familia de curvas polimórficas, se despeja algunos de los β 's de los exponentes considerando al parámetro β_1 , para el modelo de

Schumacher y la Función Weibull y al parámetro β_2 , para el modelo de Chapman-Richards.

En la Figura 6, se muestran las familias de curvas anamórficas y polimórficas para diferentes índices de sitio, observando la tendencia de los valores predichos para las familia de curvas generadas, en donde el modelo de Schumacher subestima el crecimiento a edades tempranas y lo sobrestiman al final de las curvas, en comparación con los modelos de Chapman-Richards y Weibull, que sobreestiman el crecimiento para edades tempranas y lo subestiman al final de las curvas.

En todos los casos, la curva guía corresponde al índice de sitio de 18 metros, contemplando una edad base de 68 años.

Aceptando como cierto el polimorfismo del crecimiento de los árboles desarrollándose en diferentes calidades de sitio, el modelo que representa más confiablemente el índice de sitio, en este procedimiento es el modelo de Chapman-Richards, en su modalidad polimórfica, quedando:

$$H = 18.642 \left(1 - e^{-0.0494 EB} \right)^{\frac{\ln \left(\frac{IS}{18.642} \right)}{\ln \left(1 - e^{-0.0494 EB} \right)}} \quad IS = 18.642 \left(1 - e^{-0.0494 EB} \right)^{\frac{\ln \left(\frac{H}{18.642} \right)}{\ln \left(1 - e^{-0.0494 EB} \right)}}$$

Donde:

H = Altura dominante (m)

IS = Índice de sitio (m)

EB = Edad base (68 años)

E = Edad (años)

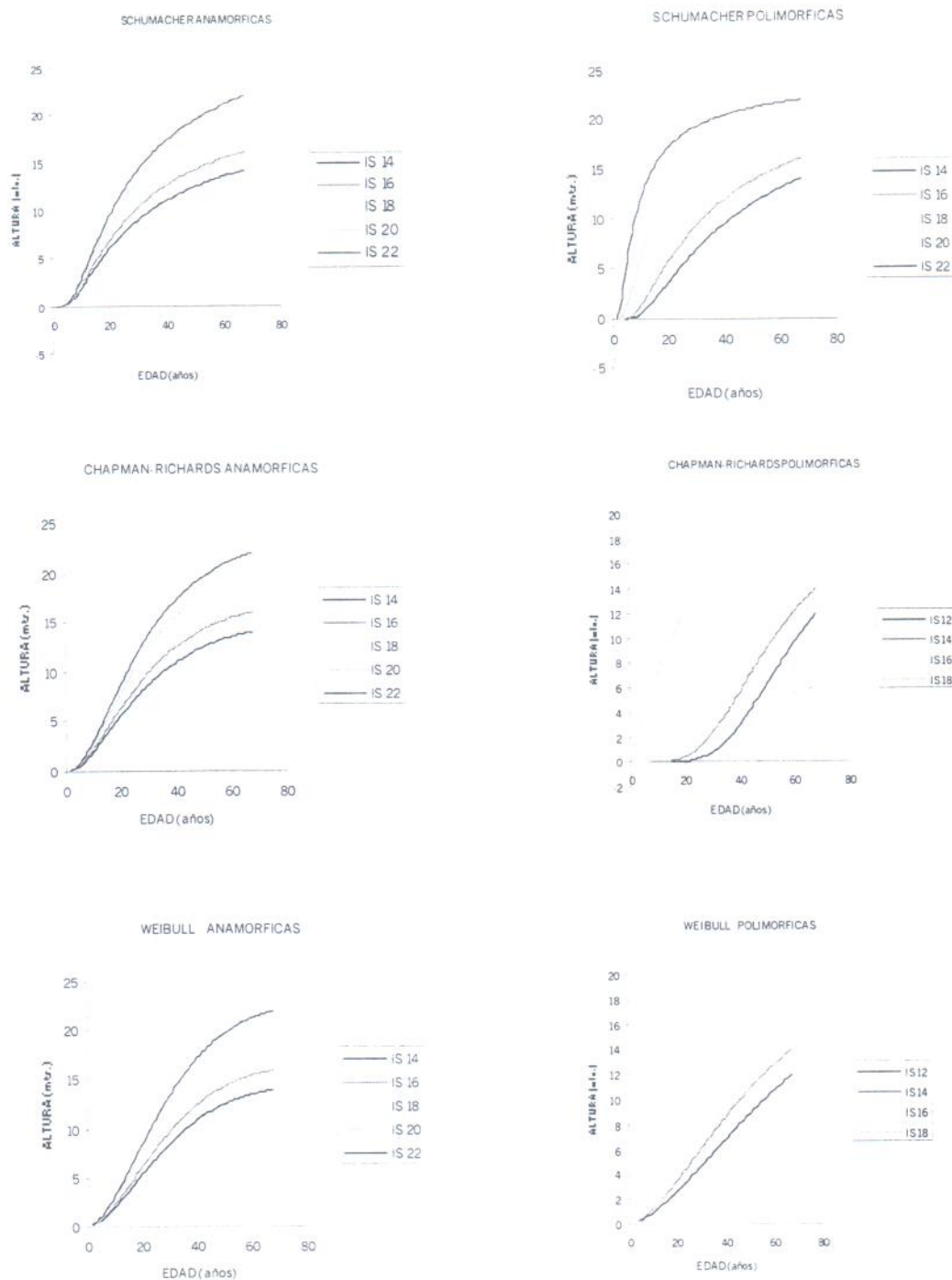


Figura 6. Curvas de índice de sitio para *Pinus durangensis* Mtz. a la edad base de 68 años, empleando el método de la curva guía y modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull (anamórficas y polimórficas) en Durango, México.

5.4.2. Método de diferencia algebraica

Con este método se generaron curvas anamórficas y polimórficas, contemplando una edad base de 68 años, que es la edad aproximada a la cual se obtiene el diámetro comercial con corteza (25-30 cm).

Para generar el tipo de familia de curvas (anamórficas o polimórficas), se identifica el parámetro que las origina, se resuelve dicha ecuación con respecto a ese parámetro, se resuelve la ecuación para dos mediciones consecutivas de pares de datos altura dominante ($H1$ y $H2$) y edad ($E1$ y $E2$), igualamos ambas ecuaciones y resolvemos en términos de la segunda medición ($H2$), la cual es ajustada a la base de datos.

El parámetro que origina las curvas anamórficas es el β_0 , para los tres modelos de crecimiento, en cambio para generar las curvas polimórficas se consideró al parámetro β_1 , para el modelo de Schumacher y la Función Weibull y al parámetro β_2 , para el modelo de Chapman-Richards.

Al ajustar la base de datos a la ecuación que origina las curvas anamórficas se observa que los modelos Chapman-Richards y Weibull, logran un mejor ajuste y aunque el modelo de Chapman-Richards presenta una menor suma de cuadrados del error ($SCE = 460.5$) y por consecuencia el cuadrado medio del error ($CME = 2.1026$) y la desviación estándar del error asintótico es menor el ajuste difiere muy poco del modelo de Chapman-Richards (Cuadro 23).

Quedando el modelo de Chapman-Richards, para curvas anamórficas:

$$H = IS \left(\frac{1 - e^{-0.0175 E}}{1 - e^{-0.0175 EB}} \right)^{1.2569}$$

Donde:

H = Altura dominante (m)

EB = Edad base (años)

E = Edad (años)

I_s = Índice de sitio (m)

Cuadro 23. Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir curvas anamórficas por el método de la diferencia algebraica para *Pinus durangensis* Mtz. en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R2	PARÁMETROS	STD DEL	LIMITES	
						ERROR ASINTÓTICO	INFERIOR 95 %	SUPERIOR 95 %
SCHUMACHER	725.5	3.297	12140.2	0.98	$\beta_1 = 18.630$	0.6111	17.4259	19.834
CHAPMAN-					$\beta_1 = 0.0175$	0.00339	0.0108	0.0242
RICHARDS	460.5	2.1026	9583.09	0.98	$\beta_2 = 1.2569$	0.0695	1.1199	1.3939
					$\beta_1 = 0.0072$	0.000846	0.00558	0.00892
WEIBULL	463	2.1142	9529.83	0.98	$\beta_2 = 1.1895$	0.0482	1.0947	1.2845

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R^2 = Estadístico Pseudo R^2 ; β_1, β_2 = Parámetros estimados de los modelos.

Posteriormente al ajustar la base de datos a la ecuación que origina las curvas polimórficas, se observó que los modelos Chapman-Richards y Weibull, logran un mejor ajuste para el tipo de curvas polimórficas y aunque el modelo de Chapman-Richards presenta una menor suma de cuadrados del error (SCE = 354.6) y por consecuencia el cuadrado medio del error (CME = 1.619) es menor, el ajuste difiere muy poco del modelo de Weibull (Cuadro 24).

Aceptando como cierto el polimorfismo del crecimiento de los árboles desarrollándose en diferentes calidades de sitio, el modelo que representa más confiablemente el índice de sitio, en este procedimiento es el modelo de Chapman-Richards, en su modalidad polimórfica, quedando:

$$H = 6.3792 \left(\frac{IS}{6.3792} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-0.025 EB})}{\ln(1 - e^{-0.025 H/H})} \right)}$$

Donde:

H = altura dominante (m)

IS = Índice de sitio (m)

EB = Edad base (68 años)

E = Edad (años)

Cuadro 24. Resumen del análisis de varianza de los modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull para construir curvas polimórficas por el método de la diferencia algebraica para *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R2	PARÁMETROS	STD DEL	LIMITES	
						ERROR	INFERIOR	SUPERIOR
						ASINTÓTICO	95 %	95 %
SCHUMACHER	434.7	1.9758	20409.2	0.98	$\beta 2 = 5.7060$	0.7393	24.249	27.162
CHAPMAN-					$\beta 2 = 6.3792$	1.6106	23.2049	29.5535
RICHARDS	354.6	1.6190	12478.2	0.99	$\beta 3 = 0.0251$	0.00292	0.0194	0.0309
					$\beta 2 = 23.2726$	1.1280	21.0494	25.495
WEIBULL	357.5	1.6326	12373.6	0.99	$\beta 3 = 1.4065$	0.0459	1.3160	1.497

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R2 = Estadístico Pseudo R²; $\beta 2, \beta 3$ = Parámetros estimados de los modelos.

En la Figura 7 se muestran las familias de curvas anamórficas y polimórficas para diferentes índices de sitio, observando la tendencia de los valores predichos para las familia de curvas generadas, en donde el modelo de Schumacher subestima el crecimiento a edades tempranas y lo sobrestiman al final de las curvas, en comparación con los modelos de Chapman-Richards y Weibull, que sobreestiman el crecimiento para edades tempranas y lo subestiman al final de las curvas.

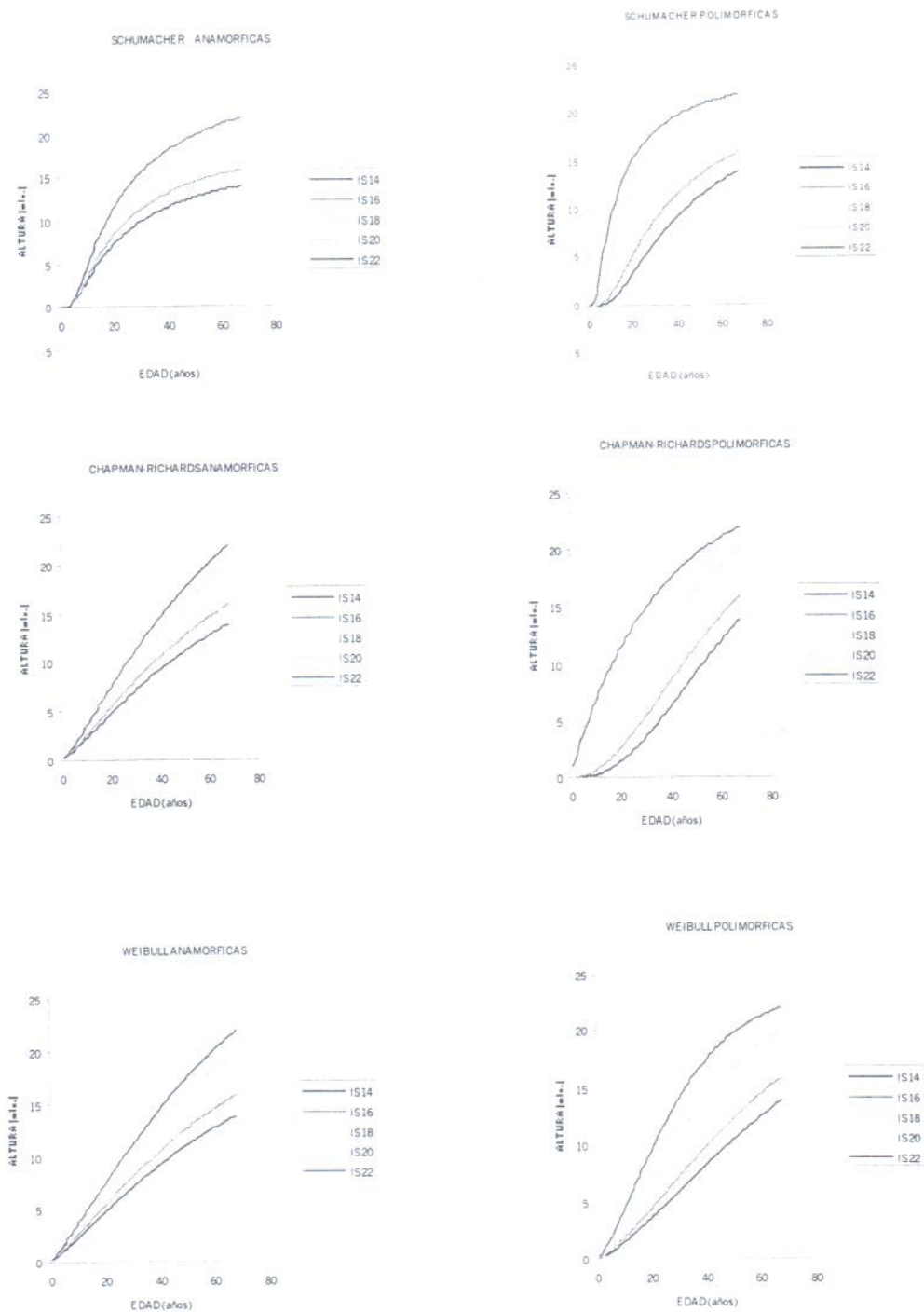


Figura 7. Curvas de índice de sitio para *Pinus durangensis* Mtz. a la edad base de 68 años, empleando el método de la diferencia algebraica y modelos Schumacher, Chapman-Richards y Weibull (anamórficas y polimórficas) en Durango, México.

5.5. Funciones de Densidad

La densidad del rodal puede considerarse como el principal factor, después de la calidad de sitio, para determinar la productividad de un sitio forestal, asimismo es el principal factor que el silvicultor puede manejar durante el desarrollo del rodal (Daniel *et al.*, 1982).

Entre otros indicadores, los utilizados para definir la densidad de los rodales en este trabajo de investigación fueron el Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR) y la Relación Área-Árbol (RAA).

La base de datos utilizada, proviene de 62 sitios de masas puras, coetáneas y con densidad normal de *Pinus durangensis* Mtz., entendiendo densidad normal cuando no existe traslape de copas y hay utilización óptima del espacio de crecimiento.

5.5.1. La Relación Área – Árbol (RAA)

La Relación Área – Árbol es un índice de estimación de la densidad, el cual se basa en el supuesto que el área del terreno, “y”, ocupada por un árbol de diámetro, “d”, pueden expresarse por la relación:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 d + \beta_2 d^2$$

Donde:

Y = Área del terreno

d = Diámetro

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = Parámetros a ser estimados

Para encontrar los valores de los parámetros de la ecuación, es necesario que bajo el método de Mínimos Cuadrados, se cumpla la condición de minimización de la suma de residuales.

De ahí que se generaron las ecuaciones normales para la Relación Área – Árbol (R.A.A.) adoptando, con la base de datos utilizada, la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\beta_0 324160000.0 + \beta_1 4496639200.0 + \beta_2 81911352535.6 &= 115200 \\ \beta_0 4496639200.0 + \beta_1 81911544080.0 + \beta_2 1771194276757.5 &= 1909116 \\ \beta_0 81911352535.6 + \beta_1 1771194276757.5 + \beta_2 42852696719559.50 &= 39631934\end{aligned}$$

Que por la teoría del álgebra matricial se sabe que:

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \text{ donde } A^{-1}A = I$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

En donde:

X = Vector columna de variables.

A = Matriz cuadrada de coeficientes.

B = Vector columna.

A^{-1} = Inversa de A .

I = Matriz identidad.

Para la obtención de los coeficientes, las ecuaciones normales obtenidas se ajustan en el paquete SAS, utilizando el procedimiento IML, para trabajar la notación matricial:

$$\beta_0 = 0.0001881 \quad \beta_1 = 0.0000071246 \quad \beta_2 = 0.00000027078$$

Finalmente:

$$RAA = 0.0001881n + 0.0000071246 \sum_{i=1}^n d + 0.00000027078 \sum_{i=1}^n d^2$$

Donde:

RAA = Relación Área – Árbol o espacio de crecimiento en porciento por unidad de área (hectárea)

n = Número de árboles por hectárea
 d = Diámetro normal con corteza (cm)

Chisman y Schumacher (1940), citado por Zepeda (1984), señalan que la ecuación anterior representa tanto una medida de la densidad como una proporción de la densidad mostrada por los datos con que aquella fue definida, aunque si bien es cierto el espacio de crecimiento real de un árbol es imposible de determinar.

El área obtenida al resolver la formula de RAA, para $n = 1$, representa el área promedio utilizada por un árbol de diámetro d , de aquellos que constituyeron la muestra de la norma de densidad considerada, que en este trabajo representa la densidad normal, si esta ultima cambia también lo hace el área estimada para cada árbol de diámetro determinado (Cuadro 25 y Figura 8).

Con esta formula de RAA, un árbol de 30 cm. de diámetro normal ocupa un espacio de crecimiento de 6.45 m² en promedio.

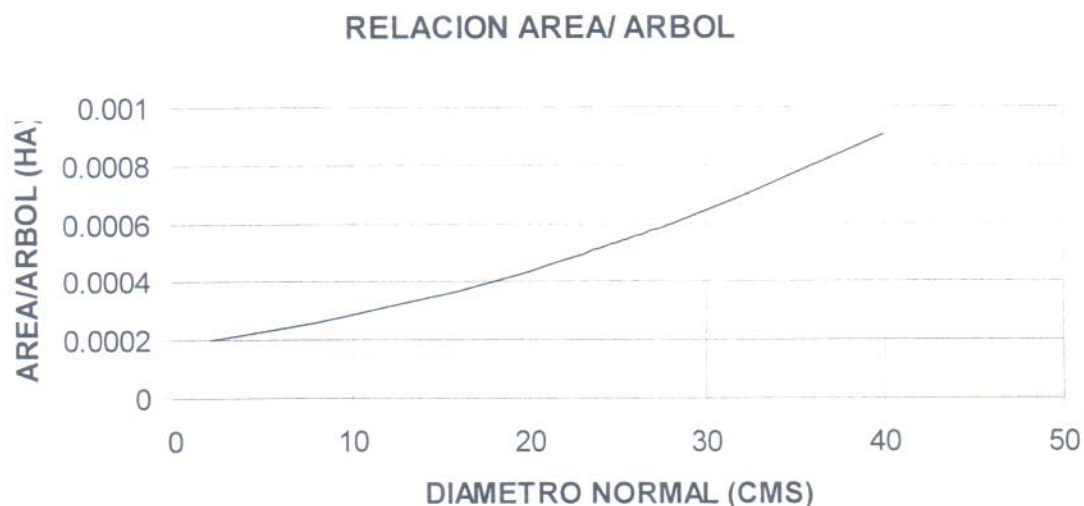


Figura 8. Relación Área-Árbol para un árbol de diámetro "d" del área ocupada por un árbol individual por hectárea para rodales puros de *Pinus durangensis* Mtz., con densidad normal en Durango, México.

Cuadro 25. Estadísticas sobresalientes de la Relación Área- Árbol, para *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

Diámetro normal con corteza (cm)	Relación Área-Árbol (has.)	Relación de Área-Árbol (m ²)	Porcentaje de una hectárea (%)	Núm. de árboles por hectárea que podrían cubrir completamente una hectárea.
2	0.000203432	2.0343224	0.02034322	4915.64169
4	0.000220931	2.2093056	0.02209306	4526.30908
6	0.000240595	2.4059496	0.0240595	4156.36304
8	0.000262425	2.6242544	0.02624254	3810.60617
10	0.000286422	2.86422	0.0286422	3491.35192
12	0.000312585	3.1258464	0.03125846	3199.13352
14	0.000340913	3.4091336	0.03409134	2933.2966
16	0.000371408	3.7140816	0.03714082	2692.45565
18	0.000404069	4.0406904	0.0404069	2474.8246
20	0.000438896	4.38896	0.0438896	2278.4441
22	0.000475889	4.7588904	0.0475889	2101.33018
24	0.000515048	5.1504816	0.05150482	1941.56601
25	0.00053544	5.3544	0.053544	1867.62289
25.4	0.000543748	5.43748362	0.05437484	1839.086
26	0.000556373	5.5637336	0.05563734	1797.35421
28	0.000599865	5.9986464	0.05998646	1667.04275
30	0.000645522	6.45522	0.0645522	1549.13388
32	0.000693345	6.9334544	0.06933454	1442.28251
34	0.000743335	7.4333496	0.0743335	1345.28854
36	0.000795491	7.9549056	0.07954906	1257.08594
38	0.000849812	8.4981224	0.08498122	1176.73052

En la Figura 9, se muestra el comportamiento de la Relación-Área-Árbol para rodales puros de *Pinus durangensis* Mtz., plenamente poblados con densidad normal en Durango, México.

5.5.2. Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR)

El Índice de Densidad de Rodales de Reineke, es un índice que expresa la medida cuantitativa de la densidad promedio que un rodal puede soportar, con referencia a un límite determinado entre la relación del número de árboles por unidad de superficie y el tamaño promedio de los árboles para lograr un objetivo determinado y también es independiente de la edad y calidad de sitio (Clutter *et al.*, 1983).

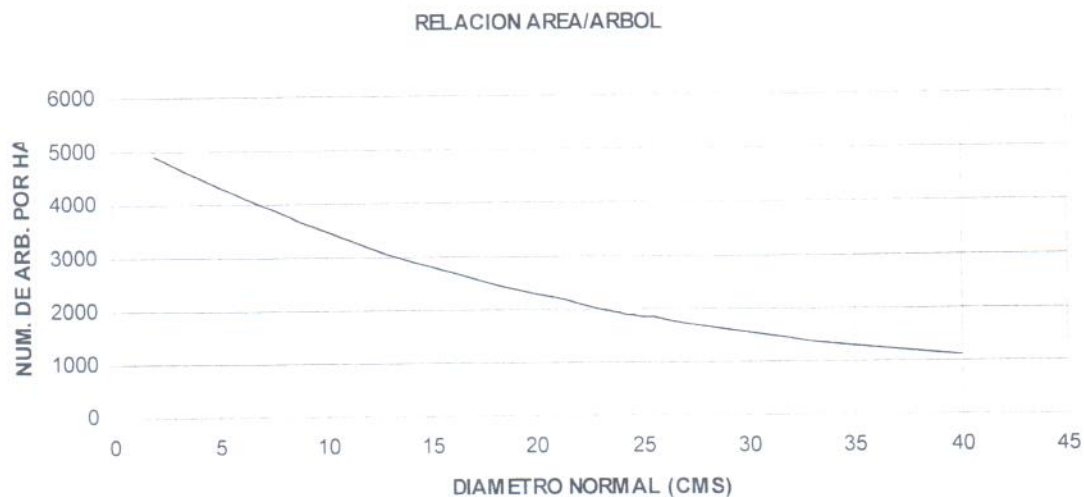


Figura 9. Número de árboles por hectárea para un árbol de diámetro “d”, utilizando la Relación Área-Árbol para rodales puros de *Pinus durangensis* Mtz., con densidad normal en Durango, México.

Para calcular este índice, por métodos de regresión no lineal se estima la relación funcional entre número de árboles y diámetro cuadrático mediante la relación $N = \beta_0 Dc^{\beta_1}$, la expresión corresponde a la propuesta por Reineke (1933), citado por Zepeda (1984), la cual fue linearizada a través de una transformación logarítmica $\ln N = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln Dc$ donde: N = No. de árboles por hectárea, Dc = Diámetro cuadrático medio, Ln =logaritmo natural, y β_0 , β_1 = Parámetros a ser estimados.

Para la obtención de parámetros, la base de datos se ajusto al Paquete Statistical Analysis System (SAS), utilizando las técnicas de regresión lineal simple, usando el método de mínimos cuadrados, los resultados se muestran en el Cuadro 26, mismos que indican que el logaritmo del diámetro cuadrático de árboles en rodales de normal densidad *Pinus durangensis* Mtz., contribuyen en la estimación del número de árboles por hectárea.

Cuadro 26. Resumen del análisis de varianza del modelo linealizado para generar los parámetros de la función del Índice de Densidad de Rodales, con densidad normal, para *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R ²	PARÁMETROS	STD DEL	PRUEBA DE	PR > T
						ERROR	T DE	
						ASINTÓTICO	STUDENT	
IDRR	0.518	0.014	283.9	0.88	$\ln \beta_0 = 9.55$	0.11633	82.12	0.0001
					$\beta_1 = -0.658$	0.03907	-16.85	0.0001

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R² = Coeficiente de determinación; β_0, β_1 = Parámetros estimados de los modelos.

La ecuación obtenida es la siguiente:

$$\ln N = 9.552 - 0.658 \ln Dc$$

Según Mood *et al* (1988) y Zepeda *et al.*, (1994) citado por García (1998), cuando se realizan transformaciones logarítmicas, se debe utilizar como factor de corrección por transformación logarítmica a:

$$\beta_0 = e^{(\ln \beta_0 + var / 2)}$$

Donde:

β_0 = Coeficiente de regresión corregido

$\ln \beta_0$ = Logaritmo natural del coeficiente de regresión estimado con los datos.

var = Cuadrado Medio del Error

Obteniendo:

$$\beta_0 = e^{(\ln 9.5528 + 0.01402 / 2)}$$

Por lo que la ecuación queda como:

$$\ln N = 9.62 - 0.658 \ln Dc$$

Que en su condición original, estima el número de árboles por hectárea, transformándola a su condición original:

$$N = 15063.0499 Dc^{-0.658}$$

Donde:

N = Número de árboles

Dc = Diámetro cuadrático (cm)

En lo que respecta a la ecuación obtenida, la tabla de análisis de varianza evidencia que los grados de ajuste obtenidos y las pruebas de hipótesis sobre los parámetros fueron satisfactorios y que el modelo explica el 88% de la variación total y en todos los casos las pruebas de hipótesis resultaron altamente significativas, así mismo, el cuadrado medio del error y los errores estándar de los parámetros fueron bajos.

El grado de densidad de los rodales considerados bajo la misma condición restrictiva (línea base o referencia a una densidad normal), se expresan numéricamente como el número de árboles por unidad de área cuando diámetro cuadrático de referencia (Dcr) es igual a 25.4 cm, el Índice de Densidad de Rodales de Reineke (IDRR) es igual a 1792.8 (Figura 10).

Para la construcción de diferentes Índices de Densidad de Rodales de Reineke, a partir de la ecuación inicial, se utilizó la siguiente fórmula (Zepeda, 1984):

$$N = IDRR (Dc/Dcr)^{-0.658}$$

$$IDRR = N (Dcr/Dc)^{-0.658}$$

Donde:

N = Número de árboles por hectárea a densidad normal.

$IDRR$ = Índice de Densidad de Rodales de Reineke

Dc = Diámetro cuadrático

Dcr = Diámetro cuadrático de referencia (25.4 cm)

INDICE DE DENSIDAD DE RODALES DE REINEKE

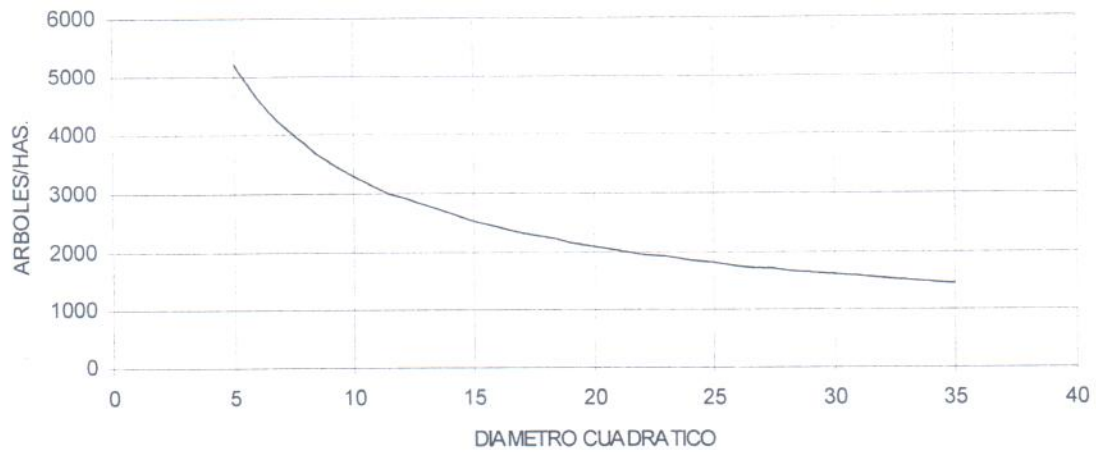


Figura 10. Línea de referencia a densidad normal, del número de árboles por hectárea, ajustada mediante la ecuación $N = 15063.0499 Dc^{-0.658}$, del Índice de Densidad de Rodales de Reineke.

En el Cuadro 27 y Figura 11 se muestran, respectivamente, los valores del número de árboles que determinan diferentes IDRR y diámetros cuadráticos medios.

Cuadro 27. Número de árboles por diámetro cuadrático para cada Índice de Densidad de Rodales de Reineke considerada.

IDRR	Diámetro cuadrático (cm)						
	5	10	15	20	25	30	35
500	1369.63	891.18	693.09	579.86	504.94	450.97	409.86
800	2191.41	1425.89	1108.94	927.787	807.91	721.55	655.78
1100	3013.20	1960.60	1524.80	1275.70	1110.87	992.14	901.71
1400	3834.98	2495.31	1940.65	1623.62	1413.84	1262.72	1147.63
1686	4618.41	3005.06	2337.10	1955.31	1702.67	1520.68	1382.07
2000	5478.54	3564.73	2772.36	2319.46	2019.78	1803.89	1639.47
2300	6300.33	4099.44	3188.21	2667.38	2322.74	2074.48	1885.39
2600	7122.11	4634.15	3604.07	3015.30	2625.71	2345.06	2131.31
2900	7943.89	5168.86	4019.92	3363.22	2928.68	2615.65	2377.23

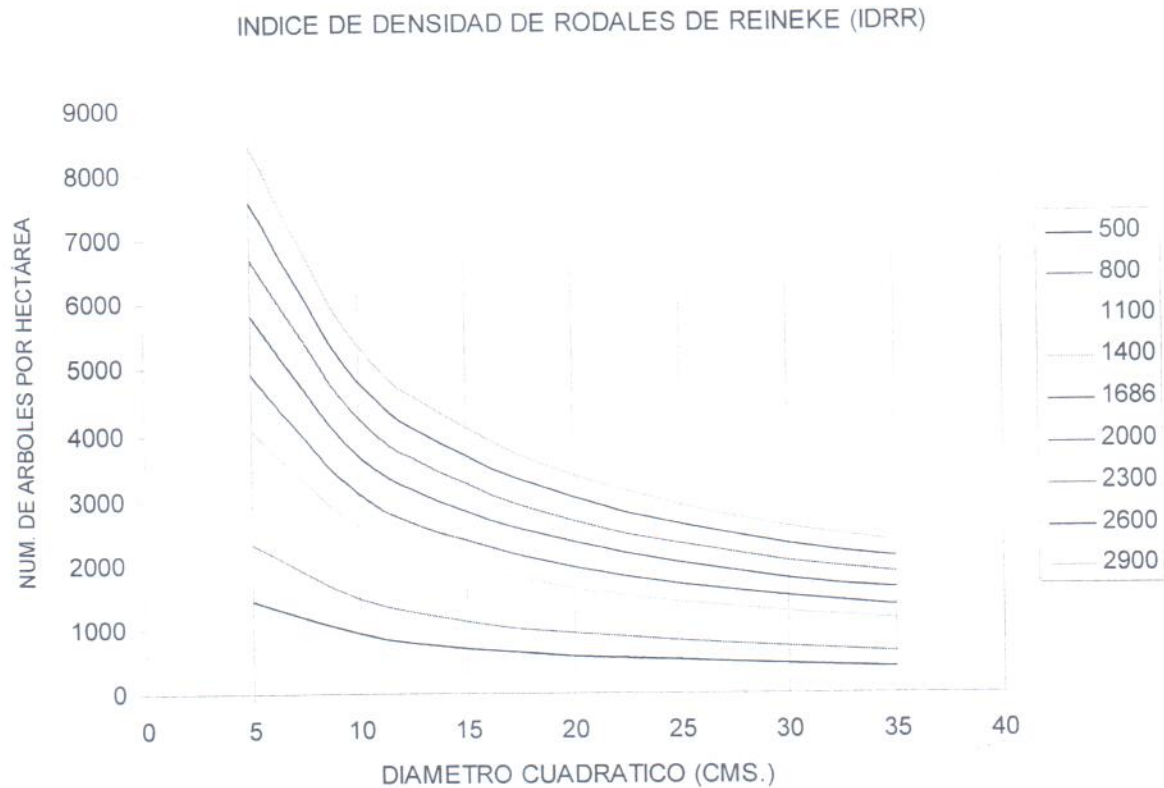


Figura 11. Número de árboles por hectárea por diámetro cuadrático, ajustada mediante la ecuación $N = IDRR(Dc/Dcr)^{-0.658}$, para diferentes Índices de Densidad de Rodales de Reineke, a un diámetro cuadrático de referencia de 25.4 cm.

5.6. Predicción del rendimiento usando modelos de totalidad del rodal o de predicción explícita

Para estimar el rendimiento actual se tomó como base la fórmula básica del modelo de Schumacher (Clutter *et al.*, 1983):

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 f(Is) + \beta_4 f(ID)$$

Donde:

V = volumen sin corteza por hectárea

E = edad promedio del rodal

$f(Is)$ = Función de Índice de sitio

$f(ID)$ = Función de densidad del rodal, Índice de Densidad de Rodales de Reineke

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ = Parámetros estimados

A partir de esta forma se ajustaron otras ecuaciones basadas en el modelo de Schumacher (Clutter *et al.*, 1983), fueron también ajustadas:

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (Is) + \beta_4 (IDRR) \dots\dots\dots (4)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 \ln (Is) + \beta_4 (IDRR) \dots\dots\dots (5)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (1/Is) + \beta_4 \ln (A) \dots\dots\dots (6)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (Is) + \beta_4 \ln (A) \dots\dots\dots (7)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 \ln (Is) + \beta_4 \ln (A) \dots\dots\dots (8)$$

$$\ln V = \beta_1 + \beta_2 (1/E) + \beta_3 (Is) + \beta_4 \ln (N) + \beta_5 (1/Is) (IDRR) \dots\dots\dots (9)$$

Donde:

V = Volumen sin corteza por hectárea (m^3)

E = Edad promedio del rodal (años)

Is = Índice de sitio (m); a una edad base de 68 años

A = Área basal con corteza por hectárea (m^2)

N = Número de árboles por hectárea

$IDRR$ = Índice de Densidad de Rodales de Reineke

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ = Parámetros estimados

El modelo que mejores ajustes estadísticos presento fue el (6), que incluye el área basal como indicador de la densidad, ya que presenta una menor suma de cuadrados del error (SCE = 0.39628) y por consecuencia el cuadrado medio del error (CME = 0.00881) y una R2 de 0.99. Otro modelo que también presento buen ajuste fue el modelo (5) que incluye el IDRR, pero no es tan bueno como el anterior (Cuadro 28).

El modelo ajustado queda como sigue:

$$\ln V = 2.10545 - 13.6007 \left(\frac{1}{E} \right) - 5.98135 \left(\frac{1}{IS} \right) + 1.12139 \ln A$$

$$V = e^{2.10545} e^{-13.6007 \left(\frac{1}{E} \right)} e^{-5.98135 \left(\frac{1}{IS} \right)} A^{1.12139}$$

Donde:

V = Volumen sin corteza por hectárea (m³/has)

E = Edad promedio del rodal (años)

IS = Índice de sitio a una edad base de 68 años en m

A = Área basal con corteza por hectárea (m²)

e = Base logaritmo natural

Con el modelo ajustado que se acaba de mostrar, es posible obtener el rendimiento actual de un rodal, con solo determinar las variables edad, índice de sitio y área basal con corteza.

Un inconveniente de este método de predicción del rendimiento, es que no proporciona la estructura del rodal y por consiguiente se desconoce la distribución del volumen por clases o grupos de árboles.

Cuadro 28. Resumen del análisis de varianza de los modelos 4, 5, 6, 7, 8 y 9 para la predicción explícita del rendimiento actual de *Pinus durangensis* Mtz., en Durango, México.

MODELO	SCE	CME	FC	R ²	PARÁMETROS	STD DEL	PRUEBA	PR > T
						ERROR	DE T DE	
						ASINTÓTICO	STUDENT	
4	1.31885	0.02931	722.30	0.97	$\beta_1 = 6.7171$	0.15403	43.61	0.0001
					$\beta_2 = -64.20$	1.70280	-37.71	0.0001
					$\beta_3 = 0.0029$	0.00154	1.88	0.0662
					$\beta_4 = 0.0004$	0.000060	7.79	0.0001
5	1.28190	0.02849	743.63	0.98	$\beta_1 = 6.1730$	0.3997	17.65	0.0001
					$\beta_2 = -63.25$	1.8548	-34.10	0.0001
					$\beta_3 = 0.1775$	0.07986	2.22	0.0312
					$\beta_4 = 0.000485$	0.0000607	7.98	0.0001
6	0.39628	0.00881	2439.06	0.99	$\beta_1 = 2.01545$	0.32823	6.14	0.0001
					$\beta_2 = -13.600$	3.2448	-4.19	0.0001
					$\beta_3 = -5.9813$	1.83439	-3.26	0.0021
					$\beta_4 = 1.12139$	0.06400	17.52	0.0001
7	0.44189	0.00982	2185.74	0.99	$\beta_1 = 1.8667$	0.35961	5.19	0.0001
					$\beta_2 = -16.054$	3.23424	-4.96	0.0001
					$\beta_3 = 0.00192$	0.00087033	2.21	0.0321
					$\beta_4 = 1.10208$	0.06701	16.45	0.0001
8	0.42065	0.00935	2296.87	0.99	$\beta_1 = 1.45447$	0.40918	3.55	0.0001
					$\beta_2 = -14.918$	3.24285	-4.6	0.0001
					$\beta_3 = 0.12021$	0.04417	2.72	0.0092
					$\beta_4 = 1.11279$	0.06576	16.92	0.0001
9	1.71048	0.03887	405.93	0.97	$\beta_1 = 2.90583$	0.93161	3.12	0.0032
					$\beta_2 = -75.868$	3.20165	-23.7	0.2001
					$\beta_3 = -0.0057$	0.00443	-1.3	0.0001
					$\beta_4 = -22.1160$	0.13318	5.97	0.0361
						10.22886	-2.16	

Donde: SCE = Suma de Cuadrados del Error; CME = Cuadrado Medio del Error; FC = Estadística de Prueba F Calculada; R² = Coeficiente de determinación; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ = Parámetros estimados de los modelos.

Rendimiento futuro

Como no se contó con un parámetro para proyectar el cambio de la densidad en el tiempo se pretende utilizar la ecuación dada por Bennett (1970), citado por Clutter *et al.*, (1983), la cual es:

$$\ln A_2 = \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \ln A_1 + 5.1649 \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$$

Donde:

A_2 = Área basal predicha a la edad proyectada

E_1 = Edad actual

A_1 = Área basal a la edad actual

E_2 = Edad proyectada

De esta manera tomando la ecuación ajustada del rendimiento actual, sustituimos el valor del Área basal predicha a la edad proyectada en el modelo.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los modelos que tuvieron mejor ajuste para generar las curvas de crecimiento para *Pinus durangensis* Mtz. en Durango, México, resultaron ser para altura total el modelo de Chapman-Richards y para el diámetro normal el modelo de Schumacher.

Para altura total el máximo ICA ocurre a la edad de 15 años y el máximo IMA y punto de intersección donde ICA = MA ocurre a la edad de 28 años. Para el Diámetro normal la culminación de ICA ocurre a la edad de 17 años y el máximo IMA y punto de intersección donde ICA = IMA ocurre a la edad de 35 años.

La ecuación ajustada para determinar el grosor de corteza en función del diámetro normal con corteza, tiene la forma siguiente:

$$gc = 0.13656 + 0.05188dcc$$

Donde:

gc = Grosor de corteza (cm)

dcc = Diámetro normal con corteza (cm)

Para elaborar la tabla de volumen de fuste limpio para *Pinus durangensis* Mtz. en Durango, México, el modelo que tuvo el mejor ajuste fue el lineal de la variable combinada:

$$Vft = 0.00076 + 0.43023 D^2 H$$

Donde:

V_{ft} = Volumen fuste total sin corteza (m^3)

D = Diámetro normal sin corteza (m)

H = Altura (m)

En la estimación de la calidad de sitio, las expresiones de Chapman-Richards y Weibull por el método de la Curva guía y diferencia algebraica en sus versiones anamórficas y polimórficas presentan muy buenos ajustes, siendo la que expresa mejor la tendencia de los datos, por su ajuste, la ecuación de Chapman-Richards, en su versión polimórfica, por el método de la diferencia algebraica:

$$H = 6.3792 \left(\frac{IS}{6.3792} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-0.0251E})}{\ln(1 - e^{-0.0251EB})} \right)} \quad IS = 6.3792 \left(\frac{H}{6.3792} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-0.0251EB})}{\ln(1 - e^{-0.0251E})} \right)}$$

Donde:

H = Altura dominante (m)

IS = Índice de sitio (m)

EB = Edad base (68 años)

E = Edad (años)

La Relación Área-Árbol, está dada por la expresión:

$$RAA = 0.0001881n + 0.0000071246 \sum_{i=1}^n d + 0.00000027078 \sum_{i=1}^n d^2$$

Donde:

RAA = Relación Área – Árbol o espacio de crecimiento en por ciento por unidad de área (hectárea)

n = Número de árboles por hectárea

d = Diámetro normal con corteza (cm)

Índice de Densidad de Rodales de Reineke:

$$IDRR = N \left(\frac{D_{cr}}{D_c} \right)^{-0.658}$$

$$N = IDRR \left(\frac{D_c}{D_{cr}} \right)^{-0.658}$$

Donde:

$IDRR$ = Índice de Densidad de Rodales de Reineke

N = Número de árboles por hectárea a densidad normal

D_c = Diámetro cuadrático

D_{cr} = Diámetro cuadrático de referencia (25.4 cm)

En la predicción explícita del rendimiento actual, el modelo de Schumacher que incluye el área basal como indicador de la densidad, dio el mejor ajuste:

$$V = e^{2.10545} e^{-13.6007 \left(\frac{1}{E} \right)} e^{-5.98135 \left(\frac{1}{IS} \right)} A^{1.12139}$$

Donde:

V = Volumen sin corteza por hectárea (m³/ha)

E = Edad promedio del rodal (años)

IS = Índice de sitio a una edad base de 68 años en m.

A = Área basal con corteza por hectárea (m²)

Ln = Logaritmo natural

e = Base logaritmo natural

Las técnicas estudiadas proveen resultados para la estimación del rendimiento actual, pudiendo utilizar esta información de manera preliminar para determinar regímenes de manejo para la especie de interés en la zona, de tal

manera que se puedan comparar opciones de manejo y seleccionar la mejor, siempre tomado en cuenta los objetivos de manejo, sin dejar de lado inicialmente la validación de las mismas para su uso.

Se recomienda que los modelos y ecuaciones generadas se apliquen dentro de la región de estudio, en masa coetáneas y puras de *Pinus durangensis* Mtz., pudiendo utilizar dicha información, como un indicador, en otros lugares con condiciones similares de clima, suelo y arbolado.

7. LITERATURA CONSULTADA

- Acosta M., M., 1991. Modelo de crecimiento para *Pinus montezumae* Lamb., en el C.E.F. San Juan Tetla, Puebla. Tesis de Maestría en Ciencias. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales, Chapingo México. 80 p.
- Acosta M., M., O. S. Magaña T. y J. M. Torres R. 1992. Aspectos prácticos en el uso de modelos de crecimiento en rodales a través de la función Weibull. *In*. Memoria: Primer foro nacional sobre manejo integral forestal. Ed. Baldemar Arteaga Martínez. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales, Chapingo México. pp. 355-363.
- Adlard G. M. A. P. 1983. Clases de modelos de crecimiento de masas forestales y tipos de variables necesarias para su calibración. *In*. Primera Reunión Sobre Modelos de Crecimiento de Árboles y Masas Forestales. Publicación Especial No. 44. INIF-México. pp. 47-53.
- Aguirre C., O. A. 1984. Estimación de índices de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en la región de Iturbide Nuevo León. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales, Chapingo México. 71 p.
- Alder D. E. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento con referencia especial a los trópicos. Volumen 2. Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación. Estudios FAO: Montes Roma, Italia. 80 p.
- Ayerde L., D. 1996. Análisis de curvas de crecimiento de árboles y masas forestales. Tesis de Maestría en Ciencias. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales, Chapingo México. 255 p.
- Bailey R. L y Dell T. R. 1973. Quantifying diameters distributions with the Weibull function. *Forest Science*. 19:97-104.
- Balderas A., M. C. y R. Rodríguez F. 1989. Elaboración de tres guías de densidad para *Pinus montezumae* Lamb., en el C. E. F. San Juan Tetla, Puebla. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 71 p.
- Bailey, R. L. y Clutter, J. L. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science* (20) pp:155-159.
- Becerra L., F. 1986. Determinación de una guía de densidad para *Pinus patula* Schl. et Cham., en la región de Chignahuapan-Zacatlan, Pue. Tesis de Maestría. Colegio de Postgraduados. Programa Forestal. Montecillo, México. 71p.

Caballero, D. M. 1972. Tablas y tarifas de volúmenes. Inventario Nacional Forestal. Nota inf. N° 7. México. 55 p.

Cailliez F. E. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento con referencia especial a los trópicos. Volumen 1. Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación. Estudios FAO: Montes Roma, Italia. 92 p.

Castillo., M. A. 1988. Modelo para estimación de incremento y producción maderable neta de *Pinus caribea* var. *hondurensis* Barr. y Golf. de la Sabana. Oaxaca. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 81 p.

Chapra, C.S. y R P. Canale. 1994. Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales, McGraw-Hill. México, D.F. 641 p.

Consultoría Forestal "Roberto Trujillo". 2000. Programa de manejo integral forestal del predio particular Sierra del Nayar, municipio de Victoria de Durango, Dgo. México. 43 p.

Clutter, J. L., J. C. Fortson, L. V. Pienaar, G. H. Brister & R. L. Bailey 1983. Timber management a quantitative approach. Wiley, New York. 333 p.

Cumplido O. R. 2002. Tablas de volúmenes y de incrementos para tres especies del género *Pinus* de tres predios del estado de Chihuahua Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 105 p.

Daniel, T. W., J. A. Helms & F.S. Baker, 1982 Principios de silvicultura. Trad. Ramón Elizondo Mata. Mc Graw- Hill. México. D.F. 491 p.

Davis, S. L. y Johnson, K. N. 1987. Forest management. 3a. edition. McGraw-Hill. USA. 730 p.

Draper, M. R. & H. Smith. 1981. Applied regression analysis. 2 edición. New York. Wiley. 709 p.

Dykstra, D. P. 1984. Mathematical programming for natural resource management. McGraw-Hill. USA. 318 p.

Fitz, F. 1991. Programa de computo para estimar incremento y producción maderable neta de *Pinus caribea* var. *hondurensis* Barr. y Golf. de la Sabana. Oaxaca. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 72 p.

García C. X. 1998. Predicción del rendimiento de *Swietenia macrophylla* King (caoba) en plantaciones forestales. Tesis de Maestría. Colegio de Postgraduados. Programa Forestal. Montecillo, México. 119 p.

García, E. 1983. Modificaciones al sistema de clasificación climática de Koepen (para adaptarlos a las condiciones de la República Mexicana); 4ª edición. Universidad Autónoma de México. Instituto de Geografía. México D. F. 252 p.

Infante G.S. y G. P. Zarate L. 1996. Métodos Estadísticos: Un enfoque interdisciplinario. Ed. Trillas. México. D.F. 643 p.

Klepac D. 1983. Crecimiento e incremento de árboles y masas forestales. 2 ed. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 365 p.

Krajicek, J.E., K. A. Brinkman y K.E. Haller. 1961. Crow Competition: A measure of density. Forest Science, 7(1) pp: 35-42.

Madrigal H., S. 1995. Determinación de la productividad de dos especies de pino considerando características físicas y químicas del suelo en Michoacán. Tesis de Maestría en Ciencias. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 115 p.

Madrigal H., S. y H. Ramírez M. 1995. Comparación de nueve modelos empíricos para la determinación índice de sitio en Michoacán. In. Ciencia Forestal en México. México, D. F. 20(79) pp :35-57.

Martínez G. A. 1982. Métodos econométricos. 2 edición. Colegio de Postgraduados. Montecillos, México. 590 p.

Martínez G., A. y A. Castillo M. 1987. Teoría de la regresión con aplicaciones agronómicas. Colegio de Postgraduados. Montecillos, México. 490 p.

Mendoza B., M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. In. Primera Reunión Sobre Modelos de Crecimiento de Árboles y Masas Forestales. Publicación Especial No. 44. INIF-México. PP.35 -45.

Montero M., M. 1992. Modelo de crecimiento para *Pinus caribea* var. *hondurensis* Barr. y Golf. de la Sabana. Oaxaca. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 95 p.

Moreno Ch., J. 1996. Comparación de dos métodos de construcción de curvas de Índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en la región de Hidalgo-Zinapécuaro de Michoacán. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 95 p.

- Pérez V., G. 1990. Determinación de índice de sitio para *Pinus arizonica* Engelm en la región noroeste del estado de Durango. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 95 p.
- Pienaar L. V & R. J. Turnbull 1973. The Chapman- Richards generalization of Von Bertalanffy's growth models for basal area growth and yield in even – age attands. Forest Science. 19 (1) pp :2-21.
- Prodan M. 1968. Forest biometrics. Trad. by S. H. Gardiner. Oxford. Pergamon. 447p.
- Prodan M. R., Peters, F. Cox. & P. Real. 1997. Mensura forestal. IICA-BMZ/GTZ. San José, Costa Rica. 586 p.
- Quiñónez C. A. 1995. Evaluación de la calidad de sitio y del efecto de la densidad en bosques de estado de Durango. Tesis de Maestría en Ciencias. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales, Chapingo México. 129 p.
- Ramírez A., M., 1981. Comparación de cuatro modelos matemáticos aplicados al crecimiento forestal. Instituto Nacional de investigaciones Forestales. Ciencia Forestal. 16 (70)pp:87-108.
- Ramírez M. H. y E. M. Zepeda B. 1994. Rendimientos maderables de especies forestales; actualidades en México. In. IV Reunión Nacional de Plantaciones Forestales. Subsecretaria Forestal y de Fauna Silvestre. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias. México, D.F. pp. 169-179.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth function for empirical use. Journal of Experimental Botany. Vol. 10 pp: 290-300.
- Rentería A., J. B., 1995. Sistema de cubicación para *Pinus cooperi* Blanco mediante ecuaciones de ahusamiento en Durango. Tesis de Maestría en Ciencias. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 77 p.
- Rodríguez, F. C. y R. Moreno S, 1982. Elaboración de tablas de volúmenes a través de análisis troncales para *Pinus montezumae* Lamb. en el C.E.F. San Juan Tetla, Puebla. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales. Boletín técnico. No. 90. 38 p.
- Romahn de la V. C. F., Ramírez M., Y J. L. Treviño G. 1994. Dendrometria. Universidad Autónoma Chapingo. México, D.F. 354 p.

- Romero D., J. A. 1994. Modelo de crecimiento y producción maderable para *Pinus oocarpa* Schiede en Hidalgo, Michoacán. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 81 p.
- SAS Institute Inc. 1992. SAS/STAT User's guide. Release 6.03 edition. Cary, NC. USA. 1028 p.
- Schumacher., F. J. 1939. A new growth curve and its applications to timber yield studies. Journal of forestry . 37:819-820.
- Sosa C., V. 1981. Inventarios forestales. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales. Revista Ciencia Forestal. 31(6)pp:18-39.
- Spurr, S.H., 1952. Forest Inventory. New york. Willey. 856 p.
- Spurr., S.H. & B.V. Barnes, 1982. Ecología forestal. A. G. T. Editor. 690 p.
- Secretaria del Medio Ambiente Recursos Naturales y Pesca (SEMARNAT) y Comisión Nacional Forestal (CONAFOR). 2002. Programa Nacional de Desarrollo 2001 -2006. Impreso en México. pp. 8-12.
- Torres R., J. M. 2001. Curvas de índice de sitio de forma y escala variables en investigación forestal. Colegio postgraduado. Agrociencia. Montecillo, México. 35(1) pp :87-98.
- Torres R., J. M., M. Acosta M. y O. S. Magaña T. 1992. Métodos para estimar los parámetros de la función Weibull y su potencial para ser predichos a través de atributos del rodal. Colegio postgraduado. Agrociencia. Montecillo, México. 2(2) pp :57-77.
- Valdez L. R. J. 2000. Ecuaciones para estimar volumen comercial y total en rodales aclareados de *Pinus patula* en Puebla, México. Colegio postgraduado. Agrociencia. Montecillo, México. 34(6) pp: 747-758.
- Zamudio S., F.J. y D. Ayerde L. 1997. Modelos de crecimiento. Universidad Autónoma Chapingo. Revista Chapingo, Serie Ciencias Forestales. 3(1):79-87.
- Zeide, B. 1993. Análisis of growth equations. Forest science. 39(3) pp:594-616.
- Zepeda B., E. M. 1983. Análisis de diez procedimientos para estimar incrementos volumétricos de coníferas. Tesis profesional. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 636 p.
- Zepeda B., E. M. 1984. Ejemplificación de tres procedimientos para caracterizar rodales por su densidad. Serie de apoyo académico No. 34. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 57 p.

Zepeda B., E. M. y P. Rivero B. 1984. Construcción de curvas anamórficas de índice de sitio: ejemplificación del método para la curva guía. . Instituto Nacional de Investigaciones Forestales. Revista Ciencia Forestal. 9 (51)pp:3-28.

Zepeda B., E. M. y M. E. Villarreal D. 1987. Estimación de tres índices de densidad para rodales naturales de *Pinus hartwegii* Lindl., de Zoquiapan, México. In. Fierros G. A., A. F. Becerra LK. y E. M. Zepeda B. Compiladores. Memorias de I primewr simposio Nacional sobre investigación Forestal. SARH-UACH-INIF. Chapingo México. pp. 573-609.

Zepeda B., E. M. y M. E. Villarreal D. 1987. Guía de densidad para *Pinus hartwegii* Lindl., de Zoquiapan, México. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 57 p.

Zepeda B., E. M. 1990. Predictor de rendimientos maderables probables de *Pinus patula* Acheide y Deppe., de Perote Ver. México. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Posgraduados. Montecillo, México. 331p.

Zepeda B., E. M., S Verruete B. y S. Esparza P. 1990. Ecuaciones para estimar volumen fuste total, rollo total árbol, ramaje y coeficientes mórficos de tres especies de pino del noroeste de chihuahua. Serie de apoyo Académico No. 49 Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 37 p.