

UNIVERSIDAD AUTONOMA CHAPINGO

DIVISIÓN DE CIENCIAS FORESTALES

PROCESO JERÁRQUICO ANALÍTICO:
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN SU CONSISTENCIA

TESIS
QUE COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:
Maestra en Ciencias en CIENCIAS FORESTALES

QUE PRESENTA:

SANDRA AMYRIS GIMATE BAÑOS

DIRECTOR DE TESIS:
FRANCISCO JOSÉ ZAMUDIO SÁNCHEZ Ph.D.

ASESORES:
DR. JOSÉ ARTEMIO CADENA MENESES
M.C. ALEJANDRO CORONA AMBRIZ



DIRECCION GENERAL ACADEMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXAMENES PROFESIONALES

Chapingo, Estado de México. junio del 2007



BIBLIOTECA DIVISION DE CIENCIAS FORESTALES



PROCESO JERÁRQUICO ANALÍTICO: ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN SU CONSISTENCIA

Tesis realizada por SANDRA AMYRIS GIMATE BAÑOS bajo la dirección del Comité Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

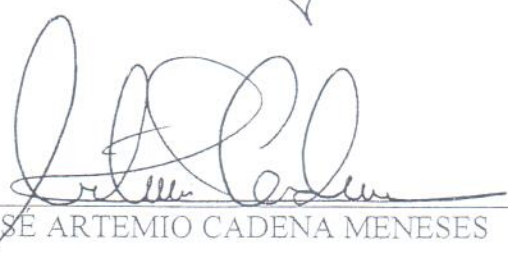
MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIAS FORESTALES

DIRECTOR:



FRANCISCO JOSÉ ZAMUDIO SÁNCHEZ, Ph. D.

ASESOR:



DR. JOSÉ ARTEMIO CADENA MENESES

ASESOR:



M. C. ALEJANDRO CORONA AMBRIZ

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi gratitud:

A la Universidad Autónoma Chapingo y a la División de ciencias Forestales por permitirme cursar en ellas esta maestría.

A CONACYT por la beca tan valiosa que me ayudo a poder realizar este postgrado.

A mis padres y mi hermanito por darme todo su amor, tiempo, apoyo y comprensión.

*Yo no estoy de acuerdo con lo que usted dice,
pero me pelearía para que usted pudiera decirlo.
Voltaire (1694-1778) Filósofo y escritor francés.*

A mi querido Doctor Zamudio, por su tiempo, sus regaños, sus enojos, su amistad, toda su sabiduría que me trato de enseñar, además de su filosofía de vida.

*quien viva en el pasado que le saquen un ojo,
quien lo olvide que le saquen los dos
Refrán Ruso*

A mis asesores Doctor Cadena y Maestro Corona por su tiempo, comentarios y sugerencias que contribuyeron a realizar un mejor trabajo.

*Si ayudo a una sola persona a tener esperanza, no habré vivido en vano.
Martin Luther King (1929-1968) Religioso estadounidense.*

A mi flaco Pepe Gaytan por enseñarme a ver la vida desde otra perspectiva.

*La amistad es un alma que habita en dos cuerpos;
un corazón que habita en dos almas.
Aristóteles (384 AC-322 AC) Filósofo griego.*

A mis amigos de la maestría que me apoyaron en este periodo de mi vida. (Lucero, Yanet, Margarito, Saul, Zocimo, Osyel y Juan)

*El éxito es aprender a ir de fracaso en fracaso sin desesperarse.
Winston Churchill (1874-1965) Político británico.*

A los compañeros del CUESTAAM por haberme dado asilo por una temporada para terminar esta tesis.

*La esperanza es el sueño del hombre despierto.
Aristóteles (384 AC-322 AC) Filósofo griego.*

DATOS BIOGRÁFICOS

Licenciada en Biología, egresada de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Xochimilco (1997-2001)

Trabajos realizados

2000 Estudio de caso: Análisis de la fragmentación del manglar, en la Región de Atasta, Campeche; y Evaluación del riesgo ecológico del manglar por efecto de las actividades humanas Región de Atasta, Campeche.

2001 Estudio de caso: Determinación de áreas óptimas, subóptimas y no óptimas para la agricultura en el municipio de Yecapixtla, Morelos, México.

2002-2003 Ordenamiento territorial basado en la identificación de áreas ecológicamente sensibles con criterios múltiples: estudio de caso Ribera del Río Copalita, Oaxaca.

Actualmente pasante de Maestría de Ciencias Forestales, estudios en Universidad Autónoma Chapingo (2005-2006)

Trabajos realizados

2005 Propuesta de ordenamiento territorial para el municipio de Tlaxco, Tlaxcala.

2006-2007 Tesis de maestría (Proceso jerárquico analítico: Análisis de sensibilidad en su consistencia.

Con experiencia en análisis con criterios múltiples, ecología del paisaje, ordenamiento territorial, sistemas de información geográfica.

**PROCESO JERÁRQUICO
ANALÍTICO:
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN
SU CONSISTENCIA**

El Proceso Jerárquico Analítico es un método que modela un determinado problema a través de la descomposición de sus partes, ordenando sistemáticamente sus componentes por medio de un análisis de comparaciones por pares de atributos, generalmente cualitativos, para asignarle pesos relativos a sus componentes, el cual mide la consistencia que tiene el tomador de decisión en la jerarquía alcanzada.

En este trabajo nos enfocaremos a analizar la sensibilidad del método con respecto a la consistencia que tiene el experto o tomador de decisión; tomando en cuenta el aspecto aleatorio que conlleva la medición de la consistencia del mismo para proporcionar niveles de significancia de los errores que puede cometer. Para ello se hará uso de la distribución Weibull.

**ANALYTICAL HIERARCHY
PROCESS:
SENSIBILITY ANALYSIS IN
CONSISTENCY**

The analytical hierarchy process is a method that models a specific problem by decomposing its elements into parts, systematically organizing such components through a comparative analysis of its attributes -- often qualitative -- to assign relative weights, this process measures the consistency that the decision maker exhibits in the achieved hierarchy.

In this work is analyzed the sensitivity of the method employed by the decision maker, taking into account the random variation of the consistency measurement, to assign significance levels to the errors that might be committed. With this propose the Weibull distribution will be used.

INDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
DESCRIPCIÓN DEL PROCESO JERÁRQUICO ANALÍTICO	3
APLICACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL	9
METODOLOGÍA.....	12
RESULTADOS	25
CONCLUSIONES.....	37
ANEXO	39
LITERATURA CITADA	40

ÍNDICE DE CUADROS Y FIGURAS

Cuadro 1. Probabilidad de obtener una matriz consistente en matrices recíprocas aleatorias, dependiendo del orden de la matriz	25
Cuadro 2. Estimaciones de los parámetros a , b y c de la distribución Weibull correspondiente a cada orden y sus respectivos coeficientes de variación.....	26
Cuadro 3. Niveles de significancia y sus percentiles asociados para una exponencial con parámetro uno.	28
Cuadro 4. Ejemplo de consistencia	30
Cuadro 5 Ejemplo de consistencia	31
Cuadro 6 Ejemplo de consistencia	31
Cuadro 7 Ejemplo de consistencia	32
Cuadro 8. Comparación de criterios para seleccionar la mejor ruta de tubería	33
Cuadro 9 Comparación de criterios para seleccionar la mejor ruta de tubería	34
Cuadro 10. Riqueza de naciones a través de su influencia en el mundo	36
Cuadro 11 Verificación al 1% de los resultados obtenidos con 50,000 matrices aleatorias	39
Cuadro 12 Verificación al 5% de los resultados obtenidos con 50,000 matrices aleatorias	39
Figura 1 Comparación entre los diferentes órdenes y el promedio de a , b y c	27

INTRODUCCIÓN

El Proceso Jerárquico Analítico (PJA) propuesto en 1979 por el investigador Thomas Lorie Saaty, logró en poco tiempo una gran aceptación por su fácil uso y entendimiento por el tomador de decisiones. Este método brinda una forma efectiva para la toma de decisiones en grupo o individualmente, mediante la imposición de una disciplina en el proceso de pensamiento grupal o personal.

Las aplicaciones más importantes del método se relacionan con: la planeación estratégica, asignación de recursos, toma de decisiones en costo - beneficio, física, industria, diseño, química, comportamiento en competencias, selección de proyectos, medicina, ecología, educación, portafolio de inversión, pronósticos, leyes, ingeniería de transporte, mercadotecnia, finanzas (Expert Choice, 2006).

Sin embargo, especialistas en la materia en todo el mundo han hecho duras críticas en lo referente a la escala que emplea, y a la medición de la consistencia, entre otras cosas Donegan *et al.*, (1992); Dodd *et al.*, (1995); Mújgan (2005); Peláez y Lamata (2003); Aguarón *et al.*, (2003). En ocasiones los problemas de decisión pueden ser tan complejos que pueden abrumar a los involucrados, ya que, demanda una manera compleja de pensar. Cuando se abordan problemas difíciles que implican gran cantidad de factores, las cosas cambian. Por tanto se necesita ver a los problemas de manera estructurada, a través de una configuración que refleje la interacción e interdependencia de los factores y que permite pensar de manera simple. Esto debe ser accesible y confiable. Cuando se piense utilizar el método PJA se recomienda tener especial cuidado en la estructura del problema de manera jerárquica y la

asignación de prioridades. Se sugiere revisar con más detalle este proceso en Saaty (1990a, 2001).

La motivación del presente trabajo es realizar un análisis de sensibilidad del método con respecto a la declaración de consistencia que existe entre la mayoría de los que estudian el PJA. El desarrollo de este trabajo no intenta desvirtuar al PJA, así como tampoco pretende convencer a los usuarios que utilicen otro método, sino orientarlos en el aspecto aleatorio que conlleva la medición de la consistencia del mismo y proporcionarles niveles de significancia de los errores que pueden cometerse al usar los límites superiores propuestos para el índice de consistencia usado en este trabajo el cual se compara con el de otros métodos.

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO JERÁRQUICO ANALÍTICO

El PJA es un modelo que ejemplifica la manera en que la mente humana conceptualiza y estructura un problema complejo. La mente humana agrupa una multitud de elementos que están comprendidos en un problema de acuerdo a propiedades compartidas. Este proceso es repetitivo y forma una estructura bien definida llamada “jerarquía”. Es decir, un sistema de niveles estratificados, cada uno compuesto de múltiples elementos o factores (Saaty, 1990a).

Se podría definir al PJA como un método que modela un determinado problema a través de la descomposición de sus partes, jerarquizando sistemáticamente sus componentes por medio de un análisis de comparaciones por pares de atributos, generalmente cualitativos, para asignarle pesos relativos a sus componentes, el cual mide la consistencia que tiene el tomador de decisión en la jerarquía alcanzada.

Uno de los puntos más interesantes de este método es que al evaluar factores cualitativos, permite asignar pesos relativos a estos factores, por medio de la comparación por pares (Saguir, 2005). Respecto a los factores cuantitativos, la ponderación es sencilla y trivial.

Otro punto fundamental del PJA es la comparación por pares (Yi-Chung y Jung-Fa, 2006; Triantaphyllou, 2000), esto se puede utilizar para determinar los pesos relativos de criterios o de alternativas individuales. La comparación por pares es usualmente cuantificada en una escala lineal o una escala de intensidad de nueve puntos propuesta por Saaty (1990b). Con esta escala lineal, cada frase lingüística indica un valor en un sistema de valores disponibles. Los cuales son $\{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$, también pueden ser utilizados los inversos de estos números. Éstos se colocan dentro de una matriz recíproca positiva $n \times n$, la cual sigue la regla, si $a_{ij} = \alpha$, entonces $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$ (Peláez y Lamata, 2003), conocida como una matriz de comparación por pares. A , en general se escribe como $A = \{a_{ij}\} \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n$.

Donde $a_{ij} \in \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$, y $a_{ii} = 1$, $1 \leq i, j \leq n$. a_{ij} , representa el juicio de la comparación del atributo i con el atributo j . Además, se tiene la relación $a_{ij} = 1/a_{ji}$.

Que una matriz A sea consistente, significa que sus componentes fueron ordenadas y jerarquizadas sistemáticamente en orden de importancia y sus comparaciones tienen una estructura lógica. Para que sean más fáciles las comparaciones se deben de identificar los extremos de dominancia, luego identificar el componente medio y poner el resto de éstos en las posiciones faltantes. Una vez establecidos, la comparación por pares debe ser sumamente lógica ya que uno no debe de poner valores más bajos con respecto al nivel inmediato superior, porque esto indicaría una inconsistencia, sólo se debería de poner el mismo valor que el nivel inmediato superior o valores menores a este último.

Otra forma de obtener una matriz A consistente, sería suponer que “los juicios” de medición sean meramente físicos, esto es, una asignación de pesos precisos o exactos $w_1, w_2, \dots, w_n$. Entonces, la relación que existe entre el peso de w_i y el juicio de a_{ij} se plasma con $\frac{w_i}{w_j} = a_{ij}$ en donde $i, j = 1, 2, \dots, n$ y la matriz A tiene entonces la forma:

$$A = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_1 & w_2 & w_n \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{bmatrix}$$

Una vez establecida la matriz sabemos que el eigenvalor de dominancia “ $\lambda_{m\acute{a}x}$ ” es igual al orden de la matriz y todos los demás eigenvalores son cero, lo cual da una consistencia perfecta, es decir, $\lambda_{m\acute{a}x} = n$, significa una consistencia óptima (Saaty, 1990a).

Sin embargo, no sería realista que estas relaciones se mantengan en casos generales. Esto es, generalmente las mediciones no son exactas a través de un juicio por lo que se deben permitir algunas desviaciones y aceptar que A es comúnmente inconsistente cuando $\lambda_{m\acute{a}x}$ es mayor que n .

En este trabajo centraremos la atención en la consistencia de los casos generales, entendiendo a ésta como una función del máximo eigenvalor o eigenvalor de dominancia $\lambda_{m\acute{a}x}$ proveniente de juicios por pares de atributos que inciden en una

respuesta de modo no conocido con precisión y, a medida que éste se aleja del valor del orden de la matriz, la información en la matriz señala mayor inconsistencia.

La forma propuesta por Saaty para evaluar la consistencia es por medio del índice de consistencia ($\acute{I}C$) el cual determina el grado de inconsistencia que existe en la matriz A como:

$$\acute{I}C = \frac{\lambda_{\acute{m}ax} - n}{n - 1}$$

Éste se contrasta en una razón de consistencia (RC) con un índice aleatorio ($\acute{I}A$). Este $\acute{I}A$ en Saaty se determinó a través de la simulación de matrices aleatorias recíprocas, siendo 100 las repeticiones para las matrices de ordenes 3x3 hasta 10x10, y 500 para los órdenes 11x11 hasta 15x15. Se tomó como $\acute{I}A$ el promedio de los $\acute{I}C$ de las repeticiones en cada orden correspondiente, estableciendo estos valores en una tabla (Saaty, 1990a). Tiempo después, Saaty (2001) estableció nuevos valores a esta tabla. Por lo anterior, Saaty ha sido criticado (Donegan *et al.*, 1992; Dodd *et al.*, 1995; Aguarón *et al.*, 2003; William y Philip, 2006). Donegan *et al.* (1992) y Dodd *et al.* (1995) estiman y proponen una nueva tabla utilizando métodos estadísticos, donde se consideran los percentiles y sus errores estándar correspondientes a las distribuciones frecuenciales de los $\acute{I}C$ de las matrices aleatorias.

La razón de consistencia busca comparar la consistencia del experto contra una consistencia que sin ser la perfecta (la cual es necesaria porque el experto tiene errores) sea aceptable, en términos de que la probabilidad de ocurrencia de esa casi consistencia de una matriz aleatoria sea muy pequeña. Es decir, se permiten errores

del experto en la matriz de información pero no más allá de cierto límite que consiste en que la probabilidad de que ocurran estos errores en una matriz aleatoria sea muy pequeña. Ese límite es el $\dot{I}A$.

Saaty (1990a) establece la regla de $\dot{I}C/\dot{I}A < 0.1$ para aceptar que una matriz sea considerada consistente, de otro modo la matriz es decretada inconsistente y debe ser reconsiderada por los expertos o tomadores de decisión. Así, se establece un contraste entre la consistencia de los expertos contra el de matrices aleatorias que representan a tomadores de decisión inexpertos (aquellos que llenan la matriz al azar o a matrices aleatorias) y como lo hacen al azar se genera un proceso aleatorio con resultados (en este caso los $\dot{I}C$ resultantes de matrices aleatorias) que conforman una distribución de frecuencias. Este proceso aleatorio consecuentemente justifica el ajustar los resultantes $\dot{I}C$ de matrices aleatorias a una función de densidad de probabilidad o de otros métodos de inferencia estadística.

Como se señaló, Saaty (2001) modifica la regla de decisión de la RC en donde establece que las matrices de orden $n=3$ no deben superar el valor 0.05, las de orden $n=4$ el valor de 0.08 y de $n=5$ hasta 15 se aplica el 0.1. Diversos autores (Dodd *et al.*, 1995; Yi-Chung y Jung-Fa, 2006) critican esta regla de decisión, ya que Saaty (1990a: 21) no menciona el fundamento para llegar a esa conclusión. No obstante, Dodd *et al.* (1995) proponen un argumento para este valor límite de 0.1 de la RC .

Existen diferentes trabajos donde proponen formas alternas para evaluar la consistencia del PJA (Dinegan y Dodd, 1991; Dodd *et al.*, 1995; Aguarón *et al.*, 2003; William y Philip, 2006; Yi-Chung y Jung-Fa, 2006).

Así, las formas alternas muestran que se puede estudiar del proceso aleatorio los resultantes $\dot{I}C = \frac{\lambda_{m\acute{a}x} - n}{n - 1}$, como lo hace Saaty, usando el promedio de ellos de muchas matrices aleatorias, se pueden ajustar a una función de densidad de probabilidad o se pueden usar otras formas. En este trabajo se desarrolla la segunda.

Se podría ajustar, en lugar de $\dot{I}C = \frac{\lambda_{m\acute{a}x} - n}{n - 1}$, $\lambda_{m\acute{a}x}$ a una función de densidad con parámetro de localidad y escala (y posiblemente forma) que indique la transformación apropiada de localidad y escala, en lugar de n y $n-1$, respectivamente, de modo, que tal transformación del $\dot{I}C$ tenga una distribución probabilística independiente de n como la han buscado Saaty y otros investigadores.

Para ajustar $\lambda_{m\acute{a}x}$ se pueden usar varias funciones de densidad. Algunos investigadores (Dodd *et al.*, 1995) declaran que la distribución log-normal es la más apropiada porque aseguran que el $\dot{I}C$ de Saaty sigue una distribución de ese tipo (en una escala de intervalos). Aunque Saaty (1990a); y Dinegan y Dodd (1991) declaran que utilizan una distribución uniforme (en la escala ordinaria). La suposición de una distribución uniforme conduce a una reducción en el $\dot{I}A$ estimado. Este aspecto es objeto de continua investigación por parte de los especialistas.

Una distribución que ofrece una gran flexibilidad para variables no negativas con parámetro de localidad, escala y forma es la distribución Weibull, la cual mostró ajustar los $\lambda_{m\acute{a}x}$ de matrices aleatorias muy favorablemente y por ello fue seleccionada en este trabajo.

APLICACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN WEIBULL

La distribución Weibull, que recibe su nombre del investigador físico sueco que la desarrolló, Waloddi Weibull en 1939, quien la usó para representar la distribución de la resistencia de ruptura de materiales (Jhonson,1970), al considerar la tasa de fallo variable, siendo utilizada por su gran flexibilidad, al poder ajustarse a una gran variedad de funciones de confiabilidad de dispositivos o sistemas (Tamborero, 2006). Se podría considerar como fallo un $\lambda_{m\acute{a}x} > n$, ya que en esa situación no se tiene, una consistencia perfecta, sin embargo tomando a n como el límite superior de fallo es una condición muy exigente para un experto, aún para el mejor de ellos en un problema determinado, por lo que un límite práctico puede ser $n + x_{\alpha}$, de manera que se declare un fallo cuando $\lambda_{m\acute{a}x} > n + x_{\alpha}$, donde x_{α} se escoja de modo que $p(\lambda_{m\acute{a}x} > n + x_{\alpha}) = \alpha$, si $\lambda_{m\acute{a}x}$ representa la variable aleatoria resultante de calcular el máximo eigenvalor de matrices aleatorias, para un orden determinado y α es un valor como 0.01, 0.015, 0.05.

Existen diferentes tipos de soluciones analíticas para la estimación de los parámetros de la distribución Weibull, aquí se usó la regresión no lineal.

La distribución Weibull permite estudiar cuál es la distribución de fallos de un componente clave de seguridad que pretendemos controlar y que a través del registro de fallos se observa que éstos varían a lo largo del tiempo y dentro de lo que se considera tiempo normal de uso. El método no determina cuáles son las variables que

influyen en la tasa de fallos, tarea que quedará en manos del analista, pero al menos la distribución Weibull facilitará la identificación de aquellos y su consideración, aparte de disponer de una herramienta de predicción de comportamientos.

La tasa de fallos se puede escribir, en función de la confiabilidad, de la siguiente

forma: $\lambda(t) = -\frac{d[R(t)]}{R(t)dt}$.

Siendo $\lambda(t)$: tasa de fallos; $R(t)$: confiabilidad; t : tiempo.

En 1951, Weibull propuso que la expresión empírica más simple para representar una

gran variedad de datos reales podía ser: $\int \lambda(t)dt = \left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^\beta$

Por lo que la confiabilidad será: $R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^\beta\right]$, siendo t_0 : parámetro

inicial de localidad; η : parámetro de escala; β : parámetro de forma.

Se ha podido demostrar que gran cantidad de representaciones de confiabilidades reales pueden ser obtenidas a través de esta ecuación, que como se mostrará, es de muy fácil aplicación.

La distribución de Weibull se representa normalmente por la función acumulativa de

distribución de fallos: $F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta}\right)^\beta\right]$ (I)

En donde $F(t)$: Confiabilidad o función acumulativa de fallos y la ecuación (I) sólo se aplica para valores de $(t - t_0) \geq 0$. Para valores de $(t - t_0) < 0$, las funciones de densidad y las tasas de fallos valen 0. Las constantes que aparecen en la expresión anterior tienen una interpretación física:

- t_0 es el parámetro de posición o de inicio, define el punto de partida u origen de la distribución.
- η es el parámetro de escala, extensión de la unidad en el eje del tiempo.

Cuando $(t - t_0) = \eta$ la confiabilidad viene dada por:

$$R(t) = \exp[-(1)^\beta] = 1/e = 1/2.718 = 0.368 (36.8\%).$$

Entonces, la constante η representa también el tiempo, medido a partir de $t_0 = 0$, donde el 63.2 % de la población se espera que falle, dado que $F(\eta + t_0) = 1 - 0.368 = 0.632$, cualquiera que sea el valor de β , ya que, como se observa su valor no influye en el cálculo realizado.

- β es el parámetro de forma y representa la pendiente de la recta describiendo el grado de variación de la tasa de fallos.

METODOLOGÍA

Las razones de inferencia estadística para seleccionar a la función de densidad de probabilidad Weibull son:

1. Es una función muy flexible que se puede usar para explicar variables que colapsan después de cierto punto, como en este trabajo, donde la consistencia empieza a colapsarse desde el inicio, es decir, a partir de valores mayores que n .
2. Si $\lambda_{máx}$ tiene una distribución Weibull (a, b, c) , entonces

$$y = \left(\frac{\lambda_{máx} - a}{b} \right)^c \sim \text{Exp}(1)$$

a : parámetro de localidad (donde inicia la distribución); b : parámetro de escala y, c : parámetro de forma. Donde $\text{Exp}(1)$ es una función de densidad de probabilidad exponencial con parámetro uno, es decir totalmente conocido, lográndose con ello un

$$IC = \left(\frac{\lambda_{máx} - a}{b} \right)^c \text{ cuya función de densidad es independiente de } n.$$

El parámetro a , donde inicia la distribución Weibull, a priori se consideraría que debería ser n , el orden de la matriz, porque sabemos que si el eigenvalor más grande es n entonces la matriz es consistente y a partir de ahí se inicia un alejamiento de la misma. No obstante, hay dos razones que invalidan el anterior argumento.

- (a) La distribución que se busca, no es la generada por los expertos, quienes podrían alcanzar la consistencia, en cuyo caso el valor de $\alpha=n$, y sus errores (pequeños si son certeros en sus juicios) se alejarán poco del orden de la matriz n .
- (b) La distribución que se busca es la de los $\lambda_{m\acute{a}x}$ de matrices aleatorias, las cuales, por obviedad difícilmente alcanzarán la consistencia, especialmente para matrices de orden grande (en esencia mayores que cinco) y consecuentemente los errores de consistencia que mostrarán serán mayores, alejándose de n .

Lo anterior se demuestra encontrando la probabilidad de que una matriz recíproca aleatoria de orden n sea consistente, lo que se hace en seguida.

La idea de consistencia se puede expresar a través de dos proposiciones lógicamente equivalentes:

- (a) El máximo eigenvalor de la matriz $\lambda_{m\acute{a}x}$ es igual a n .
- (b) Las comparaciones por pares que realicen los expertos usando la escala 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, $1/7$, $1/8$, $1/9$ de los n atributos $A_1, A_2, \dots, A_n$, permite una jerarquización de ellos, $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}$, donde $A_{(1)}$ es el atributo, de los n , que recibe por parte de los expertos el más alto rango y, análogamente, $A_{(j)}$ es el atributo que recibe el j -ésimo más alto rango por parte de los expertos. De este modo, si la matriz es consistente, los atributos pueden ordenarse de mayor a menor rango

$A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}$, donde, si el rango asociado a $A_{(j)}$ se denota por r_j , entonces $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$.

Para el cálculo de las probabilidades, se usará la versión (b), y se hará contando las posibilidades que tiene un proceso aleatorio de asignarle valores a las r_j de modo que queden ordenadas. Los valores que pueden tomar las r_j en la comparación por pares son 1, 2, 3, ..., 9 y, para hacerlo sistemáticamente se asignará un valor a r_1 , es decir el atributo que resulte con el mayor rango de jerarquía y a partir de él las posibilidades que tienen los demás rangos r_j para $j \geq 2$, de modo que el ordenamiento final corresponde a uno equivalente al de una matriz consistente. Una vez contadas las posibilidades de que un proceso aleatorio configure un ordenamiento como el señalado y que es equivalente a una matriz consistente, se dividirá este número de posibilidades entre el número total de ellas en el proceso.

Lo anterior se logra si se piensa en que el experto antes de realizar las comparaciones por pares hace un ordenamiento inicial del atributo que le merezca el mayor rango al que le parezca de menor jerarquía. Esto induce a que en la parte triangular superior de la matriz de comparaciones, todos los valores sean mayores o iguales a uno. Lo anterior en un proceso regular puede no ser transparente al experto, pero para el conteo es totalmente legítimo.

Note que si $r_1 = a$ ($a = 1, 2, \dots, 9$), entonces $r_2 \leq a$. Del mismo modo, si $r_2 = b$, entonces $r_3 \leq b$ y así en seguida. Así debe ser para que, si estas comparaciones fueran trasladadas a una matriz recíproca, la misma sea consistente.

Para ilustrar el proceso, se hará para $n=3$. En este caso se tienen los rangos r_1 , r_2 y r_3 que deben ser asignados a valores ordenados como se mencionó antes.

(1) Si $r_1=1$ (es decir, al atributo con el mayor rango se le asigna el valor más bajo), los rangos r_2 y r_3 , forzosamente deben ser igual a uno porque es la única forma en que queden ordenadamente. De este modo, sólo hay una posibilidad de que r_1 , r_2 y r_3 queden ordenados cuando $r_1=1$. Observe que quedaban dos rangos para asignarles un valor y cero valores (ya no hay valores menores que uno) para ser asignados a estos rangos, las combinaciones son $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, además de los cero valores restantes se seleccionaron cero de ellos para ser asignados, es decir se seleccionaron $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ valores de los cero valores disponibles.

(2) Si $r_1 = 2$, ahora los dos rangos restantes pueden ser llenados con el mismo número o con el valor uno. Si se asigna el mismo número, significa que del número restante de valores, en este caso, uno que es el uno, no se considera ninguno, es decir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ posibilidades y hay $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ posibilidades en los dos rangos restantes para no ser ocupados. Las combinaciones en que esto ocurre son $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, si se ocupa el valor uno en cualesquiera de los dos rangos restantes, este tiene $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ posibilidades para ello y las posibilidades de tomar

este valor uno de un valor restante que se podía usar son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, así las

posibilidades totales de que se ocupe el uno son $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Note que de las

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ posibilidades de ocupar el uno, en ambas, arriba del lugar que ocupe el

uno, sólo se puede tener el valor de dos y debajo de él, el valor de uno. Así, el

total de posibilidades cuando $r_1 = 2$ es $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) Si $r_1 = 3$, solo se pueden colocar el uno y dos en los restantes rangos. Si de

estos dos restantes no se selecciona ninguno y se coloca en los dos rangos

restantes ningún valor, las posibilidades son $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si de los dos valores

restantes se selecciona uno y éste se asigna a uno de los dos rangos restantes

se tienen $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ posibilidades. Las $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$ posibilidades serían

3 3 3 3

2 3 1 3 donde el valor restante que se coloca, arriba de él se repite el tres

2 2 1 1

y debajo de él se repite el mismo. Si los dos valores restantes se seleccionan y

se asignan a los dos rangos restantes hay $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ posibilidades, es decir, la

3

única posibilidad es 2. En este último caso, es importante notar que los dos

1

valores seleccionados de los dos restantes se ordenan y de ese modo se

asignan a los rangos disponibles. De lo anterior las posibilidades para el caso

$$r_1 = 3 \text{ son } \binom{2}{0} \binom{2}{0} + \binom{2}{1} \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \binom{2}{2}.$$

(4) Si $r_1 = 4$, los restantes dos rangos pueden tomar los valores uno, dos y tres. Si

no se selecciona ninguno de los tres restantes, hay $\binom{2}{0} \binom{3}{0}$ posibilidades.

Recuerde, este caso es el que repite el valor de cuatro en los tres rangos. Si se

selecciona un valor de los tres restantes y se tienen $\binom{2}{1}$ posibilidades de

asignarlo en los dos rangos restantes, se tienen, $\binom{2}{1} \binom{3}{1} = 6$ posibilidades de

hacerlo y el arreglo correspondiente sería

4	4	4	4	4	4
1	4	2	4	3	4
1	1	2	2	3	3

seleccionan dos valores de los tres restantes y se tienen $\binom{2}{2}$ posibilidades de

asignarlos en los dos rangos restantes se tienen $\binom{2}{2} \binom{3}{2}$ posibilidades de

hacerlo. Aquí también tiene que ser considerado que los dos valores que se toman de los tres restantes se deben ordenar antes de ser asignados a los dos rangos disponibles para que las asignaciones a r_1 , r_2 y r_3 queden ordenadas y, al trasladar estos valores a una matriz recíproca, por su ordenamiento, la hagan consistente.

Es decir las $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$ posibles selecciones de los tres valores restantes

serían $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, las cuales se deben ordenar de mayor a menor, es

decir, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y cada una de ellas tiene $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ forma de ser

asignada a los dos rangos restantes, así todos los arreglos para $r_1 = 4$ con

$$4 \quad 4 \quad 4$$

otros dos valores de los tres restantes son $2 \quad 3 \quad 3$.

$$1 \quad 1 \quad 2$$

Por último, como sólo hay dos rangos adicionales a los que se deben asignar valores, aunque el número de valores restantes sea tres, no se pueden seleccionar más de dos de ellos. Esta observación será pertinente en el resto de los conteos, es decir, $r_1 = 5, 6, 7, 8, 9$.

De modo que para $r_1 = 4$ hay $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

posibilidades de ordenamientos que se traducen a una matriz recíproca consistente.

(5) Para $r_1 = 5$ el esquema anterior se repite, de hecho se ha venido repitiendo

desde $r_1 = 1$. Aquí queda como: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De continuar hasta $r_1 = 9$, quedaría $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Todo lo anterior se puede resumir como sigue:

$$\begin{aligned}
r_1 = 1, & \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
r_1 = 2, & \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
r_1 = 3, & \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
r_1 = i, & \quad \begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad i = 4, 5, \dots, 9
\end{aligned}$$

Se debe recalcar lo siguiente:

- Note que $n-1 = 2$ porque se está en el caso $n = 3$.
- Cada término tiene dos factores y cada uno de ellos es una combinatoria que de un número ($n-1$ ó $i-1$), tome j y este número j , no puede ir más allá del mínimo entre $n-1$ e $i-1$.
- Para este caso ($n = 3$) $n-1 = 2$ es constante, pero $i-1$ cambia según el valor que toma r_1 .
- Cuando $i \leq 3$, $i-1 \leq 2 = n-1$ y entonces el mínimo es $i-1$; en los demás valores el mínimo es $n-1 = 2$.

De las anteriores observaciones, para $r_1 = i$ con $i = 1, 2, \dots, 9$, las posibilidades de un ordenamiento que se traduzca a una matriz recíproca consistente es:

$$\sum_{j=0}^m \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix} \text{ con } m = \min\{n-1, i-1\} \text{ y, el número total de posibilidades es,}$$

$$i.e., n=3 \sum_{i=1}^9 \sum_{j=0}^m \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix} \text{ donde } m = \min\{n-1, i-1\}.$$

Es fácil verificar que la anterior fórmula es válida para cualquier $n > 3$. Para cualquier valor de n , si $r_1 = i$, sólo se pueden usar $i-1$ valores restantes en los $n-1$ rangos disponibles, los j valores que se seleccionan no pueden ser más que los restantes ($i-1$) ni más de los rangos disponibles ($n-1$).

Por otro lado, en una matriz recíproca de orden n basta llenar la parte superior de la diagonal y se tiene $\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ posiciones que pueden ser ocupadas aleatoriamente por 9, 8, 7, ..., 2, 1, 1/1, 1/2, ..., 1/9 (18 posibilidades) por lo que el número total posible de matrices recíprocas construidas al azar es $18^{n(n-1)/2}$. Observe que en este caso los elementos de la diagonal principal no tienen porque ser mayor que uno, ya que se pueden presentar toda clase de inconsistencias producidas por los expertos en las comparaciones por pares. Así, la probabilidad de que ocurra al azar

una matriz recíproca de orden n totalmente consistente es
$$\frac{\sum_{i=1}^9 \sum_{j=0}^m \binom{n-1}{j} \binom{i-1}{j}}{18^{n(n-1)/2}}$$

dónde $m = \min\{n-1, i-1\}$. En la parte de resultados se presenta dicha probabilidad.

Una vez establecida la probabilidad de que aparezca una matriz consistente se ajustó la distribución Weibull para proponer una tabla en función de esta distribución. Se utilizó el sistema de SAS (1999) para hacer la simulación de matrices aleatorias, primero se generaron 50, 000 matrices recíprocas positivas aleatorias de diferentes órdenes, desde 4 hasta 15, con valores que oscilan entre 1/9, 1/8, ..., 8, 9. Estos valores son colocados en la parte triangular superior y su inverso en la parte

triangular inferior. Cabe repetir que en la metodología de Saaty sólo se hicieron simulaciones con 500 matrices aleatorias y para estimar los valores del $\dot{L}A$ se sacó el promedio de los $\dot{I}C$ de estas (Saaty, 1990a). De acuerdo con diferentes autores, Dinegan y Dodd, (1991), y Dodd *et al.* (1995), la evidencia visual muestra que esta simulación es pobre para determinar este índice. No obstante existe una distribución frecuencial del $\dot{I}C$ de matrices aleatorias, de las cuales de manera formal se debería seleccionar un percentil contra el cual comparar, como lo hace Dodd *et al.* (1995), donde este percentil está ligado al error que se acepta que cometa el experto. Ha sido del interés de Saaty (1990a) y diferentes investigadores (Dinegan y Dodd, 1991; Dodd *et al.*, 1995; Aguarón *et al.*, 2003; William y Philip, 2006), encontrar una transformación del máximo eigenvalor $\lambda_{m\acute{a}x}$ en función de n , por que de este parámetro depende fundamentalmente $\lambda_{m\acute{a}x}$, de modo que el índice de consistencia final sea lo más invariante a n . Como ya se ha mencionado, Saaty (1990a) define el

$$\dot{I}C = \frac{\lambda_{m\acute{a}x} - n}{(n - 1)}.$$

Por lo anterior, el trabajo buscó una respuesta formal y planteó un nuevo mecanismo para determinar la consistencia de las matrices. Se decidió modificar la metodología propuesta por Saaty (1990a) en los siguientes aspectos: (1) la estimación de los valores del índice aleatorio, (2) la transformación que haga a la distribución probabilística del índice de consistencia final invariante a n .

Así, los excedentes de $\lambda_{m\acute{a}x}$, de un parámetro a , se modelarán con una distribución

$$\text{Weibull } (a, b, c), \text{ i.e., } F(\lambda_{m\acute{a}x}) = 1 - \exp\left\{\left(\frac{\lambda_{m\acute{a}x} - a}{b}\right)^c\right\} \quad (\text{II})$$

representa la función de distribución acumulativa de $\lambda_{m\acute{a}x}$ donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

Para matrices de orden n (desde 4 hasta 15) se trata de estimar los parámetros a , b y c . Se realizó un proceso iterativo 10 veces y en cada iteración se simularon 50,000 matrices aleatorias a las que se les calculó el máximo eigenvalor $\lambda_{m\acute{a}x}$.

Posteriormente, se acomodaron los valores de $\lambda_{m\acute{a}x}$ de cada una de las 50,000 matrices aleatorias, de menor a mayor, una vez acomodados estos datos se procedió a sacar la función de distribución acumulada muestral (FDAM), utilizando los siguientes valores $0.625/(50000+0.25)$ para el primer valor, el segundo valor es $0.625/(50000+0.25)+(2-1)*(1/(50000+0.25))$, el siguiente valor se calculó por $0.625/(50000+0.25)+(3-1)*(1/(50000+0.25))$, así sucesivamente, hasta formar 50,000 números.

A continuación, se estimaron los parámetros de la correspondiente distribución Weibull, ajustada por regresión no lineal, es decir, la FDAM contra los valores $\lambda_{m\acute{a}x}$, utilizando la ecuación (II). Para realizar la estimación de los percentiles críticos para declarar consistente a la matriz se utilizaron los valores de $\lambda_{m\acute{a}x}$ cercanos a n , y la correspondiente parte de la FDAM, por lo que, para $n=5, 6, \dots, 15$ sólo se tomaron los primeros 25000 valores y para $n=4$ sólo los primeros 7000. La razón de usar sólo éstos es que, las probabilidades de que en estos ordenes ($n=5, 6, \dots, 15$) se encuentre una matriz recíproca aleatoria es extremadamente baja, de modo que, los valores grandes de en estos casos, es decir, aquellos que se alejan mucho del orden de la matriz, son muy frecuentes, haciendo la cola derecha de la

distribución muy pesada y afectando las estimaciones de a , b y c . Además, el interés son percentiles bajos del 1% y 5%. En el caso de $n=4$, donde hay una probabilidad, algo significativa, de encontrar una matriz recíproca aleatoria consistente se usan sólo las 7,000 observaciones más pequeñas para hacer más precisas las estimaciones de los percentiles mencionados.

Los valores considerados definitivos para la estimación de los parámetros son el promedio obtenido de las diez iteraciones mencionadas, los cuales se denotan como a , b y c .

A estos valores se les estimó también su coeficiente de variación, para medir la dispersión relativa del conjunto de estimaciones a , b y c . Una vez estimados los valores de a , b y c , correspondientes a las excedencias de $\lambda_{m\acute{a}x}$ de n , se sabe que

$\acute{I}C = \left(\frac{\lambda_{m\acute{a}x} - a}{b} \right)^c$ se distribuye como una variable exponencial con parámetro uno

puesto que $\lambda_{m\acute{a}x}$ se distribuye $(a, b \text{ y } c)$. El valor de $\acute{I}C$ representa la propuesta de este trabajo, es decir, el índice que se tomará para declarar la consistencia o inconsistencia de la matriz y se hará contra el percentil correspondiente de una distribución exponencial con parámetro uno, de modo que la probabilidad de declararla consistente, cuando de hecho es aleatoria sea α (0.05, 0.01, 0.001), el nivel de significancia de aceptar como consistente una matriz que en realidad es aleatoria. Así, si se desea no aceptar fallos aleatorios por encima de una probabilidad α y E_α representa el percentil asociado al nivel de significancia de tamaño α de la distribución exponencial con parámetro uno, se declara la matriz como consistente si

$\dot{I}C < E_{\alpha}$. Finalmente, hay que destacar que si $\dot{I}C$ es más pequeño que el valor ap , automáticamente la matriz se declara consistente.

Por otra parte, se propone la estimación del grado exacto de inconsistencia que tiene una matriz, esto es, que en vez de decir si la matriz es consistente o no de acuerdo a lo dicho antes, se propone se estime el resultado verdadero de inconsistencia a través del nivel de significancia muestral (nsm) que tenga la matriz bajo análisis, el cual se obtiene con $nsm = 1 - e^{-\dot{I}C}$.

También, este número se puede comparar contra el nivel de significancia (ns) adoptado y si el primero es menor que el segundo la matriz se declara consistente.

RESULTADOS

Se presenta a continuación las probabilidades de obtener una matriz consistente, dentro de la simulación de las matrices recíprocas aleatorias (Cuadro 1).

Cuadro 1. Probabilidad de obtener una matriz consistente en matrices recíprocas aleatorias, dependiendo del orden de la matriz

Orden de la matriz n	Probabilidad
3	0.1954733
4	0.000176
5	7.3755E-9
6	1.496E-14
7	1.508E-21
8	7.699E-30
9	2.018E-39

Orden de la matriz n	Probabilidad
10	2.747E-50
11	1.959E-62
12	7.365E-76
13	1.469E-90
14	1.56E-106
15	8.89E-124

Se observa que en matrices de orden pequeño, como es el caso de $n=3$, por cada 10,000 matrices recíprocas aleatorias se espera que aparezcan 1,954 matrices consistentes, en cambio para $n=4$ se observa que por cada 10,000 matrices recíprocas aleatorias se espera una sola matriz consistente. Las probabilidades de que ocurra una matriz consistente en ordenes mayores son muy pequeñas como se puede apreciar en el Cuadro 1; a partir de $n=6$ es casi insignificante.

Las estimaciones de los parámetros a , b y c de las distribuciones Weibull ajustadas a cada uno de los órdenes de las matrices positivas recíprocas aleatorias, con los que se

construyen los $\hat{IC} = [(\lambda_{\max} - a)/b]^c$ propuestos, se muestran en el Cuadro 2.

También se muestran los coeficientes de variación de las diez iteraciones.

Cuadro 2. Estimaciones de los parámetros a , b y c de la distribución Weibull correspondiente a cada orden y sus respectivos coeficientes de variación.

Orden	a	b	c	$a (CV)$	$b (CV)$	$c (CV)$
4	3.9944	2.0230	1.5897	0.0014	0.0047	0.0090
5	5.3114	4.6847	1.7169	0.0046	0.0060	0.0154
6	5.9524	6.6796	3.1028	0.0125	0.0112	0.0178
7	7.3541	7.9139	4.1198	0.0332	0.0292	0.0442
8	9.8692	8.0523	4.3899	0.0238	0.0279	0.0407
9	12.4530	8.1094	4.5915	0.0205	0.0299	0.0415
10	15.1854	8.0306	4.6642	0.0108	0.0201	0.0270
11	18.0819	7.7889	4.5572	0.0136	0.0304	0.0393
12	20.9387	7.5997	4.4558	0.0133	0.0356	0.0486
13	23.6235	7.5664	4.4995	0.0144	0.0432	0.0613
14	26.3032	7.5342	4.5397	0.0117	0.0406	0.0524
15	29.1017	7.3912	4.4712	0.0091	0.0344	0.0493

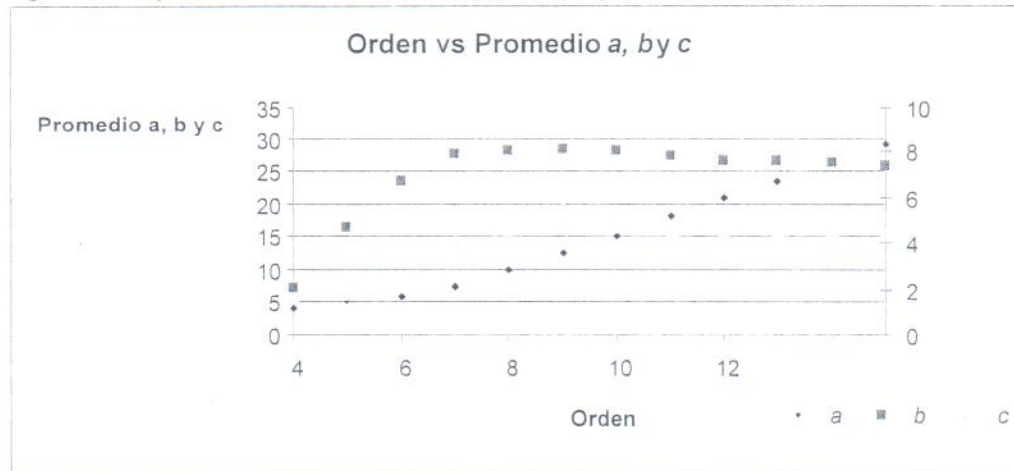
Como se menciona, el parámetro a no es n . Se observó que dicho parámetro se va alejando de n entre mayor sea el orden de la matriz, y así la cola derecha cada vez es más pesada, o de modo equivalente los $\lambda_{\max}$ tienden a alejarse de n , lo que hace poco probable que exista una matriz aleatoria consistente entre mayor sea su orden, como se apreció en el Cuadro 1.

Se observa que para las matrices de orden menor, 4, 5 y 6, las estimaciones de los parámetros b y c de la distribución Weibull se salen un poco de la tendencia que tienen los demás valores, esto se debe, a la probabilidad de que aparezcan matrices consistentes dentro de las aleatorias, en estos casos son más altas las probabilidades que en los demás ordenes, aunque para $n=6$ ya es insignificante.

Por otra parte, se observa que los coeficientes de variación son bajos en todos los diferentes ordenes, lo que explica que no existe una dispersión alta de las estimaciones (ver Cuadro 2).

En la Figura 1 se presenta el comportamiento de los promedios de a , b y c , respecto a su orden.

Figura 1 Comparación entre los diferentes órdenes y el promedio de a , b y c .



Se presentan también, en los Cuadros 11 y 12, de la sección de Anexos, la verificación de los resultados obtenidos aplicando la función del $\hat{IC}$ propuesto, al 5%

y 1%, en una simulación posterior de 50,000 matrices aleatorias, los cuales son totalmente consistentes con lo esperando.

Por otra parte, en el Cuadro 3 se presentan para diferentes niveles de significancia (α), los percentiles asociados (E_α).

Cuadro 3. Niveles de significancia y sus percentiles asociados para una exponencial con parámetro uno.

α	E_α
0.001	0.0010
0.002	0.0020
0.003	0.0030
0.004	0.0040
0.005	0.0050
0.006	0.0060
0.007	0.0070
0.008	0.0080
0.009	0.0090
0.01	0.0101
0.02	0.0202
0.03	0.0305
0.04	0.0408
0.05	0.0513
0.1	0.1054
0.2	0.2231
0.3	0.3567
0.4	0.5108
0.5	0.6931

Para ilustrar el $\acute{I}C$ propuesto se usan varios ejemplos, los cuales pueden ser tan sencillos como seleccionar matrices recíprocas cualesquiera, como también ejemplos reales y complejos.

El interior cuadro se puede usar de dos formas. Dado un ns de tamaño α para probar la consistencia de una matriz se puede obtener E_α para compararlo con el $\acute{I}C$ y declarar inconsistencia si solo si $E_\alpha < \acute{I}C$. También, dado el $\acute{I}C$ se puede localizar

su valor en la columna de los percentiles y en la columna buscar el nivel de significancia el valor del nsm .

Los siguientes ejemplos fueron tomados del artículo de Perález y Lamata (2003). Estos autores proponen una forma de estimar el índice de consistencia y lo comparan con el índice propuesto por Saaty, resaltando que en dicho trabajo no mencionan a que procesos corresponden estas matrices, sólo se enfocan en utilizar los datos de éstas.

El método propuesto por Perález y Lamata (2003) se basa en la formula siguiente

$$CI(M_{n \times n}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 3 \\ \det(M_{n \times n}), & \text{si } n = 3 \\ \frac{1}{NT(M_{n \times n})} \sum_{i=1}^{NT(M_{n \times n})} CI(\Gamma_i), & \text{si } n > 3 \end{cases}$$

En donde $NT(M_{n \times n}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n < 3, \\ \frac{n!}{(n-3)! \times 3!}, & \text{si de otra manera} \end{cases}$

Γ transitividad

Propone una tabla en base a su $\hat{IC}$ con diferentes percentil y orden.

Los resultados de los ejemplos mencionados dentro del artículo se presentan a continuación y se agregan los de la propuesta de este trabajo.

La medición de la consistencia se hace en matrices recíprocas 4x4, que aparecen en los Cuadros 4, 5, 6 y 7. Se muestran las matrices y sus resultados de consistencia de acuerdo con Saaty y su criterio de RC ; la medición que proponen Perález y Lamata

(2003) y la propuesta utilizando la función Weibull para los resultados de $\lambda_{m\acute{a}x}$ de matrices aleatorias.

Cuadro 4. Ejemplo de consistencia

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	$\lambda_{m\acute{a}x}=4.28$	$RC^* = \dot{I}C / \dot{I}A$
A ₁	1.00	0.14	0.14	0.20	$RC^*=0.306$	$\dot{I}C^{**} = \frac{1}{NT(M_{n \times n})} \sum_{i=1}^{NT(M_{n \times n})} CI(\Gamma_i)$ $\dot{I}C^{***} = [(\lambda_{m\acute{a}x} - a)/b]^c$
A ₂	7.00	1.00	0.50	0.33	$\dot{I}C^{**}=4.446$	
A ₃	7.00	2.00	1.00	0.11	$\dot{I}C^{***}=0.044$	
A ₄	5.00	3.00	9.00	1.00	$nsm=0.043$	

*Saaty; ** Perállez y Lamata; ***Propuesto

Se observa que esta matriz es inconsistente con respecto a lo propuesto por Saaty, ya que su RC es mayor a 0.08. Por otra parte, Perállez y Lamata indican que el valor estimado tiene una inconsistencia menor al diez por ciento y mayor al cinco por ciento (Peláez y Lamata, 2003). Desde la propuesta de este trabajo, se encontró que el $\dot{I}C$ propuesto de $0.044 < E_{0.05}$ que es igual a 0.0513, lo que indica que la inconsistencia encontrada es menor al cinco por ciento. Por otra parte, el nsm de 0.043 indica que el 4.3% de matrices aleatorias 4x4 tienen un $\lambda_{m\acute{a}x}$ de 4.28 o menor, la cual, dependiendo de la delicadeza del problema podría ser o no una probabilidad alta para aceptar que dicha matriz proviene del juicio de expertos.

El caso del Cuadro 5 indica que para Saaty es una matriz inconsistente, para Perállez y Lamata tiene una inconsistencia menor al 10 porciento y mayor al cinco porciento. Con nuestra propuesta, se encontró que el $\dot{I}C$ exhibe un nsm menor al siete porciento. De los Cuadros 4 y 5, el criterio de evaluación de Saaty declara inconsistencia en

matrices cuya probabilidad de que ocurran aleatoriamente va desde el 4.3% hasta el 6.9% sin considerar la naturaleza del problema como puede hacerlo el *nsm*.

Cuadro 5 Ejemplo de consistencia

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	$\lambda_{m\acute{a}x}=4.38$
A ₁	1.00	0.20	0.33	0.11	RC*=0.14
A ₂	5.00	1.00	4.00	0.13	ÍC**=1.664
A ₃	3.00	0.25	1.00	0.11	ÍC***=0.071
A ₄	9.00	8.00	9.00	1.00	nsm=0.069

*Saaty; ** Perállez y Lamata; ***Propuesto

En el Cuadro 6 se observa que para Saaty es una matriz inconsistente. Para Perállez y Lamata esta matriz tiene una inconsistencia menor al cinco porciento y la propuesta del trabajo lo confirma con un *nsm*=0.042.

Cuadro 6 Ejemplo de consistencia

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	$\lambda_{m\acute{a}x}=4.275$
A ₁	1.00	0.33	0.14	0.11	RC*=0.102
A ₂	3.00	1.00	0.50	0.20	ÍC**=1.268
A ₃	7.00	2.00	1.00	0.14	ÍC***=0.043
A ₄	9.00	5.00	7.00	1.00	nsm=0.042

*Saaty; ** Perállez y Lamata; ***Propuesto

Finalmente, en el análisis del Cuadro 7, se observó que para el método propuesto por Saaty es una matriz consistente con una *RC* menor a 0.08. Por otra parte, con el método propuesto por Perállez y Lamata se tiene una inconsistencia menor al cinco porciento. En cuanto al *ÍC* propuesto muestra una inconsistencia menor al dos porciento como lo exhibe el valor de *nsm*=0.019.

Cuadro 7 Ejemplo de consistencia

	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	$\lambda_{m\acute{a}x}=4.167$
A ₁	1.00	0.33	0.14	0.11	$RC^*=0.061$ $IC^{**}=0.741$ $IC^{***}=0.019$ $nsm=0.019$
A ₂	3.00	1.00	0.50	0.20	
A ₃	7.00	2.00	1.00	0.20	
A ₄	9.00	5.00	5.00	1.00	

*Saaty; ** Perállez y Lamata; ***Propuesto

Otro ejemplo tomado para ilustrar el trabajo aparece en un artículo de Ozdemir y Saaty (2006: 354-359) en donde buscan seleccionar una ruta de tubería que conduzca aceite en Suramérica. En donde se debe elegir de tres localidades, para construir dicha tubería de aceite, las alternativas son: una ruta al norte de Covenas, otra al suroeste de Orito y otra al oeste de Bahía. Los tomadores de decisión van más allá de vicepresidente, ingenieros y gerentes operativos de la compañía. Distribuyen los pesos relativos con respecto a los criterios más importantes (valor neto actual, control de manejo, socios y medio ambiente) además de determinar y ponderar sub-criterios para la importancia relativa de los criterios. En donde la pregunta a contestar es: ¿Cuál es más importante y cuánto más importante es con respecto a selección de la mejor ruta de tubería?

Se presentan dos cuadros, uno con una matriz de orden cuatro (Cuadro 8) en donde la ruta con mayor peso resultante en la evaluación fue la zona del oeste; el segundo cuadro es una matriz de orden cinco (Cuadro 9), en este se le añade un criterio más a la evaluación, para apreciar como influye este último en la decisión final y los pesos asignados. En este caso resultó que la ruta seleccionada fue la del norte. Aquí sólo enfocaremos la consistencia de la matriz, resaltando que en dicho artículo no se

estimó la consistencia de la evaluación. Se tomaron las matrices utilizadas para la asignación de la tubería.

Cuadro 8. Comparación de criterios para seleccionar la mejor ruta de tubería

	Valor neto actual	Control de manejo	Socios	Medio ambiente	Vector prioritario	$\lambda_{m\acute{a}x}=4.202$ $RC=0.076$ $\acute{I}C^{***}=0.0268$ $nsm=0.0264$
Valor neto actual	1.000	7.000	7.000	6.000	0.680	
Control de manejo	0.143	1.000	1.000	3.000	0.129	
Socios	0.143	1.000	1.000	3.000	0.129	
Medio ambiente	0.167	0.333	0.333	1.000	0.062	

RC : Razón de Consistencia (Saaty); $\acute{I}C$: Índice de Consistencia Propuesto; nsm : nivel de significancia muestral.

Los resultados muestran que es consistente la matriz, de acuerdo a la RC propuesta por Saaty (2001), ya que es menor al 0.08. Por otra parte, en referencia al $\acute{I}C$ propuesto, el cual debe ser comparado con el percentil E_{α} asociado al nivel de significancia α , indica que su nivel de inconsistencia es menor a 5%, ya que, el $\acute{I}C$ propuesto $< E_{0.05}$ es decir, $0.0268 < 0.0513$ indicando consistencia a este nivel. Si se considera $\alpha = 0.01$, se encuentra que $0.0268 > 0.0101$ que es igual a $E_{0.01}$ indicando que a este nivel de significancia es inconsistente.

Lo anterior es $nsm=0.0268$ que al ser menor a 0.05, nivel de significancia, indica que tiene una inconsistencia menor al 5% o que es consistente a ese ns . También, siendo el $nsm = 0.0264 > 0.01$, indica que la matriz es inconsistente al 1%. Otra forma de interpretar el nsm es que una matriz de orden cuatro con un $\lambda_{m\acute{a}x}$ de 4.202 indica

que el 2.64% de las matrices con este valor o menor en su eigenvector máximo, pueden ser aleatorias.

Ahora se hace un análisis de cómo influye otro factor en la evaluación (factor de riesgo no conocido), ¿Cómo puede influir en la toma de decisión este factor? y ¿Cómo influye en la decisión con respecto al vector prioritario? (Cuadro 9).

Cuadro 9 Comparación de criterios para seleccionar la mejor ruta de tubería

	Valor neto actual	Control de manejo	Socios	Medio ambiente	Otros	Vector prior	
Valor neto actual	1.000	7.000	7.000	6.000	6.000	0.588	$\lambda_{\max}=5.477$ $RC=0.107$ $IC^{***}=0.0032$ $nsm=0.0032$
Control de manejo	0.143	1.000	1.000	3.000	0.333	0.084	
Socios	0.143	1.000	1.000	3.000	0.200	0.079	
Medio ambiente	0.167	0.333	0.333	1.000	0.333	0.049	
Otros	0.167	3.000	5.000	3.000	1.000	0.200	

RC : Razón de Consistencia (Saaty); IC : Índice de consistencia propuesto; nsm : nivel de significancia muestral.

Se observa que la medición de la consistencia propuesta por Saaty de la matriz anterior indica que no es consistente, ya que es superior a 0.1. Pero podemos preguntar ¿Qué tan inconsistente es? Con el método propuesto, indica que es consistente al 1% ya que $0.0032 < E_{0.01}$, esto es, equivalente a que se está aceptando un error de inconsistente muy pequeño. De otra manera el $nsm=0.0032$, es extremadamente bajo, lo que indica que tiene una inconsistencia menor al 0.5%. Así, una matriz de orden cinco que tenga un $\lambda_{\max}$ de 5.477 tiene una probabilidad muy baja de haber sido construida aleatoriamente o, también, si se declara consistente hay muy pocas posibilidades de que los expertos no estén manifestando una consistencia en la jerarquización de los atributos.

Como ya se menciona, los resultados al incrementar el criterio de riesgo desconocido cambió la ruta elegida por los expertos de oeste a norte, este resultado es significativo, ya que, muestra que el método puede ser sensible al aumentar o disminuir criterios para determinar un objetivo a evaluar.

Otro ejemplo fue tomado del libro de Saaty (1990a) donde cita un artículo de (Saaty y Khouja, 1976) denominado “Riqueza de naciones a través de su influencia en el mundo”. Mucha gente ha estudiado este problema y asumen que existen diferentes factores que influyen en esta evaluación, como: recursos humanos, abundancia, comercio, tecnología y energía militar. La cultura y la ideología, o el recurso natural potencial como el petróleo no son incluidos en el análisis. Para el análisis fueron tomadas siete naciones, algunas de estas ya no existen en este tiempo. Estas son EE.UU., Rusia, China, Francia, U.K., Japon, Alemania. Como ya fue mencionado el interés de este trabajo es analizar el índice de consistencia, por lo que nos enfocaremos a él (Cuadro 10).

Los resultados muestran que es consistente la matriz con respecto a la *RC* propuesta por Saaty (2001), ya que es menor al 0.1. Por otra parte, en referencia al *ÍC* propuesto, el cual debe ser comparado con el percentil E_{α} asociado al nivel de significancia α , indica que su nivel de inconsistencia es menor a 0.1%, ya que; el *ÍC* propuesto $< E_{0.001}$, es decir, $6.04737E-07 < 0.0010$, indicando que es consistente. El resultado del *nsm* es $6.04737E-07$ lo que indica una matriz altamente consistente.

Cuadro 10. Riqueza de naciones a través de su influencia en el mundo

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	Vec. Prio	
C1	1	4	9	6	6	5	5	0.427	$\hat{\lambda}_{m\hat{a}z}=7.599$ $RC=0.08$ $\hat{I}C^{***}=$ $6.04737E-07$ $nsm=6.04737E-07$
C2	0.25	1	7	5	5	3	4	0.230	
C3	0.11	0.14	1	0.2	0.2	0.14	0.2	0.021	
C4	0.17	0.2	5	1	1	0.33	0.33	0.052	
C5	0.17	0.2	5	1	1	0.33	0.33	0.052	
C6	0.2	0.33	7	3	3	1	2	0.123	
C7	0.2	0.25	5	3	3	0.5	1	0.094	

RC : Razón de Consistencia (Saaty); $\hat{I}C$: Índice de consistencia propuesto; nsm : nivel de significancia muestral. C1. EE.UU.; C2. RUSIA; C3. CHINA; C4. FRANCIA; C5. U.K.; C6. JAPÓN; y C7. ALEMANIA.

Por otra parte, existen muchos ejemplos que se pudieron haber utilizado para explicar el método propuesto y los métodos ya existentes. Pero se debe de hacer hincapié en la sensibilidad e importancia que tiene el problema, para determinar que tan flexible uno puede y quiere ser para analizar la consistencia.

Dos comentarios finales de interés son 1) cuando $\lambda_{m\hat{a}x}$ sea menor que ap estimada se declara inconsistente automáticamente. 2) Cuando el $\hat{I}C$ propuesto es demasiado pequeño observe que el nsm es muy parecido a él, lo cual se debe a que $1 - e^{-x}$ es aproximadamente igual que x , cuando x está muy cerca de cero y entonces $nsm = 1 - e^{-\hat{I}C}$.

CONCLUSIONES

Este trabajo se centró en determinar la consistencia de matrices reciprocas aleatorias para después determinar las probabilidades de ocurrencia de estas dentro del PJA.

El proceso aleatorio puede ser analizado ajustando una función de densidad de probabilidad.

La importancia que tienen las matrices aleatorias dentro del PJA, es que ésta es comparada con el juicio del experto, esto es, la consistencia del experto es comparada contra una consistencia que sin ser la perfecta (error del experto) está determinada por las matrices aleatorias. Es comparada en términos de que cual sería la probabilidad de ocurrencia de esa casi consistencia de una matriz aleatoria

Se puede conocer en caso general la probabilidad de que ocurra al azar una matriz

recíproca de orden n totalmente consistente, esto es $\frac{\sum_{i=1}^9 \sum_{j=0}^m \binom{n-1}{j} \binom{i-1}{j}}{18^{n(n-1)/2}}$ dónde

$m = \min\{n-1, i-1\}$. Estableciendo que es baja la probabilidad de que ocurra una matriz consistente en matrices aleatorias.

Es poco flexible la forma de medir la consistencia propuesta por Saaty, ya que establece un límite para cualquier orden de matriz e importancia del problema. En este trabajo se puede establecer la consistencia exacta de cualquier problema.

Se propone una nueva forma de estimar la consistencia en el PJA, definiendo un $\hat{IC}$ a través de la función de distribución Weibull, que permite una transformación del máximo eigenvalor a una distribución con $\text{Exp}(1)$. La forma de hacerlo es aprovechando las propiedades de los parámetros de localidad, escala y forma de la Weibull que permiten la transformación a una distribución libre de parámetros.

No es necesario sacar la razón de consistencia para conocer el grado de consistencia que tiene una matriz. Sólo se necesita conocer el eigenvalor máximo $\lambda_{\max}$ y transformarlo al $\hat{IC}$ con sus tres parámetros.

Dependiendo de la delicadeza del problema a evaluar dentro del PJA se determinará el grado de consistencia deseado o nivel de significancia correspondiente para aceptar consistencia.

ANEXOS

Cuadro 11 Verificación al 1% de los resultados obtenidos con 50,000 matrices aleatorias

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
479	484	381	482	536	529	565	580	578	649	540	608
538	474	367	490	596	582	597	618	604	559	590	595
505	467	396	451	543	573	580	617	613	608	581	607
518	461	344	474	562	562	547	523	571	560	581	637
510	464	358	499	573	532	615	558	550	598	572	599
512	503	360	471	573	561	608	579	645	603	600	608
502	470	392	482	530	577	550	570	632	551	611	539
483	455	391	474	531	553	579	599	624	575	573	585
516	493	357	462	514	553	573	627	584	602	570	580
490	469	361	467	548	574	519	579	576	569	575	631

Cuadro 12 Verificación al 5% de los resultados obtenidos con 50,000 matrices aleatorias

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2416	2427	2552	2515	2470	2572	2503	2580	2516	2453	2543	2461
2428	2503	2549	2541	2605	2538	2483	2541	2523	2588	2530	2665
2483	2406	2507	2493	2553	2463	2630	2492	2554	2434	2434	2601
2509	2370	2493	2501	2378	2626	2531	2526	2531	2582	2573	2438
2424	2372	2465	2570	2560	2522	2568	2441	2563	2447	2501	2448
2602	2432	2590	2483	2553	2501	2551	2595	2515	2543	2474	2510
2444	2476	2583	2457	2556	2524	2572	2541	2528	2507	2438	2518
2452	2426	2548	2491	2486	2575	2598	2504	2468	2566	2546	2544
2407	2401	2492	2435	2496	2504	2473	2529	2482	2534	2456	2495
2439	2587	2538	2481	2556	2602	2523	2474	2553	2542	2450	2519

LITERATURA CITADA

Aguarón, J., M. T. Escobar, J. M. Moreno-Jiménez, (2003), Consistency stability intervals for a judgment in AHP decision support systems. European Journal of operational research. Vol 145. pp 382-393

Dodd, F. J., H. A. Donegan, T. B. M. McMaster, (1995), Reassessment of Consistency Criteria in Judgment Matrices, The statistician, Vol. 44. No.1. pp.31-41

Donegan, H. A., F. J. Dodd, T. B. M. McMaster, (1992), A New Approach to AHP Decision-Making. The Statistician, Vol 41, No. 3 pp. 295-302

Elineema, R. R., (2002), Análisis del método AHP para la toma de decisión multicriterio, Tesis de Maestría en Ingeniería en Investigación de Operaciones. UNAM

Müjgan, S. O. (2005), Validity and inconsistency in the analytic hierarchy process. Applied Mathematics and Computation. Vol. 161 pp 707-720

Ozdemir, M. S. y T. L. Saaty (2006), The unknown in decision making What to do about it. European Journal of operational research. Vol 174. pp 349-359

BIBLIOTECA DIVISION DE CIENCIAS FORESTALES

Peláez, J. I. y M. T. Lamata (2003), A New Measure of consistency for positive reciprocal matrices. An International Journal computers & mathematics with applications. Vol 46. pp 1839-1845

Saaty, T. L., (1990a), Multicriteria decision making: The analytic hierarchy process. Planning, priority setting, resource allocation. 4922 Ellsworth Ave. Pittsburgh, PA: RWS Publications 287p

Saaty, T. L., (1990b), How to make a decision: the analytic hierarchy process, European journal of operation research. Vol. 48, pp 9-29

Saaty, T. L., (2001), Decision making with dependence and feedback: The analytic network process. 4922 Ellsworth Ave. Pittsburgh, PA: RWS Publications. 370p

Expert Choice, (2006), AHP References Listing, file:///C:/Documents%20and%20Settings/Sandra%20Amyris%20Gimate/Escritorio/page_saaty.html., revisada 061130.

Sagir, O. M., (2005), Validity and inconsistency in the analytic hierarchy process. Applied Mathematics and Computation. Vol.161. pp 707–720

Tamborero del P., J., (2006), http://www.mtas.es/insht/ntp/ntp_331.htm Fiabilidad: la distribución de Weibull, revisada 060902.

Triantaphyllou. E., (2000), Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study. Kluwer, Boston, 324 p

Yi-Chung H., T. Jung-Fa, (2006), Backpropagation multi-layer perceptron for incomplete pairwise comparison matrices in analytic hierarchy process. Applied Mathematics and Computation. Vol. 180. pp 53–62