



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

DIVISIÓN DE CIENCIAS ECONÓMICO-ADMINISTRATIVAS

✓ **FLUCTUACIÓN DE LOS PRECIOS DEL CAFÉ: UNA
INTERPRETACIÓN EN LA TEORÍA DEL CAOS**



DIRECCIÓN ACADÉMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXAMENES PROFESIONALES

TESIS

*QUE COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS EN ECONOMÍA
AGRÍCOLA*

PRESENTA:

JAIME HERNÁNDEZ DELGADO

CHAPINGO, MÉXICO. DICIEMBRE DE 1998.

C.1

880841



FLUCTUACIONES DEL PRECIO DEL CAFÉ: UNA INTERPRETACIÓN EN LA TEORÍA DEL CAOS

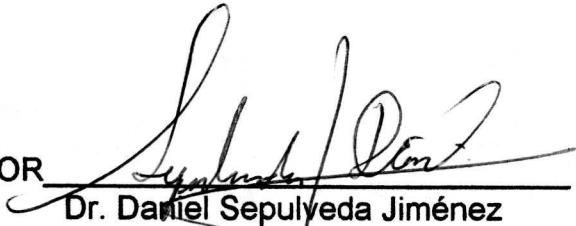
Tesis realizada por Jaime Hernández Delgado bajo la dirección del Comité Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS EN ECONOMÍA AGRÍCOLA

DIRECTOR


Dr. Santos Martínez Tenorio

ASESOR


Dr. Daniel Sepúlveda Jiménez

ASESOR


Dr. Juan Antonio Leos Rodríguez

LECTOR EXTERNO


Dr. Edmundo Flores

Felicito a Jaime Hernández Delgado por la gran calidad y honda comprensión de la teoría del caos.
Edmundo Flores

FLUCTUACIONES DEL PRECIO DEL CAFÉ: UNA INTERPRETACIÓN EN LA TEORÍA DEL CAOS

El jurado que revisó y aprobó el examen de grado de Jaime Hernández Delgado autor de la presente tesis de Doctor en Ciencias en Economía Agrícola estuvo constituido por:

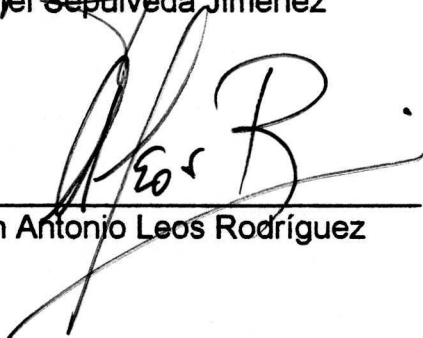
PRESIDENTE


Dr. Santos Martínez Tenorio

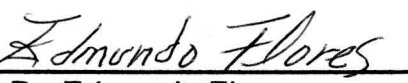
ASESOR


Dr. Daniel Sepúlveda Jiménez

ASESOR


Dr. Juan Antonio Leos Rodríguez

LECTOR EXTERNO


Dr. Edmundo Flores

AGRADECIMIENTOS

Al creador del orden y el caos.

A mi esposa Yola, de quien surgió el impulso necesario para llevar a cabo el proyecto. Es aquí donde los méritos deben compartirse.

A mis hijos, quienes secretamente han alimentado mi deseo de alcanzar otra meta.

A mis maestros todos, quienes con paciencia y sabiduría derramaron sus conocimientos sobre nosotros.

A las autoridades académicas de la UACH por haberme permitido descubrir este maravilloso mundo de la Economía.

Al CONACyT sin cuyo concurso difícilmente se hubiera podido concretar el presente proyecto.

A todas las personas quienes directa o indirectamente participaron en la elaboración del presente trabajo y que omito mencionarlos con la única excusa de que sería muy larga su enumeración, y al dejar fuera a alguno cometiera con ello alguna injusticia.

DATOS BIOGRÁFICOS

El autor nació en México D.F. el 30 de Abril de 1951.

Realizó sus estudios primarios en la escuela "El Pípila", los de secundaria en la Secundaria No. 4 y de bachillerato en el Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo. Realizó estudios técnicos de Contaduría y Administración en el Instituto Mercantil de Monterrey, de Licenciatura y Maestría en la Facultad de Filosofía de la UNAM, una Maestría en Inteligencia Artificial en la Fundación Arturo Rosenblueth, A.C. y, finalmente, los estudios doctorales en Economía Agrícola materia de la presente tesis.

El autor se ha desempeñado en diversos cargos de la Administración en la UACH, como Contador y Auditor en la iniciativa privada y como profesor de Humanidades en diversas instituciones como el ITESM, UNITEC, UVM y UACH.

Los principales campos de conocimiento de interés en el área son: Microeconomía, Macroeconomía y Economía Política.

RESUMEN

JAIME HERNÁNDEZ DELGADO

FLUCTUACIONES DEL PRECIO DEL CAFÉ: UNA INTERPRETACIÓN EN LA TEORÍA DEL CAOS

Diciembre, 1998.

(Bajo la dirección del Dr. Santos Martínez Tenorio)

En años recientes, las investigaciones tanto en Matemáticas como en ciencias aplicadas como la Economía, Física y Biología, han producido una revolución en la comprensión de sistemas dinámicos no lineales. En Economía son ampliamente utilizados para modelar sistemas que cambian con el tiempo. Se sabe que estos sistemas son sensibles a conductas impredecibles o caóticas. Este trabajo analiza la dificultad para predecir los precios del café a mediano y largo plazo, utilizando ecuaciones logísticas.

INDEX WORDS : Sistemas no Lineales o Caóticos, Estabilidad Estructural de los Modelos Económicos, Ciclos, Inventarios, Precios.

ABSTRACT

JAIME HERNÁNDEZ DELGADO

**VARIATIONS IN COFFEE PRICES: AN INTERPRETATION IN CHAOTIC
SYSTEMS**

Diciembre 4, 1998.

(Under the direction of Dr. Santos Martínez Tenorio)

In recent years, research in both Mathematics and applied sciences like Economics, Physics and Biology, has produced a revolution in the understanding of non linear dynamical systems. In Economics is widely used to model change over time. These systems are now known to be sensitive to a kind of "chaotic," impredictable behavior. This paper analyze the difficult to predict coffee prices in medium and long term, using logic equations.

INDEX WORDS: Non Linear and Chaotic dynamical systems, structural stability of economic models, economic cycles, stocks, prices.

ÍNDICE	PÁGS.
1. PRESENTACIÓN.....	1, 2
2. INTRODUCCIÓN.....	3
3. MARCO TEÓRICO.....	4 - 18
4. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	19
5. HIPÓTESIS.....	20
6. METODOLOGÍA.....	21- 23
7. CAPÍTULO I.....	24- 35
8. CAPÍTULO II.....	36- 43
9. CAPÍTULO III.....	44- 63
10. CONCLUSIONES.....	64- 66
11. RECOMENDACIONES.....	67
12. BIBLIOGRAFÍA.....	68- 71

LISTA DE FIGURAS**PÁGINA**

1. Nube de puntos de Gibbs.....7
2. Sistemas dinámicos estables e inestables.....7

LISTA DE DIAGRAMAS PÁGINA

1. Ejemplo de trayectoria en el espacio fase.....10
2. Ejemplo de trayectoria caótica..... 13

LISTA DE TABLAS**PÁGINAS**

1. Comportamiento de la ecuación logística.....	15-16
2. Comportamiento de inventarios en la teoría clásica.....	17
3. Relación precio-cantidad comprada.....	25
4. Orden de preferencia entre bienes.....	26
5. Cálculo coeficiente de elasticidad.....	30
6. Relación gasto-ingreso.....	34
7. Relación precio-producción.....	36
8. Relación cantidad vendida-costo.....	37
9. Relación ventas-ingreso total-ingreso marginal.....	38
10. Relación ventas-costo.....	39
11. Nivel óptimo de producción.....	40

LISTA DE GRÁFICAS	PÁGINAS
1. Relación precio-cantidad comprada.....	25
2. Mapa de inferencia.....	27
3. Línea de presupuesto.....	29
4. Regiones de factibilidad.....	31
5. Ejemplo de minimización no lineal.....	32
6. Otro ejemplo de minimización no lineal.....	33
7. Relación precio-producción.....	37
8. Relación cantidad vendida-costos.....	38
9. Relación ventas-ingreso total-ingreso marginal.....	39
10. Relación cantidad vendida-costos.....	40
11. Nivel óptimo de producción.....	41
12. Curvas de oferta individual.....	42
13. Equilibrio de la producción.....	42
14. Puntos de inflexión para incremento exponencial.....	52

PRESENTACIÓN

El propósito del presente trabajo, consiste en averiguar la naturaleza de los desequilibrios económicos provocados por fluctuaciones en la oferta y la demanda, y analizar si es posible una vía para la prevención y suavización de sus efectos negativos.

Se sabe que, bajo el supuesto de una economía de competencia perfecta, es posible para oferentes y demandantes encontrar el punto de equilibrio, en el cual los primeros estén de acuerdo en producir una determinada cantidad de x producto a un precio dado, y, los segundos estén dispuestos a comprar tal producto a ese precio.

En la intersección de ambos puntos de equilibrio, en una gráfica superpuesta, hemos de suponer que la cantidad de producto en la que se unen ambas gráficas, es la producción de equilibrio, es decir, la cantidad del artículo que se produce, es la misma que se consume.

En la práctica, sin embargo, es posible encontrar con bastante frecuencia que los puntos de equilibrio, si se pueden obtener, sirven solo como referentes para constatar que la oferta y la demanda de casi cualquier producto en cualquier sector, está fluctuando constantemente por encima y por debajo del punto de equilibrio teórico. Obviamente, estas fluctuaciones se reflejan en los precios de las mercancías.

Un primer acercamiento a este hecho, sugiere que tanto la oferta como la demanda se comportan de manera inestable, y que tal comportamiento puede, en ciertas circunstancias, provocar constreñimiento o desmesurada expansión por lo menos en ciertos sectores productivos si no es que en la economía global, con los consecuentes costos sociales para un país.

Asumiendo que las fluctuaciones en la oferta y la demanda, reflejadas en un precio, son parte de la naturaleza intrínseca de ambas variables económicas, cabe aún preguntarse qué magnitud de variación con respecto al punto de equilibrio puede considerarse aceptable, antes de que la economía de un sector o de la totalidad llegue a sufrir algún deterioro. Suponiendo que tenemos una economía con cierta estabilidad relativa, qué tan sensible es esa economía a cambios en las condiciones iniciales y cómo podemos medir esa sensibilidad. Estas serán las cuestiones centrales que intentaremos indagar en el cuerpo del presente trabajo.

El punto, relativamente original de la propuesta, lo constituye el hecho de que vamos a contrastar lo que ocurre en un mismo experimento,

trabajando con distintas herramientas teóricas, tratando de observar en algún ejemplo real la dinámica de la oferta total, del consumo, de los inventarios y de los precios para mostrar la dificultad de estimar eventos futuros en nuestro análisis de caso, e intentando derivar de ahí implicaciones de tipo más general.

El asunto cobra relevancia si pensamos, por ejemplo, en el café. La importancia estratégica que tiene el cultivo para países como Brasil, Colombia, México y los E.U., hace que la determinación de su oferta, demanda, inventarios y precios, se convierta en un asunto de primera importancia, pero, al mismo tiempo, en un problema difícil de resolver.

Por ejemplo, E.U. generalmente manifiesta inventarios por encima de lo real y una alta producción esperada, con el fin de empujar los precios a la baja; por el contrario, Brasil y Colombia lo hacen a la inversa con la expectativa de incidir en la elevación del precio. Pero además, otros factores como el clima, los apoyos gubernamentales, los estados actuales de las plantaciones, y el crédito agrícola entre otros factores, intervienen en la dificultad señalada.

Luego entonces, el asunto tiene implicaciones tanto en el manejo de la información como en la determinación de los precios que van a incidir en el mercado de este producto. En este contexto, resulta interesante una investigación sobre el universo de la producción, consumo y fijación del precio de este importante cultivo.

INTRODUCCIÓN

El punto de partida para la determinación del equilibrio competitivo, del cual se parte para medir las fluctuaciones posteriores, lo constituyen el análisis de la oferta y la demanda a corto plazo.

Ensayamos aquí los resultados de la naciente Teoría del Caos, también titulada Teoría de la Complejidad, que utiliza los llamados sistemas dinámicos para reinterpretar los resultados de la teoría clásica, haciendo notar que el fenómeno de las fluctuaciones en la oferta y la demanda reflejadas en el precio, es de naturaleza fundamentalmente aleatoria, y que una forma quizá más adecuada de medir sus movimientos, proviene del instrumental proporcionado por esa teoría.

Por esta razón, en el marco teórico damos algunos elementos matemáticos y conceptuales que permitan comprender los sistemas en los que nos movemos.

El capítulo I está dedicado al desglose sumario de la demanda y el capítulo II al de la oferta, desarrollados bajo el lente de la teoría clásica, con el propósito de dejar sentadas las bases de la comparación posterior, además de hacer explícitas las nociones clásicas de que partimos.

El capítulo III, da forma con datos reales a la propuesta que da título a la tesis. Se toma como prototipo el ejemplo del café, como un producto paradigmático de la dificultad para predecir precios, oferta interna, exportaciones e inventarios. Exploramos algunos métodos tradicionales como las regresiones simples comparando precios e inventarios contra el tiempo, para intentar observar su grado de correlación, y, eventualmente hacer con los datos algún tipo de predicción. Hacemos una propuesta con un polinomio de cuarto grado, que en mi opinión se acerca con un buen ajuste a los datos observados, y puede, de aceptarse las hipótesis, representar un medio eficaz para establecer predicciones si se mantiene la posición clásica. Finalmente, hacemos uso de un modelo analógico de poblaciones, expresado con ecuaciones logísticas para mostrar su pertinencia para reflejar la dificultad de estimar oferta, demanda, inventarios y precios, lo cual quizá sea más acorde con la naturaleza real del fenómeno analizado.

Finalmente, presentaremos nuestras conclusiones y algunas recomendaciones que consideramos pertinentes para matizar las dificultades teóricas que nos presenta el problema.

MARCO TEÓRICO

A efecto de ofrecer una panorámica general de la Teoría de la Complejidad, extractaremos una traducción libre de la excelente presentación hecha por Mark Michael Founder (1997) hecha para *The Chaos Network*, misma que nos permite un primer acercamiento a dicha Teoría.

La Teoría de la Complejidad, es una disciplina científica en desarrollo que está basada en el estudio de sistemas no lineales. Es importante comprender estas dos palabras, “no lineales” y “sistemas” para apreciar la naturaleza de la disciplina.

Un sistema puede ser definido como la captación de las relaciones entre cosas que interactúan. Por ejemplo, un montón de piedras es un sistema que interactúa basados en el hecho de que están apiladas; si las empujamos, la interacción se reflejará en el movimiento, hasta que alcancen una nueva condición de equilibrio. Un grupo de piedras que no se tocan una a la otra, no son sistemas en virtud de que no interactúan. (En rigor interactúan por la fuerza de la gravedad, pero es tan bajo el efecto que puede ser despreciado).

Un sistema puede ser modelado. Esto es, podemos crear otro sistema, el cual supuestamente replica el comportamiento del sistema original. Teóricamente, podemos tomar un segundo grupo de piedras que tengan la mismas formas, pesos y densidad del primer grupo, apiladas en la misma forma que ese grupo, y predecir que caerán en la misma configuración que la del primer grupo; o bien, podemos utilizar la representación matemática de las piedras, a través de la aplicación de las leyes de gravedad de Newton para predecir cómo interactuarán futuras pilas de piedras. Los modelos matemáticos son importantes, pero no los únicos para modelar los procesos utilizados en sistemas.

La palabra no lineal, tiene qué ver con la comprensión de los modelos matemáticos usados para describir sistemas. A partir del creciente interés en los sistemas no lineales, muchos modelos fueron analizados pensando en sistemas lineales. Lo que esto significa es que, cuando las fórmulas matemáticas que muestran el comportamiento de un sistema son representadas en forma gráfica, los resultados reflejan una dependencia lineal.

Las ecuaciones que describen a la mecánica newtoniana son lineales, y en Estadística (especialmente los análisis de regresión), es un proceso de convertir lo que usualmente son datos no lineales en un formato para análisis lineal.

Los modelos lineales son fáciles de manejar, en virtud de que son muy predecibles. Podemos, por ejemplo, pensar los sistemas lineales como una fábrica. Podemos predecir que si aumentamos el número de trabajadores o el monto del inventario, se incrementará el número de piezas producidas por la fábrica en una cantidad equiparable. Lo que entra al sistema nos dice, en alguna forma, lo que saldrá.

No obstante, la mayoría de los empresarios saben que sus fábricas no funcionan de esta manera en la realidad. Las modificaciones en el número de empleados, o en los inventarios, difieren ampliamente de lo que se había previsto. La razón de esto es que el manejo de una factoría, se parece más a los sistemas no lineales encontrados en la naturaleza. Cuando modelamos sistemas naturales, hemos aprendido que su representación matemática es de naturaleza no lineal y que las salidas del sistema no son fáciles de predecir.

La mayoría de los estudios científicos en el desarrollo de la Teoría de la Complejidad, involucran intentos de comprender el mundo utilizando modelos lineales. Desde Newton, los físicos se han empeñado en asociar los procesos naturales a modelos lineales; cuando encontraban que algo no se ajustaba al modelo, se atribuían las fallas a errores de experimento o a "ruidos" de algún tipo.

Los investigadores en sistemas complejos, saben que ese "ruido" es información importante para el experimento. Cuando la alteración o ruido se incorpora a la gráfica, los resultados ni son lineales, ni se pueden predecir. Estos resultados son los que están representados en la Teoría del Caos.

Otra palabra que es importante comprender es "complejo". ¿Qué es lo que determina que un sistema sea más complejo que otro? El premio Nobel Ilya Prigogine lo define como la complejidad del modelo necesaria para predecir con efectividad el comportamiento del sistema. Uno de los sistemas más complejos es el clima, el cual, como lo demostró Edward Lorenz, solo puede ser efectivamente modelado con un duplicado exacto de sí mismo.

En contraposición, un ejemplo de sistema simple, es modelar el tiempo que le lleva a un tren viajar de una ciudad X a una ciudad Y, si viajan a una velocidad dada, y asumiendo que no hacen escalas, para predecir el

una velocidad dada, y asumiendo que no hacen escalas, para predecir el tiempo de recorrido solamente necesitamos saber la velocidad del tren y la distancia entre las ciudades, la fórmula es $v = ds/dt$. Es un sistema simple.

Pero, nuestra pila de piedras que parecía un sistema simple se volvió un sistema complejo. Si su objetivo es saber cuál piedra terminará encima después de empujarlas, entonces tendrá que saber información muy detallada sobre la forma de las piedras, sus pesos, la ubicación exacta de cada una, etc., para poder hacer predicciones precisas; si llegase a haber una mínima diferencia en la forma de una piedra en el modelo con la piedra real, los resultados pueden ser muy diferentes, y la predictibilidad puede convertirse en una tarea muy ardua.

Al generador de impredecibilidad en sistemas complejos Lorenz (1963) lo llamó "sensibilidad a condiciones iniciales" o "el efecto mariposa". Este concepto significa que, un sistema no lineal, complejo, con cambios infinitamente pequeños en las condiciones iniciales de un sistema, presentará radicales diferencias de resultados para ese sistema. Si como Lorenz lo expresó, una mariposa agita sus alas en Argentina y no podemos tomar su acción en cuenta en nuestras predicciones climáticas, fallaremos al predecir una tormenta en Nueva York en las dos semanas siguientes en virtud de su dinámica y de la concatenación de muchos eventos.

La regla general para los sistemas complejos, es que uno no puede crear un modelo que prediga con precisión sobre estos aspectos. Sin embargo, podemos crear modelos que simulen los procesos que se dan en la realidad.

Vamos a tratar en lo que sigue de ensayar un cierto paralelismo de la revolución conceptual que se está dando actualmente en Física, y su reflejo en algunos sectores de la Economía. Después de todo, nuestra materia está repleta de fenómenos dinámicos que van desde los persistentes ciclos económicos, las catástrofes en los mercados financieros, en los inventarios, y la producción agrícola mundial entre otros fenómenos. En Física, a estas nuevas ideas se les llama *dinámica caótica* o, simplemente, *caos*.

En la mecánica clásica el movimiento de una partícula en el espacio se puede representar como un punto en un eje de coordenadas q , p . El estado inicial es representado por q y las velocidades v o momentos p . Cuando podemos definir el estado inicial, el problema está casi resuelto, pues al estado final le restamos el inicial, y tenemos la trayectoria de la partícula.

El problema se complica cuando en lugar de trayectorias individuales tenemos "colecciones" de puntos, conjuntos. En tal caso, hablamos de "nubes" de puntos, con lo cual entramos al terreno de la distribución de probabilidades cuya representación gráfica se vería así:

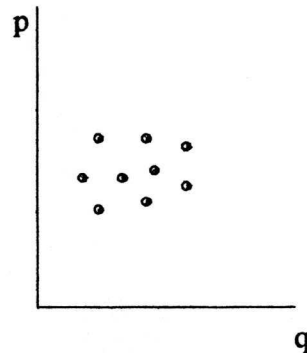
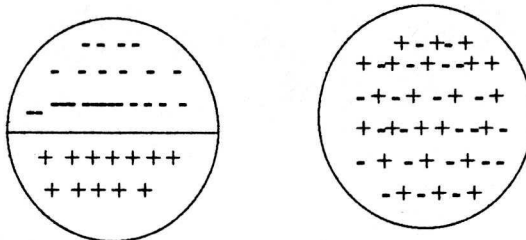


Figura 1. Nube de puntos de Gibbs

En un **modelo lineal o estable**, pequeños cambios en el sistema de que se trate producirán pequeñas alteraciones en el resultado final, lo cual en un dibujo se vería así:



sistema dinámico estable:
los movimientos - y +
están separados en el espacio
de las fases.

sistema dinámico inestable:
cada movimiento + está
rodeado de un - y recípro-
camente.

Figura 2. Sistemas Dinámicos Estables e Inestables

En el círculo de la izquierda:

"Si desechamos la región fronteriza cada (-) está rodeado de otros (-) y cada (+) por otros (+). Este caso corresponde a un sistema estable. Pequeñas modificaciones en las condiciones iniciales no alterarán el resultado...en cambio en el diagrama derecho hay movimientos (-) en el vecindario (+) y recíprocamente. El más mínimo cambio en las condiciones iniciales se amplificará. El sistema es inestable."¹

Una consecuencia teórica importante es que:

“...consecuencia de esa inestabilidad y de la sensibilidad a las condiciones iniciales resultante, es que la trayectoria se convierte en una *idealización*. En efecto, nos resulta imposible preparar un sistema de tal suerte que podamos asignarle una trayectoria bien determinada, ya que dicha formulación debería poseer una precisión infinita”²

La Economía clásica sigue los supuestos de linealidad de la Mecánica clásica. Por el contrario, los supuestos de este trabajo se relacionan más con la visión cuántica:

“La mecánica cuántica implica que las medidas iniciales son siempre inciertas, y el caos asegura que las incertidumbres rebasarán rápidamente nuestra habilidad para hacer predicciones”.³

Y el lenguaje matemático que expresa esta visión, viene dado por los sistemas dinámicos:

“Un sistema dinámico viene dado por dos partes: la noción de un estado (la información esencial acerca del sistema) y una dinámica (una regla que describe cómo el estado se desenvuelve en el tiempo)...Un buen ejemplo de sistema dinámico se encuentra en un péndulo simple. Todo lo que se necesita para determinar su movimiento son dos variables: posición y velocidad. El estado es entonces un punto en el plano, cuyas coordenadas son posición y velocidad. Las Leyes de Newton proporcionan una regla expresada matemáticamente como una ecuación diferencial, que describe cómo evoluciona el estado...La evolución temporal de un sistema, puede ocurrir en un tiempo continuo o discreto, en el primer caso le llamamos flujo, y en el segundo un mapeo. ...Para encontrar como evoluciona un sistema uno puede emplear ecuaciones de movimiento para mover incrementalmen-

te una sola órbita...este método de deducción requiere apoyos computacionales proporcionales al período de tiempo para darle seguimiento a la órbita.”⁴

Hasta aquí la exposición general, pero para entender la ubicación de los modelos económicos propuestos en este contexto, se requiere hacer una breve aunque rigurosa exposición formal de los conceptos comprendidos en los sistemas dinámicos para poder entender el modelo que se propone posteriormente.

En primer lugar, se define un *sistema dinámico* como una descripción matemática del desarrollo de un sistema en un tiempo futuro. El tiempo puede ser tanto una variable continua, como un valor entero discreto.

Dado que los sistemas dinámicos miden razones de cambios de estado, se expresan matemáticamente en forma de ecuaciones diferenciales, y un ejemplo, en el cual el tiempo (denotado como t) es una variable continua, es un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden,

$$dx^{(1)} / dt = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$$

$$dx^{(2)} / dt = F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$$

.

.

$$dx^{(N)} / dt = F_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$$

las cuales a menudo se escriben en forma vectorial como:

$$dx(t) / dt = F[x(t)],$$

donde x es un vector N dimensional. Este es un sistema dinámico, porque para cualquier estado inicial del sistema $x(0)$, podemos en principio resolver las ecuaciones para obtener el estado futuro del sistema $x(t)$ para $t > 0$.⁵

El gráfico siguiente ilustra la ruta seguida por el estado del sistema como se desarrolla en el tiempo para el caso en donde $N=3$. Al espacio x con superíndices 1, 2, y 3 encerrados en paréntesis en el gráfico, se le denomina *espacio fase*, y al camino indicado por las flechas, se le conoce como *órbitas o trayectorias*.

ORBITA EN UN ESPACIO FASE TRIDIMENSIONAL N=3

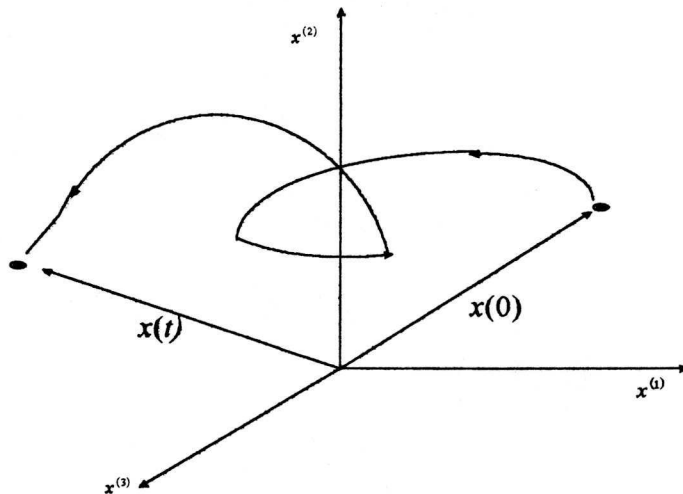


Diagrama 1. Ejemplo de trayectoria en el espacio fase

Para el caso del tiempo expresado en valores discretos, (con n denotando la variable tiempo, $n = 0, 1, 2, \dots$) un ejemplo de sistema dinámico es un mapeo, que escrito en forma vectorial sería:

$$x_{n+1} = M(x_n), \text{ donde } x_n \text{ tiene } N \text{ componentes, } x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N).$$

Habiendo determinado x_1 , podemos determinar el estado en $n = 2$ por $x_2 = M(x_1)$ y así subsecuentemente. Entonces, dada una condición inicial x_0 , podemos generar una órbita del sistema de tiempo discreto $x_0, x_1, x_2, \dots$ ⁶

Una pregunta natural que podría surgir, es ¿cómo se liga esto con la Economía?

“Para explicarlo, supóngase una economía sujeta a cambios en el tiempo, cuyo estado en un tiempo t puede ser descrito por un vector, v_t , de 14 números (masa monetaria en un tiempo t , tasa de inflación en ese mismo tiempo, etc.). Formalmente, este vector es un punto en el espacio de estados R^{14} (donde R es el sistema de los números reales). Suponga que la economía evoluciona determinísticamente de tal manera que su estado en cualquier tiempo, determina unívocamente su estado para cualquier tiempo posterior. Por tanto, si la posición inicial de la economía en R^{14} es v_0 , la evolución de la economía en el tiempo, será representada por una ruta en R^{14} iniciando en v_0 , y trazada por tantos v_t como tiempos t se mueva hacia adelante. A esta ruta se le conoce como la *órbita* generada por la posición inicial v_0 la cual representa la

historia futura del sistema, como quedó asentado en el ejemplo del sistema de ecuaciones.⁷

Sin embargo algunos modelos económicos pueden ser analizados como no deterministas, y en ese caso los científicos han visto que en el espacio estado hay puntos aislados p inestables tales, que diferentes puntos iniciales cercanos a p pueden generar órbitas que muestran un patrón de comportamiento muy variable; a esta conducta, los científicos le llamaron **dependencia sensitiva a las condiciones iniciales** y a los sistemas que exhiben tal característica se les denomina sistemas complejos o caóticos.

"Para un sistema dinámico, quizá la cuestión más importante es: ¿hacia donde va el sistema? En los inicios de los sistemas dinámicos el lugar hacia donde se dirigían los sistemas, el punto en el cual convergían las órbitas en el espacio estado (llamados atractores) se supone usualmente como un objeto geométrico no complicado, como una curva o un simple punto. Los modeladores económicos, por ejemplo, han asumido a menudo que un proceso económico dinámico podrá, en última instancia, alcanzar ya sea un equilibrio, un patrón cíclico o alguna otra conducta ordenada. Sin embargo, otro descubrimiento de la teoría del caos es que el atractor de un sistema no lineal puede ser un conjunto fractal, bizarro, dentro del cual el estado del sistema es más parecido a un comportamiento aleatorio. Al conjunto de todos los puntos iniciales cuyas órbitas *de atracción* convergen hacia un atractor particular se le llama *base*."⁸

"Cuando las leyes de movimiento de un sistema dinámico discreto no cambian con el tiempo, el movimiento del sistema a través del tiempo puede ser calculado como un proceso iterativo. Para establecer este punto, considere un típico modelo económico, M teniendo k variables endógenas. Para empezar a analizar el modelo en una computadora uno introduce un vector como condición inicial, v_0 , de k números.

Con ayuda del modelo se calcula un vector de salida, $M(v_0)$ que contiene los nuevos valores de las variables endógenas k al finalizar el primer período de tiempo. Después iterando sobre $M(v_0)$ se computa un nuevo vector de salida, $M(M(v_0))$ que describe la economía al finalizar el segundo período de tiempo, y así sucesivamente... Note que en el modelo la ley del movimiento permanece invariante durante el proceso."⁹ De hecho, para conocer el estado futuro de esta economía, basta con agregar multiplicaciones sucesivas de M sobre la condición o vector inicial v_0 .

"No es por coincidencia que en los sistemas lineales, las órbitas convergentes siempre confluyan hacia un punto fijo de la función subyacente... Para aclararlo, suponga una función continua f que tenga una órbita convergente del vector x , $f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$. Siendo L el límite entonces:

$$\begin{aligned} f(L) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) \\ &= L \end{aligned}$$

De tal manera que L es un punto fijo de f . Así, en respuesta parcial a la pregunta de hacia dónde se dirigen los sistemas, podemos responder: convergen a un límite finito de modo que el límite sea un punto fijo".¹⁰

El párrafo precedente nos conduce a las siguientes definiciones:

"Un punto fijo p de una función, es llamado *hiperbólico* si $|f'(p)| \neq 1$. Cuando $|f'(p)| < 1$, se dice que es *atrayente*, mientras que cuando $|f'(p)| > 1$, se dice que es *repelente*. Estos adjetivos se justifican por las siguientes dos proposiciones... (1) Si p es un punto fijo hiperbólico, hay un intervalo conteniendo p tal que cualquier órbita que se origine dentro de ella converja hacia p . (2) Si p es un punto fijo repelente, hay un intervalo conteniendo p tal que cualquier órbita generada en ella (pero no p misma) eventualmente se sale del intervalo (al menos temporalmente)... Cuando un punto fijo p es hiperbólico atrayente, el sistema puede ser considerado estable en p con respecto a cambios en las condiciones iniciales... En este mismo sentido, un punto hiperbólico repelente puede ser considerado un punto de inestabilidad del sistema con respecto a cambios en las condiciones iniciales".¹¹

Para propósitos expositivos, muchas de las importantes características de los sistemas dinámicos se encuentran en un sistema unidimensional. De hecho, uno de los descubrimientos de la investigación en caos, ha sido que los sistemas dinámicos discretos generados por iteración de las más elementales funciones escalares no lineales son capaces de presentar conducta caótica. En el diagrama se presenta un ejemplo de una órbita posible.

DIAGRAMA DE ÓRBITA

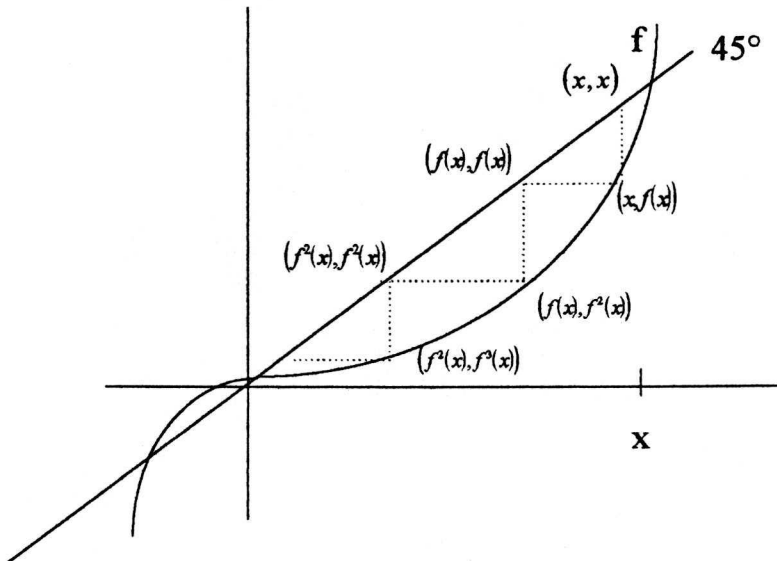


Diagrama 2. Ejemplo de trayectoria caótica.

El resultado que se despliega, es llamado un *diagrama de órbita*, y muestra la conducta de la órbita originada en x . En particular, la órbita puede ser visualizada desde la intersección de puntos marcados sobre la línea de 45° ; la línea punteada indica la dirección del movimiento del sistema.¹²

“En esencia un modelo es estructuralmente estable si pequeños cambios en la estructura del modelo dejan el comportamiento dinámico cualitativamente sin cambios...para hacer estas ideas más concretas, permítasenos considerar el significado de estabilidad estructural para un sistema dinámico discreto. Pero primero debemos clarificar el significado, en este contexto, de ‘un pequeño cambio en la estructura del modelo’...”¹³

Dado que estos sistemas están enteramente determinados por la función que está siendo iterada, tiene sentido interpretar un pequeño cambio en el sistema como significando un pequeño cambio en la función subyacente. Pero cambiar una función ligeramente, significa en realidad introducir una nueva función que esté, en algún sentido, cercana a la original. ¿Cómo entonces medimos la ‘cercanía’ de dos funciones?

Suponga que f y g son dos funciones r veces diferenciables definidas en un intervalo J . Usualmente uno supone que $f^{(r)}$ y $g^{(r)}$ son continuas, de modo que f y g son dos funciones r veces diferenciables, y por tanto pertenecen al conjunto C^r todas esas funciones. Se define la distancia en C^r como $d_r(f, g) = \sup_x \max\{|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|\}$

en donde el supremo está tomado sobre todas las x en J .

Nuestro siguiente paso, consiste en precisar la noción de equivalencia de dos sistemas dinámicos. Para hacerlo, suponga que f y g son funciones continuas mapeando un intervalo J en sí mismo. Por *homomorfismo* de J , queremos significar una función continua invertible mapeando J sobre sí misma. Así, un homomorfismo de J es una correspondencia uno a uno entre J y sí mismo, tal que los puntos cercanos son enviados a puntos cercanos. Dado que la función inversa de un homomorfismo de J es en sí misma continua, esta "preservación de cercanía" opera en ambas direcciones. Por ejemplo, la función h definida para todas las x en el intervalo $[-1,1]$ por $h(x) = x^3$ es un homomorfismo de este intervalo.

Decimos que f y g están *topológicamente conjugadas*, si existe un homeomorfismo de J tal que, para cada x en J ,

$$h(f(x)) = g(h(x)).$$

Cuando dos funciones están topológicamente conjugadas, cada una replica precisamente las propiedades dinámicas del otro, y el sistema generado por ello, puede ser considerado equivalente.

Ahora podemos alcanzar una definición de *estabilidad estructural*. Sea f una función continua diferenciable r veces mapeando un intervalo J en sí mismo; entonces, f se dice C^r estructuralmente estable si existe un $\epsilon > 0$ tal que cualquier función g continuamente diferenciable r -veces, que mapea a J en sí mismo, y satisface $d_r(f, g) < \epsilon$, está topológicamente conjugada a f .

Para obtener una comprensión cualitativa de lo que está involucrado en la dinámica caótica, examinaremos en detalle la función siguiente:

$F_\mu(\mu > 1)$ definida por $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ utilizando esta función como la ley del movimiento de un sistema dinámico discreto. ¹⁴

Ahora resultará clara la identificación de los puntos convergentes y divergentes si nosotros le asignamos diferentes valores a μ y x , y observamos su comportamiento para diferentes iteraciones. Sea

$$\mu = 1.5, \quad x = .5$$

Tras sustituciones sucesivas de estos valores en la función expresada arriba, tendremos los siguientes valores:

x	$F_{\mu}(x)$	iteración
.5	.375	0
.375	.3515625	1
.3515625	.3419494629	2
.3419494629	.3375300416	3
.3375300416	.3354052689	4
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.33333353318	.3333343326	15

Como podemos observar, para estos valores, que no son otra cosa que las condiciones iniciales, a medida que el número de las iteraciones aumenta, los valores tienden a converger, convirtiéndose las órbitas en puntos fijos que permanecen ahí.

Para valores de $\mu = 2$, $x = .5$ los puntos se denominan *estables*.

x	$F_{\mu}(x)$	iteración
.5	.5	0
.5	.5	15

Finalmente, para $\mu = 3.9$, $x = .5$, veamos lo que ocurre:

x	$F_{\mu}(x)$	iteración
.5	.975	0
.975	.09506	1
.09506	.335	2
.	.	.
.9621	.1419	6
.	.	.
.4120	.94	15
.	.	.
.7044	.8020	67
.	.	.

.	.	.
.56	.95	94

Tabla 1. Comportamiento de la ecuación logística

Como puede observarse, en este último caso el comportamiento de la función para estos valores del parámetro μ y de la variable x se vuelve impredecible, y esto es un claro ejemplo de lo que aquí hemos denominado *dinámica caótica*, y es la teoría matemática alternativa en la que inscribiremos este trabajo.

A grandes líneas, se expuso el marco conceptual en el que se desarrolla la propuesta de este trabajo, y en concordancia con este punto de vista, se busca teorizar desde un ángulo diferente tanto la oferta como la demanda y los precios, y buscar las repercusiones macroeconómicas a que nos conduce el nuevo punto de vista, con la esperanza de visualizar, con nuevo lente, el problema de tales fluctuaciones.

Para una visión clásica del manejo de las fluctuaciones por ejemplo en inventarios, y de cómo son indicativos para el industrial de cuándo y cuánto debe ofertar, se puede partir de los trabajos de Lloyd Metzler(1941) quien han intentado explicar el ajuste de los inventarios de los productores.

Según estos autores, las empresas mantienen inventarios como parte de sus estrategias de producción y venta. Un incremento inesperado en la demanda se satisface con un incremento inesperado en la producción y una reducción inesperada de los inventarios. A la inversa, una contracción en la demanda se absorbe con una caída de la producción o un incremento en los *stocks* de inventarios. Como las empresas normalmente quieren mantener un nivel dado de inventarios en relación al producto, la firma ajustará su producción después de un *shock* inesperado en respuesta a los incrementos o decrementos no deseados en los *stocks* de inventario. Cuando se desencadena una recesión en forma inesperada, por ejemplo, las empresas tienden a acumular inventarios. Posteriormente, la empresa reducirá su producción, con la doble finalidad de ajustarse a la menor demanda del producto y de compensar la acumulación no deseada de inventarios que se produjo al comienzo de la recesión. Así, aun bajo la presión de movimientos inesperados en los inventarios, puede responderse según la teoría de Metzler con ajustes insertados en la teoría clásica.

Para mostrar los movimientos que se expresan en el modelo de Metzler, se inserta la tabla que aparece a continuación.

Período	Producc. p/venta	Producc. p/Invent.	Inversión Autónom	Producto	Ventas	Inv. Final Período
1	600	0	400	1000	600	500
2	600	0	500	1100	660	440
3	660	60	500	1220	732	428
4	732	72	500	1304	782	450
5	782	50	500	1332	799	483
6	799	17	500	1316	790	509
7	790	-9	500	1281	769	521
8	769	-21	500	1248	749	520
9	749	-20	500	1229	737	512
10	737	-12	500	1225	735	502
11	735	-2	500	1233	740	495
12	740	5	500	1245	747	493
13	747	7	500	1254	752	495
14	752	5	500	1257	754	498
15	754	2	500	1256	754	500
16	754	0	500	1254	752	502
17	752	-2	500	1250	750	502

Tabla 2. Comportamiento de inventarios en la teoría clásica

La tabla comienza con un punto de equilibrio como se presenta en la primera línea del cuadro. Como las empresas mantienen el monto exacto de *stocks* deseados (500); la producción para inventarios es cero (col.1) y la inversión autónoma es de 400 (col.3). La producción de bienes de consumo para la venta fija es de 600 (col.1). Por tanto, el valor total del producto es de 1000 (col.4), que es consistente con un valor de 0.6 para la propensión marginal al consumo.

En el período 2 se altera este equilibrio, por ejemplo, por un incremento inesperado en la inversión autónoma de 400 a 500, como resultado de este impacto, el producto sube a 1100 y las ventas aumentan a 660 (0.6 de 1100). Pero como la producción para la venta sigue siendo de 600, con base a las ventas del período anterior, los inventarios tienen una caída inesperada de 60 y las empresas terminan con *stocks* inferiores a lo deseado. En el período siguiente (línea 3), la producción para la venta sube a 660 y también crece la producción para el *stock*, de 0 a 60, para reponer la caída inesperada en los inventarios que ocurrió en el segundo

período. Sin embargo, las ventas totales siguen siendo más altas que la producción, de modo que continúa la caída en los inventarios.

Solo en el período 6 suben los *stocks* hasta el nivel deseado, excediéndolo ligeramente. Este período marca el inicio de la desacumulación de inventarios. Al empezar a caer la inversión en inventarios, el ingreso total también comienza a declinar. A su vez, esto es el inicio de una fase en que las ventas son continuamente menores que lo esperado (lo contrario de los períodos iniciales) y en que repetidamente se acumulan inventarios no deseados. En cada período, entonces, la producción para inventarios es negativa y, en consecuencia, el producto cae durante varios períodos. Nótese en la tabla, que el producto alcanza su *peak* en el período 5, a partir del cual inicia su declinación hasta el período 10, cuando llega a la sima. Comienza entonces otro ciclo, aunque este ciclo es “amortiguado”, esto es, tiene una amplitud menor eventualmente, el producto alcanza un nuevo equilibrio, en este ejemplo al nivel 1250, como queda determinado por el incremento original en la inversión autónoma y la acción del multiplicador keynesiano.¹⁵

Pero el comportamiento de los inventarios, no es la única forma en que la inversión puede generar variaciones; existen distinguidos economistas que han utilizado la *teoría del multiplicador-acelerador de la inversión*. De acuerdo con este modelo, se supone que la inversión evoluciona en correspondencia con la teoría del acelerador, esto es, la inversión responde, no al nivel del producto sino al cambio en el producto.

El sencillo ejemplo mostrado arriba puede conducirnos a una falsa idea de simplicidad respecto al comportamiento de los inventarios, y los efectos de estos en la oferta, la demanda, y el precio de *x* producto. La idea simple es que cuando hay excesos en los inventarios se detiene la producción y cuando empieza a faltar producto la producción se reactiva. La realidad, sin embargo, es más compleja. El comportamiento de los inventarios no es más que el reflejo de un entramado de relaciones entre el productor y el consumidor inscritas en las teorías clásicas de microeconomía, y que impactan a su vez el nivel de la macroeconomía.

A efecto de tener una visión más comprensible de cómo se estructuran los conceptos de oferta, demanda y precio en la versión teórica de los manuales de Economía actuales, hemos reservado los dos capítulos subsecuentes para ofrecer una panorámica general de su estado actual, con el objeto de confrontarla posteriormente con algún modelo alternativo.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Porqué el comportamiento de algunos mercados es tan inestable y los precios de sus productos tan volátiles ?

Siendo el café uno de los mercados con esas características, ¿existe alguna posibilidad de predecir su comportamiento en cuanto a las cantidades reales de oferta y demanda, inventarios físicos y precios?

En caso afirmativo, ¿qué herramientas de medición serán las adecuadas para hacer tales predicciones con grados de certidumbre aceptables?

En caso negativo, ¿qué alternativas teóricas podemos ofrecer para cubrir, si existe esa posibilidad, las insuficiencias teóricas de las herramientas utilizadas?.

HIPÓTESIS

1. Suponiendo la validez del enunciado económico que establece que la economía de un país se encuentra en equilibrio cuando oferta y demanda se igualan, manteniendo constantes las demás variables del modelo macroeconómico general, entonces las perturbaciones económicas surgen del desequilibrio de estos elementos, y las crestas y simas que se observan en las gráficas del comportamiento de estos elementos son consecuencia de estos movimientos.
2. Para el caso que nos ocupa, si el equilibrio de la oferta y la demanda se mantuviera relativamente estable, entonces esperaríamos cambios predecibles en el precio del café. Como se ha observado que esto no sucede, proponemos que existen otras variables (clima, problemas sociales, devaluaciones etc.), que hacen inestable a este sistema. (En la noción de inestabilidad de los sistemas complejos)
3. El efecto observable con mayor nitidez en el caso del cultivo del café, es la variabilidad permanente de sus precios, lo cual constituye un rasgo importante para catalogarlo como un producto esencialmente inestable y difícil de predecir su comportamiento.

METODOLOGÍA

Modelar, en primer lugar, con herramientas tradicionales las relaciones oferta, demanda, inventarios y precios, con el objeto de tener modelos de contraste que permitan justificar el porqué se requieren otro tipo de modelos alternativos. Para ello, correremos un modelo en SAS, basado en Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), que examine los grados de correlación de estas variables, y, en lo posible, reflejen algunas predicciones.

Enseguida, modelaremos bajo sistemas dinámicos no lineales, un prototipo de comportamiento económico de la relación oferente-demandante, utilizando un modelo proveniente de la Teoría del Caos, para mostrar que el equilibrio económico solo puede existir bajo determinadas condiciones controladas, pero en general servirá para mostrar que, por lo menos el mercado del café es inestable, y, por tanto, de naturaleza caótica.

Para ambos casos, se utilizarán los mismos datos, solo que en un caso, se tratará de establecer la relación inventario-precio, y en el otro, la dificultad de predecir los precios. Para ello se hará uso de los datos de oferta, demanda e inventarios del mercado del café de 9 años (de 1989 a 1997), y un muestreo, en el mismo tiempo, de 265 datos de precios de este producto.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

¹ Prigogine Ilyá. *El Fin de las Certidumbres*. Editorial Andrés Bello. Chile.1996. Págs. 35 a 39.

² Ídem.

³ Crutchfield, P. James, et al. 1985 . *Chaos*. Scientific American.p.41.

⁴ Ott, Edward.1995. *Chaos in Dinamical Systems*. Cambridge University Press.
U.S.A. Pág. 6.

⁵ Ibídem. Pág. 7.

⁶ Ídem.

⁷ Weiss,D. Michael. 1991. *Non Linear and Chaotic Dynamics: An Economist's Guide*. The Journal of Agricultural Economics Research/ vol.43, No. 3 Summer. Pag.2.

⁸ Ibídem. Pág. 3.

⁹ Ibídem. Pág.4.

¹⁰ Ibídem. Pág.6.

¹¹ Ibídem. Pág.6.

¹² Ibídem. Pág.8.

¹³ Ibídem. Pág.9.

¹⁴ Ibídem. Pág. 11

¹⁵ Citado por Sachs D. Jeffrey y Larraín B. Felipe.
Macroeconomía en la Economía Global.
Prentice Hall Hispanoamericana. México. 1994. Pág. 522.

CAPÍTULO I

Si nuestro punto de partida expresado en los párrafos precedentes ha sido correcto, el siguiente paso es profundizar un poco más en los temas de la oferta y la demanda y analizar lo que ocurre cuando se relajan varios de los supuestos que subyacen en la teoría clásica. Por ello hemos considerado la conveniencia de analizar los componentes microeconómicos de la oferta y la demanda, y, de ahí, derivar sus consecuencias en la parte macroeconómica.

El presente desarrollo se inscribe en el tema general de microeconomía denominado la oferta y la demanda en el mercado.

Para abordar la problemática, es necesario recordar que en el centro de la elaboración de la teoría clásica sobre el tema, se encuentran cuatro supuestos básicos, uno general, y otros tres particulares que se derivan del primero:

1. Que cada consumidor o unidad familiar posee una información completa acerca de todo lo que se relacione con sus decisiones de consumo.
2. Que el consumidor conoce la existencia de algunos bienes y servicios.
3. Que cada consumidor prefiere algunos bienes a otros.
4. Que cada consumidor posee un ingreso con el cual puede incidir en el mercado, reflejando estas preferencias.

Aunque los supuestos anteriores están enunciados en forma clara y sencilla, sobre ellos se encuentra montada una red de conceptos económicos que le dan sustento a la teoría clásica del comportamiento del consumidor. Nuestro trabajo consistirá en cuestionar la validez actual de los supuestos anteriores, proponiendo el relajamiento de las citadas suposiciones a través de un aparato conceptual diferente del clásico.

A efecto de tener presentes los elementos de análisis sobre los que vamos a actuar, permítasenos hacer una breve recapitulación de la teoría clásica sobre el tema.

Recordemos que en el centro de esta teoría se encuentra el concepto de **utilidad** o satisfacción subjetiva que le reporta a una persona el consumo de un bien o servicio, y que explica el porqué una persona distribuye, como lo hace, sus recursos económicos entre las mercancías que le reporten mayor placer o utilidad. La aplicación de esta teoría se enuncia en la llamada **ley de la utilidad marginal decreciente**, según la cual *a medida que aumenta la cantidad consumida de un bien tiende a disminuir su utilidad marginal*.

La **cantidad consumida o demandada** de un bien tiene que ver con su **precio** y con el **ingreso disponible** para comprarlo. Para ilustrar esto,

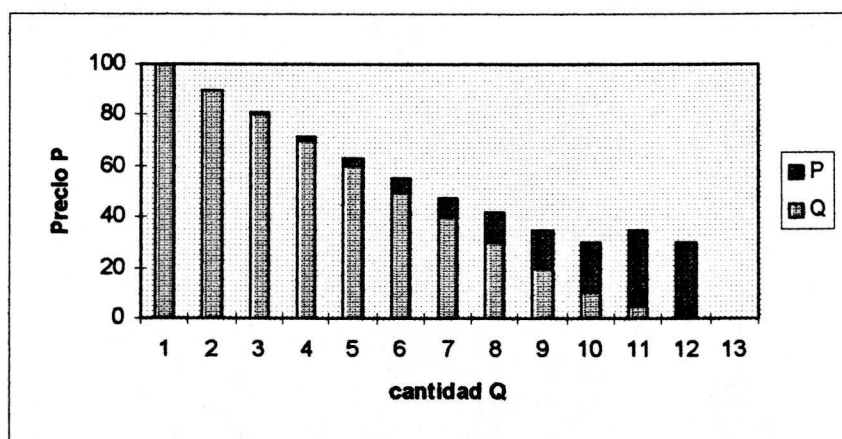
consideremos el caso más simple de un comprador y un artículo en el que obviamos por el momento su ingreso disponible, mostrando solamente la cantidad de mercancía que este comprador está dispuesto a adquirir a un determinado precio.

DEMANDA DE COBERTORES DEL SR. X

Precio	Cantidad Comprada
100	0
90	0
80	1
70	2
60	3
50	5
40	7
30	12
20	15
10	20
5	30
0	30

Tabla 3. Relación precio-cantidad comprada.

Gráficamente los resultados anteriores se conocen como la curva de demanda del mercado:



Gráfica 1. Relación precio-cantidad comprada

Puesto que una familia elegirá entre una gran cantidad de bienes diferentes de un conjunto, es común encontrar en los libros de texto, una ampliación a dos artículos para mostrar cómo sería el comportamiento del consumidor bajo esta nueva situación. También aquí se añaden otros tres supuestos que conviene destacar:

a). Que el consumidor puede determinar entre dos bienes A y B, cuál de los dos le producirá mayor satisfacción. Si puede discriminar entre

ambos, entonces tiene **preferencia** por alguno de ellos, si no, entonces le es **indiferente** cualquier combinación.

b). Que las preferencias son continuas.

c). Que si se añade un tercer elemento C a la relación, en donde A es preferido a B y B es preferido a C, entonces A es preferido a C, con lo que se establece una **propiedad transitiva de la relación** de preferencias. En forma tabular podemos expresar esta situación así:

Conjunto	Cantidad de X	Cantidad de Y	Preferencia
A	6	6	4
B	3	5	3
C	4	3	3
D	5	2	3
E	3	4	2
F	1	4	1
G	2	2	1
H	3	1	1

Nota: El número más grande indica mayor preferencia

Tabla 4. Orden de preferencia entre bienes.

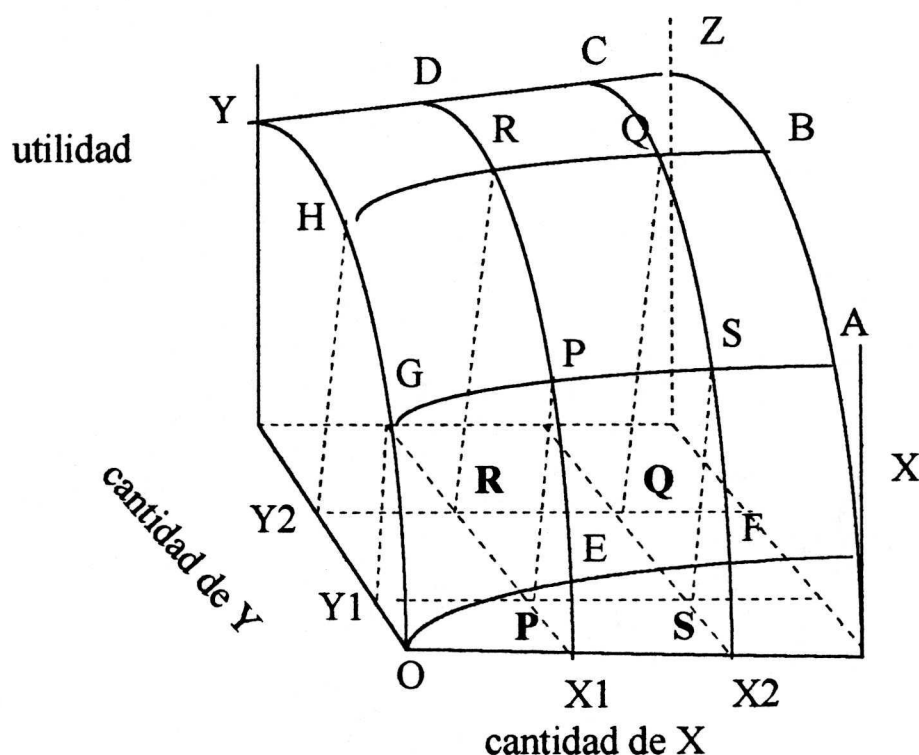
El ordenamiento que puede hacer el consumidor se expresa en forma algebraica de la siguiente manera:

Sea un consumidor 'C' con solo dos posibilidades de elección entre bienes X, Y, la función de utilidad que puede construir es la siguiente:

$$U(x, y)$$

"donde la utilidad (U) es el producto de las cantidades que se asignen a X y Y. Si X representa el consumo de 10 unidades, y Y representa también 10 unidades, la utilidad total es de 100 unidades. Cualquier otra combinación que le reporte la misma utilidad, será preferible para él que una en la cual X y Y representen por ejemplo, 5 cada una, pues su utilidad será de 25 contra las 100 unidades originales de utilidad."¹

En la actualidad, los economistas han sustituido el concepto **cardinal** de utilidad, que exige saber el número de unidades en cada combinación, por el concepto **ordinal** en el que las cantidades de X y Y carecen de importancia, dando paso a una representación gráfica de la utilidad llamado **mapa de indiferencia**.



Gráfica 2. Mapa de indiferencia.

Así, sin la intervención de cantidades, tenemos la representación gráfica ordinal de la tabla de las preferencias entre bienes anterior, a la que se le añadió un eje vertical que relaciona la utilidad asociada con el conjunto de bienes de la tabla, por un punto en el plano X, Y. **Q** representa un punto en el plano y se refiere al conjunto OX_2 unidades de X y OY_2 unidades de Y. La distancia vertical, **QQ**, mide la utilidad asociada a **Q**, y así para cualquier otro punto.

Algebraicamente la utilidad se expresa como un equilibrio entre diversas sustituciones de bienes X y Y que proporcionan un mismo nivel de satisfacción; esto se conoce como la **tasa marginal de sustitución**:

“Un aspecto esencial de la teoría subjetiva del valor es que diversas combinaciones de bienes pueden generar el mismo nivel de utilidad. ...Es importante conocer la *tasa* a la que los consumidores están *dispuestos* a sustituir un bien por otro en sus patrones de consumo.”²

Esto, que gráficamente se conoce con el nombre de **curva de indiferencia**, da lugar a la tasa marginal de sustitución que se expresa como “*el número de unidades de Y que deben sacrificarse por unidad adicional de X de tal manera que se conserve un nivel de satisfacción constante*...”³ y cuyo desarrollo operacional es como sigue:

“Sea la función de utilidad $U(x,y)$. El cambio de utilidad derivado de un cambio pequeño en x (o en y) es la *utilidad marginal* de x (o de y). Por tanto, la utilidad marginal de x es $\partial U / \partial x$ y la utilidad marginal de y es $\partial U / \partial y$ tomamos la derivada total y obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0$$

Despejamos la pendiente de la curva de indiferencia, dy/dx , dado que $U(x,y) = c$ (donde c es una constante) encontramos que ⁴

$$\underline{-\frac{dy}{dx} \Big|_{u=c} = TMS_{y \text{ por } x} = \frac{\partial U}{\partial x} / \frac{\partial U}{\partial y}}$$

Los últimos componentes del modelo tradicional del comportamiento del consumidor, son el ingreso disponible y los precios de los bienes.

De nuevo considerando solo dos bienes X y Y , encontramos que cada consumidor se enfrenta a los precios de mercado p_x y p_y de esos bienes, y para adquirirlos el consumidor cuenta con un ingreso I para un período determinado.

La expresión algebraica $I \geq xp_x + yp_y$ indica que la cantidad gastada en X al precio de ese bien, más la cantidad gastada en Y a su precio, no exceden al ingreso monetario.

Podemos asimismo considerar la expresión anterior como una igualdad, y en ese caso:

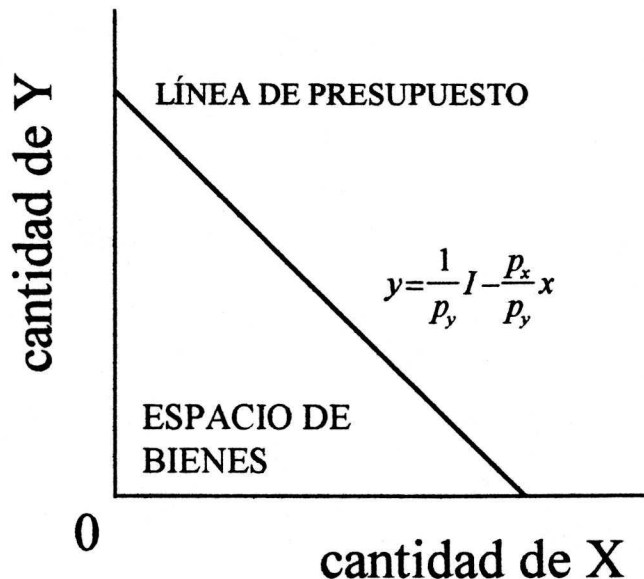
$$I = xp_x + yp_y$$

Despejando Y del eje vertical tenemos la ecuación de una recta:

$$y = \frac{1}{p_y} I - \frac{p_x}{p_y} x$$

La gráfica correspondiente se vería así:

ESPACIO DE PRESUPUESTO



Gráfica 3. Línea de presupuesto.

Varias consecuencias se pueden derivar de esta gráfica: en primer lugar, que una disminución del ingreso desplazará la línea de presupuesto hacia el origen, así como un incremento la alejará de él; en segundo lugar, un incremento a los precios de Y hará que el consumo de Y disminuya, y el consumo de X se incremente, haciendo la inclinación de la pendiente menos pronunciada. Si X es el que se eleva en precio, entonces la pendiente se hace más pronunciada, lo que indicará un consumo mayor de Y.

La variación que puedan sufrir el ingreso y /o el precio de los bienes, hace entrar en juego el concepto de **elasticidad**, de la demanda, según el cual *un incremento al ingreso manteniendo constantes los precios de los bienes y servicios trae consigo un incremento considerable de la demanda si el bien es elástico; si por el contrario, es inelástico, apenas si experimentará alguna variación.* Por otro lado, *si se incrementan los precios manteniendo constante el salario, la demanda se verá disminuida significativamente si el bien es elástico y apenas se modificará si es inelástico.*

La formulación algebraica de la elasticidad E se expresa como:

$$E = \frac{\Delta Q}{(Q_1 + Q_2) / 2} / \frac{\Delta P}{(P_1 + P_2) / 2}$$

Y la ejemplificación tabular de tal formulación la encontramos así:

CÁLCULO NUMÉRICO DEL COEFICIENTE DE ELASTICIDAD						
Q	ΔQ	P	ΔP	$\frac{Q1 + Q2}{2}$	$\frac{P1 + P2}{2}$	$E = \frac{\Delta Q}{(Q1 + Q2) / 2} / \frac{\Delta P}{(P1 + P2) / 2}$
0		6				
	10		2	5	5	$\frac{10}{5} / \frac{2}{5} = 5 > 1$
10		4				
	10		2	15	3	$\frac{10}{15} / \frac{2}{3} = 1$
20		2				
	10		2	25	1	$\frac{10}{25} / \frac{2}{1} = 0,2 < 1$
30		0				

*Nota: El ejemplo y la fórmula son de Samuelson⁵

Tabla 5. Cálculo coeficiente de elasticidad.

De acuerdo con nuestro supuesto a) de la teoría de la utilidad, según el cual nuestro consumidor maximiza su satisfacción en las combinaciones de bienes que elige, el problema de estimar el punto de equilibrio en el cual la tasa marginal de sustitución se iguala a la razón de los precios, en *Estática Comparativa* se resume en resolver la ecuación de una recta y en *Programación Matemática* en un problema de optimización de la utilidad con restricciones en programación lineal.

En forma muy sucinta, se ha intentado plantear los principales elementos constitutivos de la teoría clásica de la utilidad esperando tener con ello un panorama comprensible de nuestro objeto de análisis. Habiendo arribado a este punto, es conveniente hacerse algunas preguntas.

A pesar de la antigüedad de la teoría de la utilidad y de sus innegables méritos, puede uno preguntarse: ¿ Realmente el mercado por el lado de la demanda, se comporta como lo plantea la teoría clásica?. Si es así, ¿porqué atribuía Keynes un margen de irracionalidad en el consumo dentro de sus famosos ocho factores subjetivos⁶, o porqué Samuelson y otros premios Nobel de Economía pueden afirmar que:

“Al gastar su dinero, la gente actúa con regularidad, pero no siempre racionalmente...lo que mucha gente considera como necesidades imprescindibles son, en gran parte, no *verdaderas necesidades fisiológicas*, sino *deseables conveniencias sociales*... Toda empresa que adquiere una gran cantidad de mercancías comprueba cuidadosamente su calidad y se asegura que la compra esté hecha al menor coste posible; pero no ocurre así con el consumidor medio, que resulta un aficionado en el arte de gastar dinero y que paga 25

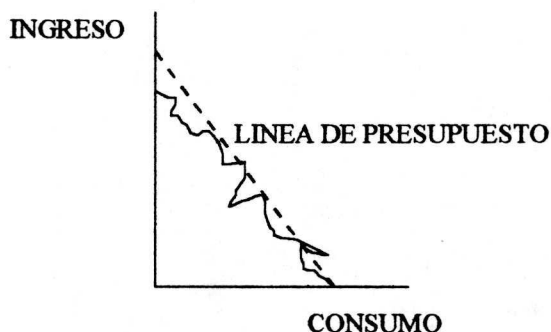
centavos por 6 tabletas de aspirinas cuando podría comprar 100...igualmente buenas por 19 centavos...y análogamente comete otra serie de evidentes desaciertos.”⁷

¿Será al menos posible que la optimización sea un fenómeno raro y que lo que ocurre normalmente sea una oscilación de combinaciones por debajo y encima de la línea presupuestal?

El supuesto de la información perfecta del consumidor ¿no será una idealización extrema, y por tanto irreal?

Asumiendo que estas interrogantes tienen sentido, se ensaya en este apartado la hipótesis de que el concepto de “utilidad” esconde, a pesar de los 100 años transcurridos desde su planteamiento, una complejidad que está lejos de haberse agotado. Las respuestas, según mi opinión, requieren un tratamiento bajo una óptica distinta más cercana a la dinámica del comportamiento real de los agentes económicos.

No cabe duda de que nuevas alternativas teóricas se abren una vez que se relajan los supuestos originales de la teoría de la utilidad. Por ejemplo, si las curvas de indiferencia se están moviendo además de sobre la línea de presupuesto debajo y por encima de la línea de presupuesto, entonces debemos convertir nuestras ecuaciones lineales en no lineales, y, buscar para cada caso, las soluciones si es que existen, lo cual trae consigo mayores dificultades técnicas. La consecuencia inmediata es la conversión de una ecuación de línea recta, en una que solo refleja regiones factibles relativas, como se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica 4. Regiones de factibilidad.

Bajo esta óptica, podemos representar algunos métodos matemáticos de solución para este tipo de comportamiento, como problemas de optimización no lineal⁸ :

Sean $f(X)$ una función continua que denota a la función objetivo,

$h_1(X), h_2(X), \dots, h_m(X)$ funciones continuas que denotan restricciones de igualdad, $g_{m+1}(X), g_{m+2}(X), \dots, g_p(X)$ funciones continuas que denotan

funciones de desigualdad y $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ un vector columna en el espacio Euclidiano de n-dimensiones, E^n . Se define un problema de optimización no lineal al siguiente:

$$\text{Opt } f(X)$$

sujeto a

$$h_j(X) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$g_j(X) \geq 0, \quad j = m+1, \dots, p$$

$$X \in E^n$$

Varios ejemplos nos mostraran que las dificultades se acrecientan cuando la optimización o minimización no la encontramos sobre la línea presupuestal:

$$\text{Min } f(X) = X_1^2 + X_2^2 + 2X_2$$

sujeto a

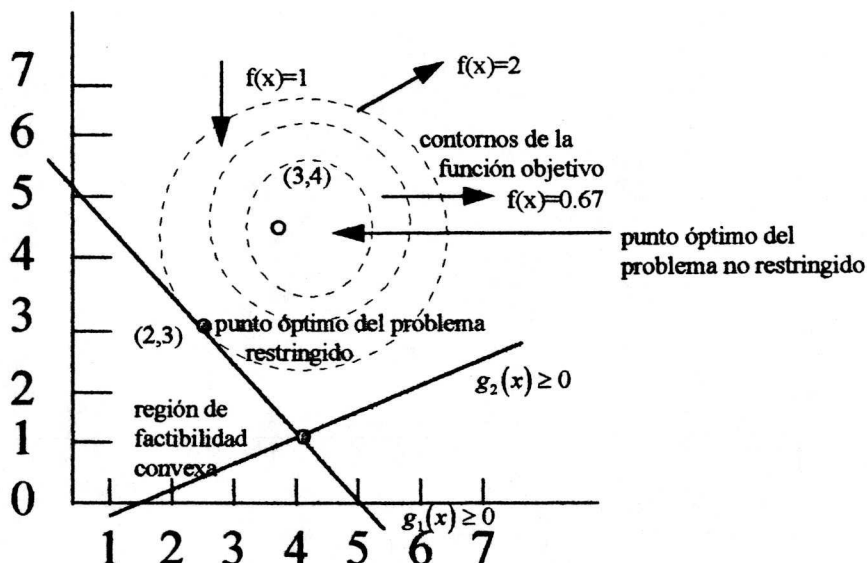
$$h_1(X) = X_1 + 2X_2 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$g_2(X) = X_1^2 + X_2^2 - 1 \leq 0,$$

$$g_3(X) = X_1 \geq 0,$$

$$g_4(X) = X_2 \geq 0$$

cuya representación gráfica es la siguiente:



Gráfica 5. Minimización en problemas no lineales

“La recta sombreada (generada por la intersección de restricciones lineales) constituye la región de factibilidad, mientras que los círculos concéntricos (con línea discontinua) son los contornos de la función objetivo para diferentes valores del vector $X = (X_1, X_2)$.”⁹

“... Hay casos donde el punto óptimo está en el interior de la región de factibilidad, más no, en un punto extremo de la misma, como es el caso de :

$$\min f(X) = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 2)^2$$

sujeto a

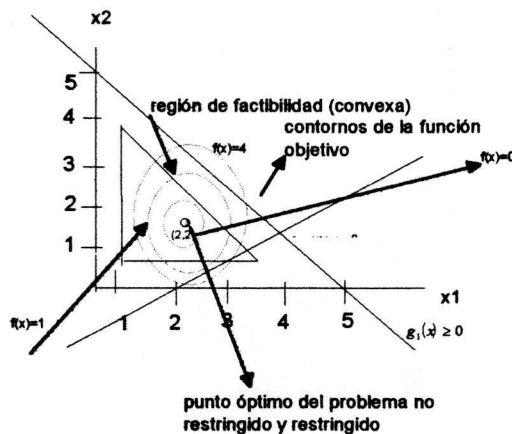
$$g_1(X) = 5 - X_1 - X_2 \geq 0,$$

$$g_2(X) = \frac{5}{2} - X_1 + X_2 \geq 0,$$

$$g_3(X) = X_1 \geq 0,$$

$$g_4(X) = X_2 \geq 0,$$

cuya representación gráfica es:



Gráfica 6. Minimización no lineal.

“... la gran desventaja de los métodos de optimización no lineales, es que, generalmente encuentran un *óptimo local o relativo*, más no el *óptimo global o absoluto* ... El problema serio que se presenta, es que no existe método alguno en la optimización no lineal, que detecte sistemáticamente a todos los mínimos o máximos locales. Más bien, estos se encuentran por el método de *error y prueba*”¹⁰

Otra posibilidad es considerar a la línea de presupuesto como una línea de regresión y entonces formular una solución estadística del tipo de una curva de Engel en sus diferentes modalidades.

Por ejemplo, la curva normal de Engel señala que para determinado nivel de ingreso, determinados bienes o atributos serán alcanzables:

“En el caso de un atributo, digamos la propiedad de un automóvil, la curva *individual* de Engel ...está determinada completamente por el *ingreso crítico* y_0 del hogar considerado. El i -ésimo hogar tendrá el atributo si y solo si su ingreso real y_i excede o iguala a su ingreso crítico q_{0i} ; denotando el atributo mediante una variable q_i (0,1) tenemos¹¹

$$q_i = 1 \text{ si } y_i \geq y_{0i},$$

$$q_i = 0 \text{ en cualquier otro caso.}$$

Así proceden de hecho los economistas, cuando desean determinar las propensiones marginales al consumo, agrupando determinados bienes y servicios analizando el comportamiento del consumidor ante incrementos en el salario, por ejemplo:

“ Cada número en la tabla muestra el cambio porcentual en gastos en el bien o servicio para un cambio de 1% en el ingreso. Los datos están basados en una muestra de 3,487 familias en Nueva Zelanda encuestadas en el período de 1981-1982.”¹²

Efecto estimado del ingreso sobre los gastos

categoría	grupo con el ingreso más bajo	grupo con el ingreso más alto
comida	0.63	0.84
casa habitación	1.22	1.80
operación de la casa	0.66	0.85
ropa	1.29	0.98
transportación	1.50	0.90
tabaco y alcohol	2.00	0.85
otras provisiones	0.92	0.89
otros servicios	0.94	0.85

Tabla 6. Relación Gasto-ingreso.

-
- ¹ Gould, P. John y Lazear P. Edward. 1994. *Teoría microeconómica*. F.C.E. México pág. 66.
- ² *Ibid.* pág. 82.
- ³ *Ibid.* pág. 84.
- ⁴ *Ibid.*
- ⁵ Samuelson Paul A. y Nordhaus William D. 1993. *Economía*. McGraw Hill. México. págs. 82 y 83.
- ⁶ Keynes, Maynard John. 1991. *Teoría General de la Ocupación, el Interés y el Dinero*. México. F.C.E. pags. 102 y 103.
- ⁷ Samuelson, Paul A. 1959. *Curso de Economía moderna*. Aguilar. Madrid, págs. 170 y 171.
- ⁸ Prawda, Juan. 1995. *Métodos y modelos de investigación de operaciones*. Limusa, Noriega Editores. México, pág. 615.
- ⁹ *Ibid.* Pág. 616
- ¹⁰ *Ibid.* Pág. 618 y 619.
- ¹¹ Cramer, J.S. 1968. *Econometría empírica*. F.C.E. México, pág. 32.
- ¹² Hirshleifer, Jack y Glazer Amihai. 1992. *Microeconomía, teoría y aplicaciones*. Prentice Hall. México, pág. 112.

CAPÍTULO II

Para desarrollar una teoría completa del funcionamiento de los mercados necesitamos desarrollar, aunque sea brevemente, una teoría de la empresa¹. Al igual que la teoría clásica del consumo familiar se basa en el supuesto de que los hogares buscan maximizar su utilidad, la teoría de la empresa se basa en el supuesto de que la empresa busca maximizar sus beneficios. Por beneficio vamos a entender el ingreso total menos el costo económico total ($B = I - C$).

El ingreso total (I) es igual a la cantidad de unidades producidas por su precio ($q * p$), y el costo económico es la suma del costo de oportunidad de todos los factores que intervienen en la producción.

Por ejemplo, si un empresario utiliza su casa como local de la empresa, y la renta que podría obtener alquilándola es menor que la utilidad que le reporta utilizarla, entonces está haciendo el mejor uso alternativo de su bien inmueble.

Una de las cuestiones implicadas en este trabajo, es el nivel de producto que debe producir una empresa: se desea saber a qué nivel de producto se obtiene el beneficio máximo.

Como en la determinación del ingreso participa el precio, un precio mayor implica un ingreso mayor manteniendo constante la cantidad vendida del producto. En la teoría de la elección del capítulo anterior, habíamos encontrado una curva de demanda que resume la relación entre la cantidad de un bien que los consumidores están dispuestos a comprar y el precio del bien. La curva de demanda del mercado nos dice cuanto producto pueden vender en total todas las empresas de la industria a un precio dado. Necesitamos elaborar ahora una curva de oferta similar de una empresa específica.

Suponga que una transnacional X fija el precio de sus hamburguesas a un determinado precio para observar su comportamiento como se muestra enseguida.

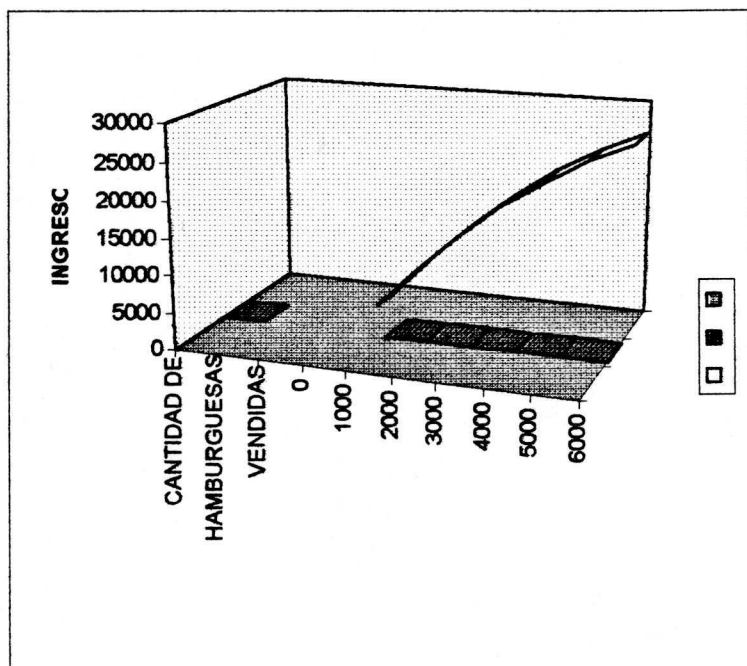
Tabla 7. Relación precio-producción

CANTIDAD DE HAMBURGUESAS VENDIDAS	PRECIO POR UNIDAD	INGRESO
0		0
1000	6.00	6000
2000	5.67	11340
3000	5.30	15990
4000	5.00	20000
5000	4.67	23350

6000

4.33

25980



Gráfica 7. Relación precio- producción.

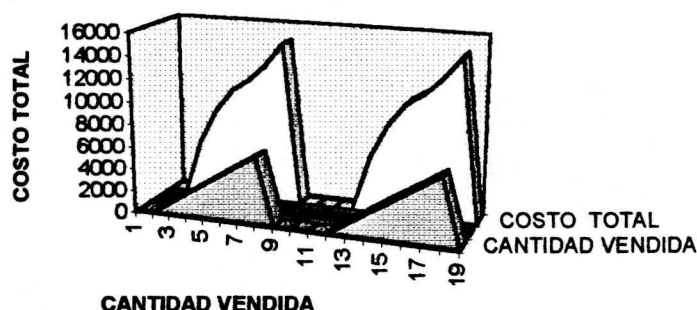
Si la empresa desea vender, por ejemplo, 4,000 hamburguesas al mes, deberá venderlas a 5.00 pesos para garantizar un ingreso de 20,000 pesos.

El otro componente del beneficio es el costo. Los gastos que integran el costo, dependen de las cantidades de factores utilizadas y de los precios de dichos factores. Se trata ahora de averiguar como cambian los gastos cuando la empresa varía su nivel de producto.

Supongamos ahora que la empresa ha definido sus costos de acuerdo con la siguiente tabla.

Tabla 8. Relación cantidad vendida-costos.

CANTIDAD VENDIDA	COSTO TOTAL
0	0
1000	5000
2000	8000
3000	10000
4000	11000
5000	12500
6000	14500



Gráfica 8. Relación cantidad vendida-costos.

Como ya anotamos que el beneficio es igual a la diferencia entre el ingreso total y el costo total, la empresa debe comparar la curva del ingreso total con la del costo total para diferentes niveles de producción. De esta comparación se sigue que para maximizar el beneficio, la empresa deberá operar al nivel del producto para el cual la curva del ingreso total se encuentra más alejada de la curva del costo total.

Con estos elementos estamos en condiciones de saber cuantas hamburguesas debe producir la empresa X.

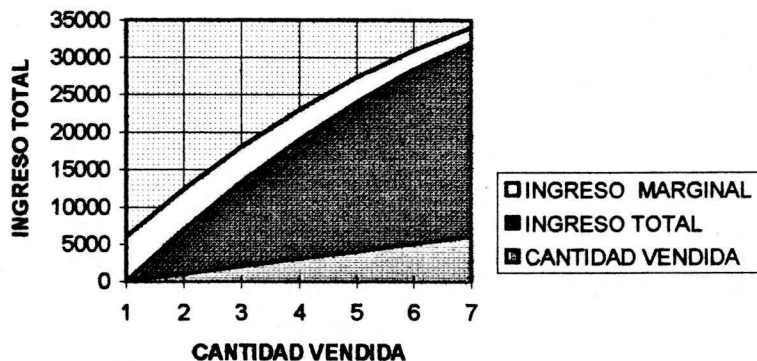
Una forma es examinar toda la curva de beneficio y encontrar su punto máximo. Otra, es plantear que ocurre con los beneficios si la empresa aumenta la producción en una unidad, o, en otras palabras, conociendo lo que técnicamente se conoce como *el ingreso marginal*.

En el ejemplo propuesto, si la empresa está produciendo 3,000 hamburguesas con un ingreso de 15,990 pesos y aumenta su producción a 4,000, incrementará su ingreso en 4,010 pesos debido a que ahora su ingreso total es de 20,000 pesos. Por tanto su ingreso marginal es de 4,010 pesos. La tabla 9 muestra los ingresos marginales para diferentes niveles de producción.

Tabla 9. relación ventas-ingresototal-ingreso marginal

CANTIDAD VENDIDA	INGRESO TOTAL	INGRESO MARGINAL
0	0	6000
1000	6000	5340
2000	11340	4650
3000	15990	4010
4000	20000	3350

5000	23350	2630
6000	25980	2020

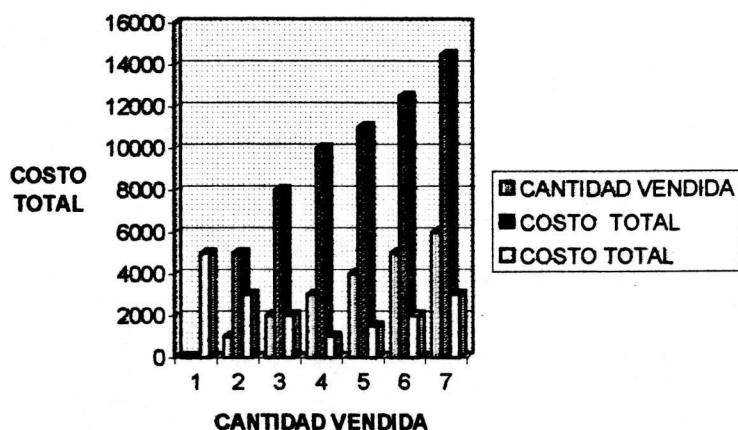


Gráfica 9. Relación cantidad vendida-ingreso marginal-ingreso total

Por el lado del costo, la idea es análoga a la del ingreso marginal. El *costo marginal* es el cambio del costo total, debido a la producción de una unidad adicional de producto. Con los valores de la gráfica 8 podemos construir otra para mostrar el costo marginal al elevar en una unidad el producto.

Tabla 10. Relación cantidad vendida-costo.

CANTIDAD VENDIDA	COSTO TOTAL	COSTO TOTAL
0	0	5000
1000	5000	3000
2000	8000	2000
3000	10000	1000
4000	11000	1500
5000	12500	2000
6000	14500	3000



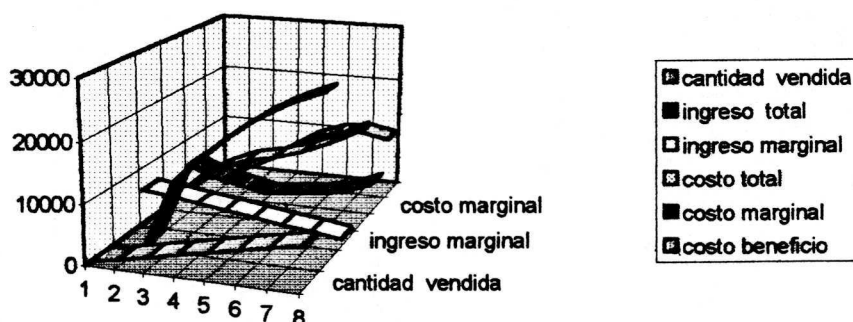
Gráfica 10. Relación cantidad vendida-costos totales.

Dado que $B = MI - CM$, se sigue que si MI es mayor que CM , entonces un incremento de la producción aumentará el beneficio. De igual modo, la empresa deberá aumentar su nivel de producto por lo menos hasta que MI sea igual a CM . La tabla que sigue muestra los niveles de beneficio que permiten tomar una determinación sobre el nivel de producto óptimo que ha de producirse.

Tabla 11. Nivel óptimo de producción.

cantidad vendida	ingreso total	ingreso marginal	costo total	costo marginal	beneficio
0	0	6000	0	5000	0
1000	0	5340	5000	3000	1000
2000	11340	4650	8000	2000	3340
3000	15990	4010	10000	1000	5990
4000	20000	3350	11000	1500	9000
5000	23350	2630	12500	2000	10850
6000	25980	2020	14500	3000	11480
7000	28000	1360	17000	5000	10500

CANTIDAD ÓPTIMA DE PRODUCCIÓN



Gráfica 11. Nivel óptimo de producción.

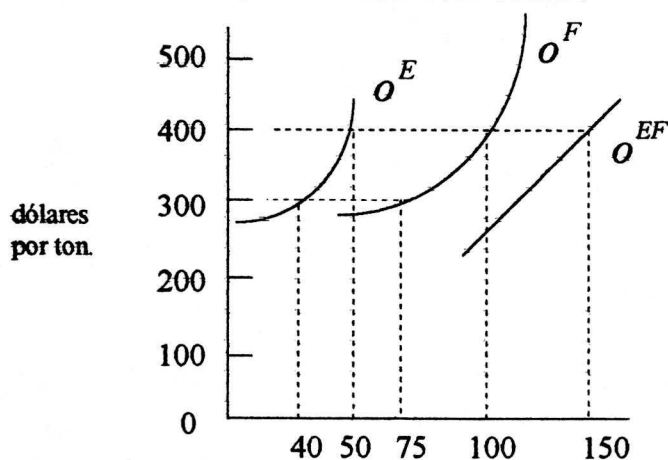
Claramente podemos observar que el máximo beneficio se alcanza en la producción de 6,000 unidades, después de esta cantidad el beneficio empieza a descender.

Para los propósitos de la tesis, dejaremos hasta aquí la exposición sucinta de la teoría clásica de la empresa, según la cual, la producción de mercancías tiene como trasfondo la teoría de la utilidad o beneficio, convirtiéndose así, en una extensión de su similar en la demanda.

Ahora estamos en posibilidad de conjuntar ambas partes del modelo económico para determinar el equilibrio competitivo.

Supongamos que hay dos empresas en el mercado productoras de tomate E y F. De acuerdo con la teoría de la oferta expresada arriba, la curva de oferta individual para E se denota como o^E , mientras que la de F se identifica como o^F en la gráfica siguiente:

SUMA HORIZONTAL DE LAS CURVAS DE OFERTA INDIVIDUALES



TONELADAS DE TOMATE AL AÑO

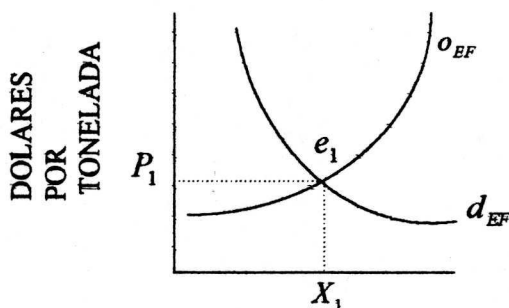
Gráfica 12. Curvas de oferta individuales

Observamos que cuando el precio del tomate es de 400 dólares la tonelada, la empresa E está dispuesta a ofrecer 50 toneladas del producto, mientras que la empresa F ofrece 100 toneladas. Al sumar las dos cantidades, sabemos que la cantidad ofrecida en el mercado a este precio es de 150 toneladas.

La curva de demanda, pero con pendiente negativa, se encuentra de la misma manera que la oferta: sumando las demandas individuales.

De este modo, el equilibrio se da en la combinación de precio y producción, donde la curva de oferta se intersecta con la demanda.

EQUILIBRIO A CORTO PLAZO DEL MERCADO DE TOMATE.



TONELADAS DE TOMATE AL AÑO

Gráfica 13. Equilibrio de la producción.

Al precio P_1 , la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida; ambas son iguales a X_1 . Naturalmente, estamos hablando del equilibrio parcial del mercado y suponemos oferentes y demandantes homogéneos.

¹ Gould P. John y Lazear P. Eduard. 1994.
Teoría microeconomica. F.C.E. México.

CAPÍTULO III

Como quedó establecido, tanto en la introducción como en la metodología, vamos a examinar una regresión simple basada en MCO utilizando el paquete estadístico SAS, como una forma de contrastar la utilización de este tipo de herramientas con las provenientes de la Teoría del Caos¹.

A fin de estudiar las relaciones entre oferta-demanda-inventarios-precios del café se establecen algunos modelos simples y se escriben sus resultados.

DATOS

AÑO	PRECIO	STOCK
1989	106.96	47,898
1990	89.15	40,647
1991	84.97	42,372
1992	63.64	42,867
1993	69.91	37,103
1994	148.53	30,819
1995	149.30	36,772
1996	117.26	29,173
1997	152.21	27,401

El precio está expresado en centavos de dólar por libra y los inventarios en millones de sacos de 60 kgs.

MODELO DE PRECIOS CONTRA TIEMPO

Se ajustaron los precios promedio anuales contra el tiempo en años, desde 1989 hasta 1997.

Se usó el modelo simple de regresión

$$p = a + bt + e$$

donde p es precio estandarizado por la desviación muestral de los mismos en el rango de tiempo estudiado, i.e. el precio dividido entre 34.79, $t = \text{año} - 88$, a, b son los coeficientes de regresión y e es el término de error.

La regresión es significativa a un nivel $\alpha = 0.10$. Los coeficientes de regresión tienen niveles de significancia muestrales de 0.0133 y 0.07 para a y b respectivamente, los cuales muestran cierta consistencia para explicar el precio a través de los últimos años. Las estimaciones del modelo fueron

$\hat{a} = 1.988982$ y $\hat{b} = 0.229415$ que transformados por la estandarización del precio se convierten a

$$\hat{a} = 34.79 * 1.988982 = 69.19668 \text{ y}$$

$$\hat{b} = 34.79 * 0.229415 = 7.98135.$$

Así que la ecuación es

$$p = 69.2 + 8t$$

La que indica lo siguiente:

1. En general, hay un incremento en el precio del café conforme pasa el tiempo, a pesar de una caída drástica ocurrida en los años 92 y 93, en los que se tienen los últimos años con inventarios altos. El incremento se explica por la disminución en los inventarios.
2. El incremento es de 8 centavos de dólar por libra de café por año.

MODELO INVENTARIOS CONTRA TIEMPO

Se ajustaron los inventarios promedio anuales contra el tiempo en años, desde 1989 a 1997.

Se usó un modelo simple de regresión

$$in = c + dt + e$$

donde in es el inventario estandarizado por la desviación muestral de los mismos en el rango de tiempo estudiado, i.e. el inventario dividido entre 6951.16, $t = \text{año} - 88$, c, d son los coeficientes de regresión y e es el término de error.

La regresión es altamente significativa a un nivel $\alpha = 0.001$. Los coeficientes de regresión tienen un nivel de significancia muestrales de 0.0001 y 0.0005 para c y d respectivamente, los cuales muestran una total consistencia para explicar los inventarios a través de los últimos años. Las estimaciones del modelo fueron:

$\hat{c} = 7.02993$ y $\hat{d} = -0.334855$ que transformados por la estandarización de los inventarios se convierten a

$$\hat{c} = 6951.16 * 7.02993 = 48866.16822 \text{ y } \hat{d} = 6951.16 * -0.334855 = -2327.63068$$

Así que la ecuación es

$$in = 48866 - 2328t$$

la que indica lo siguiente:

1. En general, hay un decremento en el inventario de café conforme pasa el tiempo, a pesar de una aparente recuperación en el año 1995. El decremento se explica posiblemente por condiciones adversas en el clima (heladas y sequías), por las épocas de maduración y recuperación del cultivo, entre otras causas.

2. El decremento es de 2,328 millones de sacos de café por año.

De ambos análisis, podemos concluir que una disminución de 2,328 millones de sacos de café, es equivalente a un incremento en el precio de 8 centavos de dólar por libra. El modelo completo quedó de la siguiente manera:

Para mayores detalles sobre el modelo, consultar en las dos páginas anexas el resultado arrojado por el programa de SAS.

Model: model1

Dependent Variable:IN

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	Fvalue	Prob> F
Model	1	6.72769	6.72769	37.014	0.0005
Error	7	1.27232	0.18176		
C Total	8	8.00001			

Root MSE	0.42633
Dep Mean	5.35565
C.V.	7.96043
R Sq	0.841
Adj R Sqr	0.8182

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
Intercep	1	7.02993	0.30972375	22.697	0.0001
A	1	-0.334855	0.05503936	-6.084	0.0005

Model: model1

Dependent Variable:PR

Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	Fvalue	Prob> F
Model	1	3.15786	3.15786	4.565	0.07

Error	7	4.84245	0.69178
C Total	8	8.00031	

Root MSE	0.83173		
Dep Mean	3.13605	R Sq	0.3947
C.V.	26.52161	Adj R Sqr	0.3082

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob> T
Intercep	1	1.988982	0.60423936	3.292	0.0133
A	1	0.229415	0.10737615	2.137	0.07

Otra posibilidad de trabajar con herramientas tradicionales, pero con un modelo más refinado, consiste en suponer que algunos productos como el café, por ejemplo, se ajustan a patrones cíclicos de comportamiento en su producción y consumo, lo que dará por resultado un probable comportamiento en los precios tendencialmente predecibles para el siguiente ciclo.

En el caso del café, por el ciclo de vida del cultivo, pueden suponerse ciclos de 10 años que pueden ajustarse cada cinco. Así, en los datos promedio que aquí se obtuvieron de 265 precios muestra, se observa un patrón que parece obedecer, en la gráfica siguiente, a dos mínimos y un máximo, que matemáticamente puede calcularse con un polinomio de cuarto grado, aun cuando en el futuro pudieran presentarse dos máximos y un mínimo; en este caso el modelo seguiría funcionando.

Recuérdese que en un polinomio de grado cuatro, la derivada:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \text{ es:}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \text{ Así, los puntos criticos de}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ son 3 y cada uno corresponde con un maximo o un minimo.}$$

El programa *polireg* que aparece enseguida, muestra los resultados del polinomio, según el cual, como se aprecia, se ajusta mejor que el modelo simple presentado con anterioridad.

PROG: POLIREG

TERM	COEFFICNT	STD ERROR	T-STATIST	PART CORR	CONTR
------	-----------	-----------	-----------	-----------	-------

RSQ

B0	161.7611	110.6467	1.46196		
B1	-6236185	135.4126	-0.4605322	0.0504	0.018
B2	12.17587	51.24515	0.2376004	0.0139	0.0048
B3	-0.3074459	7.515558	-4.090792	0.0004	0.0001
B4	-3.359943	0.3738546	-8.987301	0.002	0.0007

	SUM SQ	DEG FR	MEAN SQ
DUE TO REGRESSION	6394.384	4	1598.596
ABOUT REGRESSION	3288.744	4	822.1861
TOTAL	9683.128	8	1210.391

R SQUARED	0.6603635
F TEST	1.944324

R SQR CORRECTED	0.3207269
STD ERROR	28.67379

En nuestro ajuste con el polinomio y trabajando con solo dos decimales tenemos:

$$f(x) = 161.76 - 62.36x + 12.18x^2 - .31x^3 - .03x^4$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -62.36 + 24.36x - .93x^2 - .12x^3 \text{ que al igualarla a } 0$$

nos da muy aproximadamente los valores que se buscaban.

De acuerdo con programa y la tendencia que se muestra, podemos decir que para 1998 esperamos a final del año un precio aproximado entre los 155 y 160 centavos de dólar por libra de café.

Los ejemplos descritos arriba, muestran el nivel estadístico (los conjuntos de valores) con el cual describimos distribución de probabilidades, y para lo cual, utilizamos algunas herramientas estadísticas tradicionales. No obstante, hay que distinguir el nivel individual, (las trayectorias), donde los resultados quizá no muestren el mismo patrón de regularidad, que corresponde a un promedio. Con el manejo de la probabilidad, superponemos trayectorias y ello no nos conduce a propiedades nuevas; el nivel individual como el estadístico, se vuelven equivalentes. Pero, si consideramos a los sistemas como inestables en el sentido descrito arriba, el nivel individual cobra otro significado y se requieren otras herramientas matemáticas para valorarlo, las cuales hemos denominado como complejas o caóticas. Para mostrar el comportamiento caótico de un sistema consideremos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = kx$$

donde k es una constante, funciona como modelo matemático de diversos problemas en diferentes áreas del conocimiento. En realidad, todos los que contengan una cantidad cuya tasa de cambio sea proporcional a su valor en curso. Así por ejemplo, un problema de interés compuesto en el que $A(t)$ sea la cantidad en dólares de una cuenta de ahorros en el tiempo (t) medido en años, en donde el interés es continuamente compuesto a una tasa de interés anual r . Si fuera el caso de que se tratara del 10% de interés anual, $r = 0.10$. Así, el interés compuesto continuo significa que, durante un cierto intervalo de tiempo $\Delta A = rA(t)\Delta t$ de modo que

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = rA$$

Pero también pueden servir para el cálculo de movimientos en inventarios, oferta, demanda y precios refinando la ecuación y adecuándola a cada situación específica.

Para mostrarlo, vamos a presentar en lo que sigue, un modelo de crecimiento en el espacio de bienes que se ajustan a índices de oferta y demanda que no son necesariamente constantes. Estableceremos una función en el número de bienes $N(t)$ que será una aproximación **continua** al universo de bienes real, que crece con incrementos discretos. Con ello esperamos mostrar que si la velocidad de cambio en los inventarios rebasa determinados niveles, se empiezan a observar valores que empiezan a bifurcarse, a formar más bien rangos de valores, hasta llegar a situaciones de impredecibilidad.

Sean $B(t)$ y $D(t)$, respectivamente, la cantidad de sacos de café que se ofertan y se inventarían desde $t = 0$ en el instante t .

Asumiremos, asimismo, que nuestra producción total = oferta total; y que la producción inicial es, en este caso, la oferta del año base 1989. De este modo, oferta = índice de oferta * oferta, índice de inventario = índice del inventario * oferta.

Así pues, los índices de oferta $\beta(t)$ y los de inventario $\delta(t)$, en oferta y demanda por unidad de tiempo, se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(t+h) - B(t)}{hN(t)} = \frac{1}{N} \frac{dB}{dt} \\ \delta(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D(t+h) - D(t)}{hN(t)} = \frac{1}{N} \frac{dD}{dt}\end{aligned}\quad (1)$$

De este modo, el índice de oferta $\beta(t)$ es = la oferta del año en curso - la oferta del año base / oferta total del año base

Por otro lado, el índice de inventarios $\delta(t)$, es = inventario del año en curso - el inventario del año base / oferta total del año base. Entonces:

$$\begin{aligned} N'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[B(t+h) - B(t)] - [D(t+h) - D(t)]}{h} \\ &= B'(t) - D'(t). \\ N'(t) &= [\beta(t) - \delta(t)]N(t) \quad (2) \end{aligned}$$

De forma abreviada:

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \delta)N$$

Por ejemplo, si trabajamos con los datos reales del café¹, que ya se anotaron para la regresión simple, y aplicando la fórmula tendríamos:

Año base: 1989.

Exportaciones más uso doméstico de ese año: 92,651 (Millones de sacos).

Inventarios de año base: 47,898.

Oferta a estimar : 1992.

Oferta reportada: 146,452.

Exportaciones más uso doméstico de ese año: 103,585.

Inventarios de 1992: 42,867.

$$\begin{aligned} \frac{103585 - 92651}{140549} &= .08 \quad \frac{42867 - 47898}{140549} = -.04 \\ 146452 &= 140549 + .08(146452) + (-.04)(146452) \\ 146452 &= 140549 + 11716 - 5858 \end{aligned}$$

Observamos que, con una pequeña variación por los ajustes en el redondeo, llegamos al valor reportado. Vemos que los resultados con la nueva herramienta, muestran una interesante semejanza con las herramientas tradicionales por cuanto en ambos casos es posible predecir, en un caso el comportamiento de los precios, y en el otro el comportamiento de la producción y los inventarios.

¹ USDA Tropical Products: World Markets and Trade.
June, 1996.

A la ecuación (2) la vamos a denominar como *la ecuación general del universo de bienes disponibles*. Si β y δ son constantes, el universo de bienes se mantiene estable con $k = \beta - \delta$. Pero también existe la posibilidad de que β y δ sean funciones variables de t . Adicionalmente, los índices de oferta y demanda no necesitan conocerse en principio, ya que pueden depender de la función desconocida $N(t)$.

En situaciones tan dinámicas como en una economía de mercado, pueden observarse situaciones tales como el que la oferta disminuya mientras que la demanda aumenta y viceversa. Supóngase, por ejemplo, que el índice de la oferta β es una función lineal decreciente del número de bienes N , tal que $\beta = \beta_0 - \beta_1 N$, donde β_0 y β_1 son constantes positivas.

Si el índice de demanda $\delta = \delta_0$ permanece constante, la ecuación (2) toma la

forma siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 N - \delta_0)N;$$

$$\frac{dN}{dt} = kN(M - N) \quad (3)$$

En la que $k = \beta_1$ y $M = (\beta_0 - \delta_0) / \beta_1$. Supongamos que $\beta_0 > \delta_0$ de modo que $M > 0$.

A la ecuación (3) se le conoce como **logística** de acuerdo con la teoría que hemos visto en el capítulo anterior.

Si suponemos que $N < M$, puede resolverse por el método de separación de variables de la siguiente forma:

$$\int \frac{dN}{N(M - N)} = \int k \, dt$$

$$\frac{1}{M} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M - N} \right) dN = \int k \, dt$$

$$\ln \left(\frac{N}{M - N} \right) = kMt + C.$$

Aplicando la exponencial en ambos lados :

$$\frac{N}{M - N} = Ae^{kMt} \text{ en la que } A = e^C$$

Sustituyendo $t=0$ en ambos lados de esta última ecuación encontramos que

$A = N_0 / (M - N_0)$. De modo que

$$\frac{N}{M - N} = \frac{N_0 e^{kMt}}{M - N_0}$$

Al resolver esta ecuación tenemos:

$$N(t) = \frac{MN_0}{N_0 + (M - N_0)e^{-kMt}} \quad (4)$$

Aun cuando se estableció la restricción $N < M$, para obtener la ecuación (4), ella no era necesaria, pues se puede verificar por sustitución directa en la expresión (3), que $N(t)$, tal como se describe en la última ecuación, satisface la ecuación logística tanto si $N < M$ como si N mayor o igual a M .

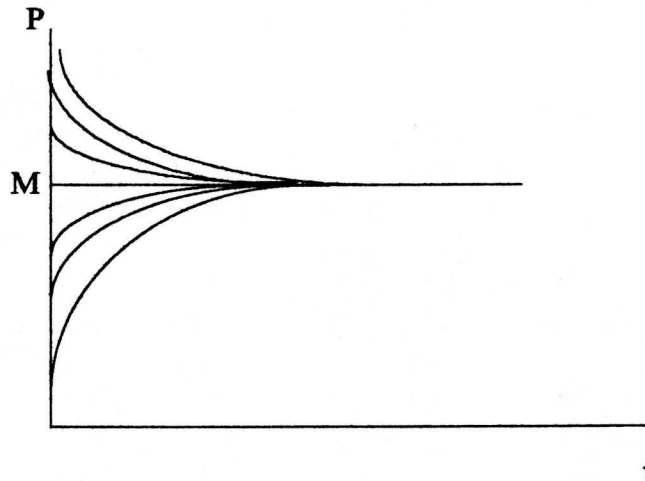
Si el número de bienes inicial, satisface $N_0 < M$, por la ecuación (4) se demuestra que $N(t) < M$ para todo t mayor o igual que 0; y también que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = M. \quad (5)$$

Debido a lo anterior, un universo de bienes que satisface la ecuación logística no es similar a un universo en el que el número de bienes es constante; no se incrementa sin límite, sino que se aproxima al número de bienes límite M cuando $t \rightarrow +\infty$. Pero debido a que en este caso $dN/dt = kN(M-N) > 0$, vemos que el número de bienes está incrementándose constantemente. Más aún, si derivamos con respecto a t .

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = \left[\frac{d}{dN} \left(\frac{dN}{dt} \right) \right] \left(\frac{dN}{dt} \right) = (kM - 2kN)[kN(M - N)].$$

Gráficamente, el número de bienes $N(t)$ tiene un punto de inflexión cuando $N = M/2$.



Gráfica 14. Gráfica de puntos de inflexión.

El número de bienes aumenta con el índice de oferta hasta que $N=M/2$ y en lo sucesivo se hace asintótica a M . Si $N_0 > M$, se demuestra que $N(t)$ es una función constantemente decreciente como se ve en la curva superior de la gráfica.

Vamos ahora a revisar qué es lo que ocurre con una versión discreta de la misma ecuación logística (3) en la que examinaremos comportamientos inesperados provenientes del modelo.

Para ello vamos a reexpresar:

$$\frac{dN}{dt} = kN(M - N)$$

En términos de

$$\frac{dN}{dt} = kNM - kN^2$$

O bien, en forma equivalente

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \quad (6)$$

señalando que $a = kM = \beta_1(\beta_0 - \delta_0)\beta_1 = \beta_0 - \delta_0$

$b = k; \quad k = \beta_1$

Ahora escogeremos una magnitud de paso fija (teorema de Euler*) $h > 0$ y consideraremos la sucesión de tiempos discretos

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots \quad (7)$$

• Algoritmo Método de Euler.

Dado el problema con condiciones iniciales

$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(a) = y_0$ el método de Euler con tamaño de paso h consiste en

aplicar la fórmula iterativa

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n), (n \geq 0)$$

para calcular las aproximaciones sucesivas $y_1, y_2, y_3, \dots$ de los valores (exactos)

$y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots$ de la solución (exacta) $y = y(x)$ en los puntos $x_1, x_2, x_3, \dots$

respectivamente.

en donde $t_{n+1} = t_n + h$ para toda n . Empezando con el valor inicial $N_0 = N(t_0)$, calculamos las aproximaciones

$$N_1, N_2, \dots, N_n, N_{n+1}, \dots \quad (8)$$

a los valores verdaderos $N(t_1), N(t_2), N(t_3) \dots$ de el número de bienes real $N(t)$. Por el método de Euler para la ecuación (6), calculamos las aproximaciones de (8) en forma iterativa por medio de la fórmula:

$$N_{n+1} = N_n + (aN_n - bN_n^2) * h. \quad (9)$$

Suponga que el total de bienes es uno para el cual la magnitud de paso se puede elegir, de modo que las aproximaciones calculadas usando (9) concuerden, con una exactitud aceptable, con los valores reales del total de bienes. La suposición adopta los valores sucesivos $N_n = N(t_n)$ del total de bienes que están dados por la ecuación (9). Así, sustituimos la ecuación diferencial original, por una *ecuación de diferencias discreta*

$$\Delta N_n = (aN_n - bN_n^2) \Delta t \quad (10)$$

que da la diferencia en el total de bienes $\Delta N_n = N_{n+1} - N_n$ en términos de la diferencia de tiempo $h = \Delta t$ y el total de bienes N_n precedente.

Adicionalmente, la ecuación (9) se puede reexpresar como una *ecuación logística de diferencias* de la forma:

$$N_{n+1} = rN_n - sN_n^2 \quad (11)$$

$$\text{donde } r = 1 + ah \text{ y } s = bh. \quad (12)$$

Sustituimos:

$$N_n = \frac{r}{s} x_n \quad (13)$$

La ecuación (11) puede simplificarse en combinación con la sustitución anterior, de este modo:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (14)$$

Estableceremos ahora una variante. Considerando que el precio es resultante de los movimientos de la oferta y la demanda y que satisface una ecuación en diferencias similar a la ecuación (14).

Ahora enfoquemos nuestra atención sobre la fórmula iterativa expresada en (14), a partir de los valores dados de x_0 y r , esta fórmula genera una sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ de valores que corresponden a los tiempos sucesivos $t_1, t_2, t_3, \dots$.

Podemos pensar en x_n , el valor en el tiempo t_n , como el precio de un bien existente en el mercado. Matemáticamente:

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (15)$$

Lo que sigue es investigar la forma en la cual x_∞ depende del parámetro de variación en los precios r en (14).

Las 265 muestras semanales de los precios internacionales del café tomadas de 1992 a 1997, serán la base para mostrar la modificaciones porcentuales y asumirlas como el tamaño de la velocidad de cambio, considerando que a cero oferta y cero demanda corresponde un precio de cero. Así, cualquier precio será positivo mayor que cero. Cero corresponde, entonces, a una cierta noción de "estabilidad" del precio, es decir, no hay "saltos" en los precios, para usar una analogía física con los movimientos de un péndulo.

Desde este punto teórico de reposo en los precios, los movimientos fraccionarios entre cero y uno, son "pequeños" cambios en el sistema, pero una vez que alcanzan determinados niveles de velocidad, pueden representar "grandes" cambios para él. Para poder medir estas "velocidades" de cambio en nuestros precios, vamos a considerar que 1 representa 10 centavos de dólar por libra de café; al mismo tiempo significa la velocidad de cambio de 1, 2 son 20 centavos y la velocidad de cambio 2, y así sucesivamente. Estos valores se verán reflejados reflejados en un programa computacional subsecuente. Más aun, podemos escalar el modelo y asumir que cuando tengamos un precio de, por ejemplo, 35.36 centavos de dólar por libra de café podríamos considerar, creo yo válidamente que la velocidad de movimiento se ha incrementado en 3.56 desde el punto de reposo, esto es, desde el valor cero.

Los precios muestra semanales son los siguientes:

71.25	1992
71.25	
71.25	
71.25	

71.25 1992

71.25

71.25

71.25

61.70

63.05

66.50

67.10

58.40

59.30

56.50

54.65

59.70

52.30

49.85

46.50

44.60

47.50

48.50

45.10

45.60

39.75

39.50

41.20

51.00

55.85

55.15

59.80

60.80

56.20

65.50

62.85

67.25

68.55

74.55

70.60

63.30 1993

66.35

58.70

49.15

56.45

50.35

55.45

58.85

49.00
47.85
51.75
54.10
55.30
54.85
56.45
56.60
53.35
56.25
56.60
54.85
64.35
68.35
67.05
67.50
74.00
64.15
66.25
70.50
70.04
70.00
73.10
75.55
72.65
69.05
70.05
74.50
73.35
75.30
73.05
71.85
73.00
73.20
72.45
74.35
72.30
67.55
66.35
70.65
70.40
72.00
72.15
72.50
72.30

1994

70.50
73.20
77.60
78.50
77.95
77.45
76.80
77.95
88.45
100.35
116.65
119.65
119.85
125.85
123.50
162.70
187.85
241.95
222.85
204.60
203.95
172.45
174.45
184.00
200.90
203.65
210.15
208.90
209.45
186.50
197.65
185.80
173.80
184.00
171.10
153.40
157.20
159.90
142.10
168.75
170.45
163.00
161.70
170.25
161.60

1995

157.75
158.85
162.25
165.80
181.65
172.65
163.20
163.15
160.75
159.10
159.65
162.65
162.65
162.65
170.00
159.40
144.05
151.65
149.10
151.45
136.15
134.95
130.80
125.70
145.60
146.75
144.95
140.60
154.80
155.15
138.75
126.15
123.20
118.80
120.80
122.15
125.60
122.75
127.75
129.40
117.50
115.15
105.40
104.90
103.65

103.65
90.95 1996
105.30
105.65
112.75
125.40
123.20
121.65
110.00
112.50
115.10
115.75
123.50
123.50
123.50
114.25
126.05
126.95
129.00
125.95
128.80
116.65
111.55
117.80
118.70
122.20
114.45
106.90
104.10
104.05
107.50
109.30
131.10
136.45
125.05
117.15
117.15
102.45
102.45
101.40
119.55
118.20
122.00
124.75
132.85

122.25
 124.25
 119.80
 117.75
 117.75
 117.75
 114.05 1997
 113.45
 121.00
 137.05
 148.80
 148.80
 159.65
 180.10
 196.45
 202.75

Si lo anterior resulta cierto, el precio internacional de los precios del café solo puede ser pronosticado con cierto grado de certidumbre con valores por debajo de los 20 centavos de dólar por libra, es decir, con un valor de cambio de 2.0 en su velocidad de cambio. A partir de esos valores, empieza a notarse una variabilidad en los valores que denotan rangos tan amplios que no resultan confiables para el pronóstico. El siguiente programa BASIC nos arroja los resultados descritos:

```

100 'PROGRAM PERIODS
110 '
120 'ITERACION DE LA DUPLICACION DE PERIODO'
130 '
140 ' x = r *x ( 1-x)
150
160 'r = 2.75 : período 1
170 'r = 3.25 : período 2
180 'r = 3.50 : período 4
190 'r = 3.55 : período 8
200 'r = 3.565 : período 16
210 'r = 3.57 : CAOS
220 'r = 3.84 : período 3
230 'r = 3.845 : período 6
240 'r = 3.848 : período 12
250 '
260 DEFDBL R, X
270 INPUT "VALOR DE R" ; R
280 INPUT "IMPRIMIR EN BLOQUES DE K = " ; K
290 P$ = " #.# # # #
  
```

```

300 X = .5 'VALOR INICIAL'
310 '
320 FOR I =1 TO 500 '500 ITERACIONES
330 X = R*X*(1- X)
340 NEXT I
350 '
360 FOR I TO K 'ITERACIONES FINALES
370 X = R*X*(1 - X)
380 PRINT USING P$; X;
390 NEXT
400 IF K <>8 THEN PRINT
410 '
420 'PRESIONE CUALQUIER TECLA EXCEPTO Q PARA CONTINUAR:
430 A$ = INKEY $
440 IF A$ = "" THEN GO TO 430
450 IF A$ = "Q" OR A$ = "q" THEN END
460 GOTO 360 'FIN DE CICLO
470
480 END

```

Cuando se da el parámetro de la velocidad de cambio r (al ejecutar la línea 220), la iteración $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, se lleva a cabo a partir del valor inicial x_0 . Se notará que con un valor dado de r , los resultados no dependen materialmente de x_0 . La iteración se lleva a cabo primero 500 veces sin mostrar los valores calculados de x_n (líneas 320-340). Este es un intento por "estabilizar" hacia el valor límite si lo hay, x_∞ . Después se calculan los valores sucesivos $x_{501}, x_{502}, x_{503}, \dots$ (líneas 360-400), y se exhiben en pantalla para ser analizados en bloques de k iteraciones.

Dado que en $r = 1 + ah$ de (12), solo son pertinentes valores de $r > 1$ la modificación de los valores en el programa a $r = 1.5, 2.0$, y 2.5 muestran incrementos $x_\infty = 0.3333, 0.5000, 0.6000$, respectivamente, lo cual nos podría conducir a la falsa idea de que siempre vamos a encontrar un valor creciente a medida que r se incrementa.

Si probamos con valores de $r = 3.25, 3.50$, o 3.57 , veremos que los precios del café varían prácticamente cada semana, sin poder localizar precios estables más que en cuatro semanas. Parece como si los ciclos límite se duplicaran antes del valor de $r = 3.57$, en el cual no parece haber ya ningún ciclo conformándose un fenómeno de naturaleza caótica.

¹ C.H. Edwards Jr. and David E. Penney.
*Ecuaciones diferenciales elementales
y problemas con condiciones en la frontera.*
Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1994.

CONCLUSIONES

Como se desprende de los ejercicios anteriores, nos encontramos ante dos concepciones o modos de ver la realidad diferentes. Por un lado, la estadística tradicional, parece proponernos una línea de continuidad en la expectativa de poder mantener nuestras predicciones a pesar de la cambiante realidad en la que se mueve la Economía.

Bajo este enfoque, pareciera que es solo un problema de elegir los métodos adecuados y complementar nuestros resultados con sucesivos refinamientos provenientes de la experiencia, lo que nos dará la precisión en los pronósticos. En resumen, se trata de un problema estrictamente técnico que debe ser posible superar.

Por otro lado, si la Economía se presenta como una ciencia, debe cumplir con uno de los rasgos básicos que le exige ese rango, a saber, su fuerza predictiva.

Aquí se han elaborado dos ejercicios que intentan testimoniar el esfuerzo de tales concepciones. La regresión simple como un primer intento, y un polinomio de cuarto grado como ejemplo de un procedimiento algo más refinado. En ambos se establecen predicciones y su corrección o incorrección como modelo, como instrumento de predicción, se verá cuando los hechos les permitan cotejarse.

No obstante, nosotros defendemos desde el principio del trabajo, la tesis de que los modelos económicos por su dinámica misma, por el ejercicio de la libertad humana que puede influir en los procesos económicos, por la intervención de factores sociales globales y naturales, entre otros, resulta difícil establecer pronósticos económicos confiables por lo menos en el mediano y largo plazo.

Lo más que los resultados nos enseñan en esta investigación, es que nuestros mejores pronósticos tienen una vida corta. Al igual que las predicciones climáticas, las predicciones más certeras en Economía no abarcan más allá de un mes.

En el ejercicio mostrado aquí a propósito de la teoría del caos, hemos intentado delinear lo que ocurriría bajo otro escenario diferente. Propusimos que, por lo menos para algunos cultivos agrícolas, cuya variación en precio es importante, resulta válido considerar la posibilidad de otras herramientas no tradicionales. Se probó el caso del café, pero lo mismo podríamos decir del caso de las hortalizas cuyo proceso de cosecha depende de los precios esperados y de otros productos agrícolas, para no hablar de la Bolsa de Valores y otras ramas de la Economía que presentan similares características de variabilidad e incertidumbre.

Nuestra conclusión en este caso, es que a corto plazo y con niveles de variación pequeños, es posible mantener la confianza en que los valores cercanos a un

precio lo hagan relativamente "estable" (bajo la noción de estabilidad matemática que es explicada en el marco teórico del trabajo). Los valores cercanos al punto de estabilidad se mantendrán, mientras que los que se alejen tenderán a tener un comportamiento impredecible en determinados valores. Hemos propuesto que de acuerdo a la teoría de Li y York (ver bibliografía), una vez que las variaciones alcanzan el doble de la secuencia de los valores originales, estos empiezan a formar ciclos que representan rangos de posibles valores, lo que ya dificulta la predicción, pero al alcanzar un nivel 3, esto es, la triplicación en la variación con respecto a las secuencias originales, entonces tenemos tal grado de variaciones en las cotas inferiores o superiores que no es posible determinar el curso futuro de tales valores.

Para plantearlo rigurosamente, vamos a examinar la clase de funciones presentadas por Weiss¹:

$$F_{\mu}(\mu > 1) \text{ la cual es definida por}$$

$$F_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$$

Utilizando esta clase de funciones como leyes de movimiento de un sistema dinámico discreto, que es similar al utilizado en nuestro ejemplo del café. En primer lugar deben plantearse algunos hechos básicos.

Sea $p_{\mu} = (\mu - 1) / \mu$ entonces, $0 < p_{\mu} < 1$ y p_{μ} es un punto fijo de F_{μ} .

Otro punto fijo es 0. Dado que $F_{\mu}(1) = 0$, la órbita originada en 1 se va inmediatamente a 0 y permanece ahí. Finalmente, es fácil mostrar que cualquier órbita de F_{μ} originada en un punto menor que cero (tal como el punto x_0 de la figura de abajo o más grande que 1 tal como el punto x_1 del mismo gráfico) diverge hacia $-\infty$.

En segundo lugar, suponga que $1 < \mu < 3$. Dado $F'_{\mu}(0) = \mu > 1$, 0 es hiperbólico repelente. Por otro lado, dado que $F'_{\mu}(p_{\mu}) = 2 - \mu$ y $-1 < 2 - \mu < 1$, p_{μ} es hiperbólico atrayente. Uno puede mostrar que la base de atracción de p_{μ} es precisamente el intervalo abierto $(0,1)$; cualquier órbita originada en este intervalo (tal como el intervalo x_2 de la figura) converge hacia p_{μ} . Hemos así determinado que la conducta a largo plazo de todas las órbitas de F_{μ} para todos los valores de μ en el rango de $1 < \mu < 3$, y no hemos encontrado nada inusual en la dinámica que surge en este rango de parámetros.

Sin embargo, cuando μ se incrementa más allá de 3, F_{μ} sufre varios cambios cualitativos. Entre éstos, un cambio ocurre cuando μ pasa a 4: el valor máximo de

F_μ (llamado $F_\mu(1/2)$, el cual es igual a $\mu / 4$) se incrementa más allá de 1, y algunos puntos en $[0,1]$ son entonces mapeados fuera del rango $[0,1]$ por F_μ .

Para cualquier punto x , tenemos $F_\mu(x) > 1$, y ello se sigue de lo que ya se indicó, en el sentido de que la órbita $F_\mu(x)$,

$$F_\mu(x), F_\mu(F_\mu(x)), F_\mu^2(F_\mu(x)), \dots, F_\mu^n(F_\mu(x)), \dots,$$

Esto es:

$$F_\mu(x), F_\mu^2(x), F_\mu^3(x), \dots, F_\mu^{n+1}(x), \dots,$$

debe divergir hacia $-\infty$. Más generalmente, cualquier órbita generada en $[0,1]$ pero que no permanezca en $[0,1]$, debe divergir hacia $-\infty$.

La matemática del Caos, más que un instrumento de predicción, es una útil herramienta que nos muestra los umbrales en los cuales podemos esperar valores continuos. Es una especie de sismógrafo que nos informa que casi siempre hay pequeños movimientos "sísmicos" en la economía, pero si estos alcanzan determinadas magnitudes, los resultados suelen ser impredecibles.

Como observación final del trabajo en este apartado, cabe señalar que existen dos grandes vertientes de interpretación respecto a los resultados de la matemática del caos. Por un lado, hay quienes piensan que por el hecho de que podemos modelar en un equipo de cómputo fenómenos que proviniendo de procesos aleatorios reflejan ciertos comportamientos constantes, podemos inferir de ahí que el Caos muestra a fin de cuentas un "orden" que aunque distinto del orden al que estamos acostumbrados, puede establecer un patrón de conducta predecible en un cierto tiempo. Otros, como en mi caso, pensamos que justo desde la terminología misma, el Caos no se deja aprehender. Que el hombre lo introduce por su misma naturaleza no determinista. Pero, no por ello la Economía pierde científicidad sino que nos habla de una ciencia social con sus parámetros propios.

¹ Weiss, D. Michael. Op.Cit. Pag.10.

RECOMENDACIONES

Uno de los aspectos centrales del trabajo, es que en la práctica cotidiana nos la tenemos que ver con modelos económicos.

Lo primero que se tiene que plantear quien se enfrenta a alguno de ellos o debe plantear nuevos, es si éstos son lineales y pueden resolverse con sencillos programas computacionales que el mercado ofrece. Aquí se ha sugerido que si el problema admite solución de puntos relativos, que son al mismo tiempo absolutos, entonces una solución de programación lineal puede aplicarse.

Si el problema admite solución en la región de los puntos relativos, pero no en los puntos absolutos, entonces estamos ante un problema de programación no lineal y aquí podemos optar por conformarnos con una solución cercana como la que ofrecen los textos de Programación Dinámica, soluciones del tipo estadístico como los que aquí se analizaron, o la última opción que es considerar los comportamientos individuales para determinar el grado de irregularidad en el comportamiento de una variable económica.

En síntesis, la recomendación fundamental de este trabajo consiste en definir candidatos que por su nivel de variabilidad no sean sujetos de un fácil manejo. Candidatos en que habiéndose probado sin éxito métodos de predicción, puedan ser tratados con una herramienta no tradicional.

Si logramos esta identificación, el paso siguiente es que antes de probar cualquier otra herramienta de las conocidas, probemos determinar si sus niveles de variación caen dentro de la caoticidad en el sentido que lo hemos manejado aquí. La ganancia es que ahorraremos tiempo y recursos al evitar enfrascarnos con un modelo que no nos conducirá a resultados correctos puesto que su naturaleza no lo permite.

Si, como lo mostramos en nuestro ejemplo, los niveles de variación aunque sean constantes no nos dan por resultado un sistema inestable, entonces cualquier otra solución puede ser posible puesto que los valores resultantes nos arrojarán hacia los puntos de "estabilidad" en el sentido que aquí se ha manejado.

De concederse que las pequeñas variaciones de una economía representan en cierto sentido una duplicidad de modelos que han probado su eficacia, entonces estaremos explicando el porqué los hacedores de la política económica, están preocupados, en cualquier país, porque las variables macroeconómicas se mantengan en niveles de variación mínimas. Al mismo tiempo, estaremos explicando porqué movimientos como una devaluación brusca como la de noviembre de 1994, movimientos armados como el chiapaneco, etc., son factores de movimiento brusco, y, por ende, productores de caoticidad.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abbot, Edwin. 1884. Flatland: A Romance of Many Dimensions.
2. Abraham, Ralph. 1982-1988. Dynamics (vol. 1-4), Santa Cruz: Aerial Press.
3. Barnsley, Michael F. 1988. Fractals Everywhere. San Diego: Academic Press.
4. Branner, Bodil, and Hubbard, John. 1988. The iteration of cubic polynomials. Part 1: The global topology of parameterspace. Acta Mathematica 160, pp. 143-206.
5. Burns, Arthur y W. C. Mitchell. Measuring Business Cycles.
6. Carpenter, Loren. 1984. Cited in Mandelbrot, Benoit, et al. Additional Perspectives on Fractals. The College Mathematics Journal, March, pp. 115-119.
7. Crutchfield, James; Farmer, Doyne; Packard, Norman and Shaw, Robert. 1986. Chaos. Scientific American, December, pp. 46-57.
8. Dagum, Camilo. 1978. Metodología y crítica económica. (Selección de Camilo Dagum). México; F.C.E.
9. Devaney, Robert. 1989. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Menlo Park: Addison-Wesley.
10. Dewdney, A. K. 1987. Computer Recreations: Probing the Strange Attractors of Chaos. Scientific American, July, pp. 108-111.
11. Dewdney, A. K. 1988. The Armchair Universe. New York: W. H. Freeman & Company.
12. Dewdney, A. K. 1988. Computer Recreations: The Hodgepodge machine. Scientific American, August, pp. 104-107.
13. Dewdney, A. K. 1988. Beauty and Profundity: The Mandelbrot Set and Flock of Its Cousins Called Julia. Scientific American, November, p. 140.
14. Dewdney, A. K. 1989. Computer Recreations: A cellular universe of debris, droplets, defects and demons. Scientific American, August, pp. 102-105.

15. Dewdney, A. K. 1990. The Magic Machine: Handbook of Computer Sourcery. New York: Freeman & Company.
16. Dewdney, A. K. 1990. Mathematical Recreations: How to transform flights of fancy into fractal flora and fauna. Scientific American, May. pp. 126-129.
17. Douady, Adrian, and Hubbard, John. 1985. On the Dynamics of Polynomial-like Mappings. Annales Scientifique de l'Ecole Normale Supérieure. pp.18-287.
18. Feigenbaum, Mitchell J. 1978. Quantitative Universality of a Class of Nonlinear Transformation. Journal of Statistical Physics pp.19-25.
19. Feigenbaum, Mitchell J. 1980. Universal Behavior in Nonlinear Systems. Los Alamos Science, Summer, p. 4.
20. Gerhardt, Martin; Schuster, Heike; and Tyson, John. 1990. A Cellular Automaton Model of Excitable Media Including Curvature and Dispersion. Science 247, March 30, pp. 1563-1566.
21. Gleick, James. 1987. Chaos: Making a New Science. New York: Viking.
22. Godelier, Maurice. 1970. Racionalidad e Irracionalidad en Economía. Siglo XX1. Mexico.
23. Grebogi, Celso; Ott, Edward; and Yorke, James. 1985. Attractors on an N-Torus: Quasiperiodicity Versus Chaos. Physica 15D, pp. 354-373.
24. Grebogi, Celso; Ott, Edward; and Yorke, James. 1987. Chaos, Strange Attractors, and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics. Science, Vol. 238, October 30, pp. 632-638.
25. Griffeath, David. 1988. Cyclic Random Competition. Notices of the American Mathematical Society 35, pp. 1472-1480.
26. Hénon, Michel, and Heiles, C. 1964. The Applicability of the third integral of the Motion: Some Numerical Experiments. Astronomica Journal pp. 69-73.
27. Hénon, Michel. 1976. A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor. Communications in Mathematical Physics, pp. 50-69.
28. Hicks R. John. 1963. A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. F.C.E.
29. Hofstadter, Douglas. 1985. Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern. New York: Basic Books.

30. Jurgens, Hartmut; Pietgen, Heinz-Otto; and Saupe, Dietmar. 1990. The Language of Fractals. Scientific American, August, pp. 60-67.
31. Li, T.-Y., and Yorke, James. Period Three Implies Chaos. American Mathematical Monthly 82:985.
- 32.- Lorenz, Edward N. 1963. Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of the Atmospheric Sciences 20:130.
33. Lucas, Robert. Understanding Bussiness Cycles.
34. Mandelbrot, Benoit. 1982. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman.
35. Margolus, Norman, and Toffoli, Tommaso. 1987. Cellular Automaton Machines. Cambridge: MIT Press.
36. May, Robert. 1976. Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics. Nature 261:459.
37. Metzler, Lloyd. The Nature and Stability of Inventory Cycles.
38. Miskin, F. 1982. Does Anticipated Monetary Policy Matter?. Journal of Political Economy. Feb.
39. Moon, Francis. 1987. Chaotic Vibrations. New York: John Wiley & Sons.
40. Peitgen, Heinz-Otto, and Richter, Peter. 1986. The Beauty of Fractals: Images of Complex Dynamical Systems. New York: Springer Verlag.
41. Peitgen, Heinz-Otto, and Saupe, Dietmar. 1988. The Science of Fractal Images. New York: Springer-Verlag.
42. Pickover, Clifford. 1980. Computers, Patterns, Chaos and Beauty: Graphics from an Unseen World. New York: St. Martin's Press.
43. Prescott, Edward. Theory Ahead of Bussiness Cycle Measurement.
44. Press, William; Flannery, Brian; Teukilsky, Saul; and Vetterling, William. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Cambridge: Cambridge University Press.
45. Rucker, Rudy. 1984. The Fourth Dimension: Toward a Geometry of Higher Reality. Boston: Houghton Mifflin.

46. Rucker, Rudy. 1987. Mind Tools: The Five Levels of Mathematical Reality. Boston: Houghton Mifflin.
47. Rucker, Rudy. 1987. Patterns of Disorder (Book review of James Gleick's Chaos: Making a New Science). Washington Post Book world. November 1, p. 3 and p. 8.
48. Rucker, Rudy, and Walker, John. 1989. CA Lab: Rudy Rucker's Cellular Automaton Laboratory. Sausalito, CA: Autodesk, Inc.
49. Ruelle, David, and Takens, Floris. 1971. On the Nature of Turbulence. Communications in Mathematical Physics 20:167.
50. Samuelson, Paul. Interaction Between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration.
51. Slutsky, Eugen. The Summation of Random Causes as the Sources of Ciclyc Processes.
52. Thompson, J. M. T., and Stewart, H. B. 1986. Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: John Wiley and Sons.
53. Voss, Richard F. 1985. Random Fractal Forgeries, in Earnshaw et.al. Fundamental Algorithms of Computer Graphics. Berlin:Springer-Verlag.
54. Winfree, Arthur. 1974 Rotating Chemical Reactions. Scientific American, June, pp. 82-95.
55. Wolfram, Stephen. 1986. Theory and Applications of Cellular Automata. Singapore: World Scientific.
56. Yotopoulos, Pan A. 1981. Investigaciones sobre el Desarrollo Económico.. México. F.C. E.

