UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

POSGRADO EN INGENIERÍA AGRÍCOLA Y USO INTEGRAL DEL AGUA

EVALUACIÓN DE LA SUBSIDENCIA A PARTIR DE UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN PARA LA GESTIÓN DEL AGUA SUBTERRÁNEA

TESIS

Que como requisito parcial
para obtener el grado de:

DOCTOR EN INGENIERÍA AGRÍCOLA Y USO INTEGRAL DEL AGUA

Presenta:

JUAN JOSÉ DÍAZ NIGENDA

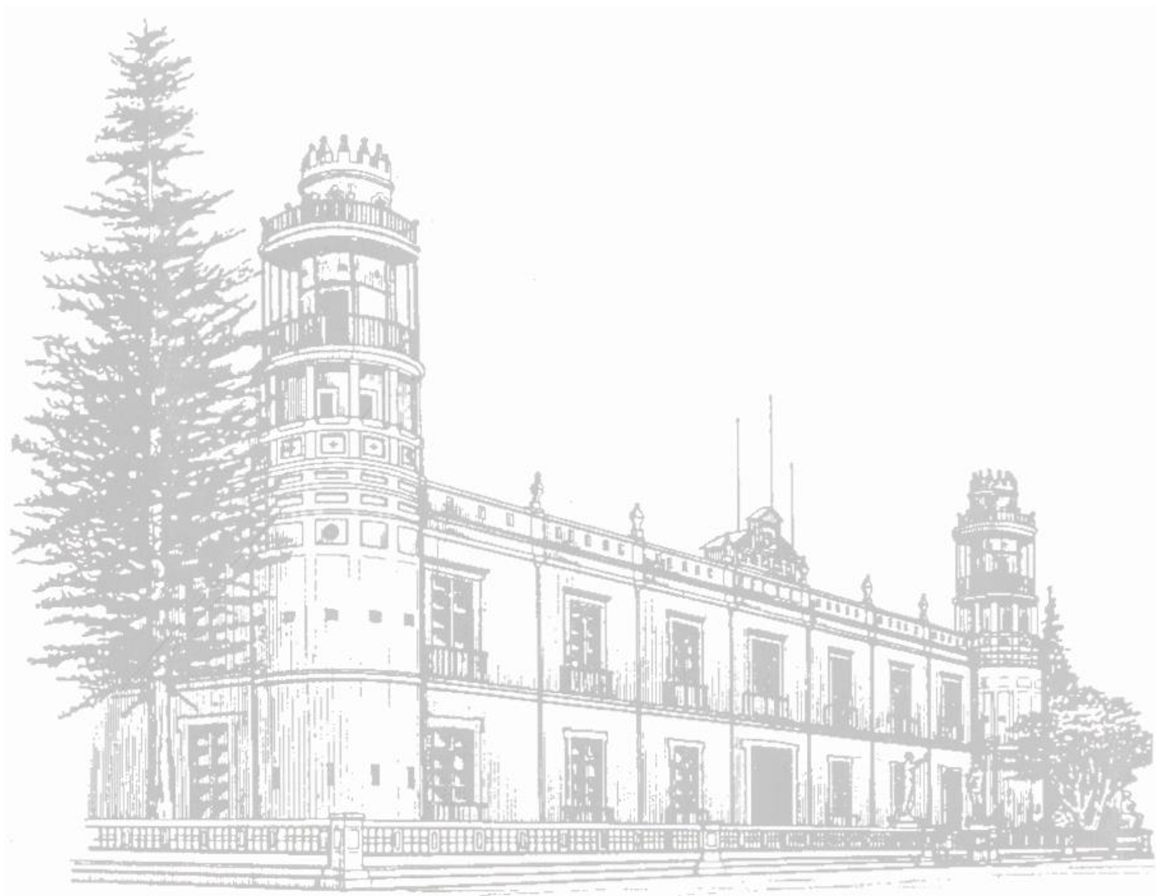
Bajo la supervisión de:
Ph. D. MAURICIO CARRILLO GARCÍA

Codirector
Ph. D. ERIC MORALES CASIQUE
(Posgrado en Ciencias de la Tierra – UNAM)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO
1854
COORDINACIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSGRADO
APROBADA

IAUIA

Chapingo, Estado de México, noviembre de 2022



EVALUACIÓN DE LA SUBSIDENCIA A PARTIR DE UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN PARA LA GESTIÓN DEL AGUA SUBTERRÁNEA

Tesis realizada por **Juan José Díaz Nigenda** bajo la supervisión del Comité Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

DOCTOR EN INGENIERÍA AGRÍCOLA Y USO INTEGRAL DEL AGUA

Director: Ph. D. MAURICIO CARRILLO GARCÍA

Codirector: Ph. D. ERIC MORALES CASIQUE

Asesor: DR. MARIO ALBERTO VÁZQUEZ PEÑA

Lector externo: DR. ÓSCAR A. ESCOLERO FUENTES

Contenido

Lista de cuadros

Lista de figuras

Lista de apéndices

Dedicatorias

A mi esposa, Norma Elizabeth, por aguantarme aún más, en estos últimos 4 años; un logro más juntos.

A mis hijos, Suhaila Elizabeth, Juan José y Ana Merari, que siguen siendo mi razón de ser.

A mis padres y hermanos, por ser la base de lo que soy.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por haberme permitido llegar hasta esta etapa de la vida para alcanzar un objetivo personal y profesional más.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo recibido durante la realización de los estudios de posgrado.

Al Posgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua de la Universidad Autónoma Chapingo por la oportunidad y la confianza para culminar el posgrado; a su cuerpo académico y personal administrativo.

Al Posgrado de Ciencias de la Tierra de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por haberme permitido tomar algunas clases.

Al Departamento de Irrigación y el Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola, por el apoyo recibido.

Al Dr. Mauricio Carrillo García, por sus comentarios y aportaciones en la realización del trabajo de investigación, pero sobre todo por su amistad.

Al Dr. Eric Morales Casique, por sus acertados comentarios y sugerencias para enriquecer la investigación, pero sobre todo por su paciencia en el desarrollo de esta investigación y su amistad.

Al Dr. Mario A. Vázquez Peña, por sus comentarios realizados durante la realización de la investigación.

Al Dr. Óscar A. Escolero Fuentes, por participar como lector externo y por realizar los comentarios a esta investigación.

A todas las personas y compañeros que me apoyaron para alcanzar esta meta en mi desarrollo profesional.

…. Gracias totales…!

Datos biográficos

Datos personales

Nombre	:	Juan José Díaz Nigenda
Fecha de nacimiento		7 de febrero de 1970
Lugar de nacimiento	:	Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
CURP	:	DINJ700207HCSZGN07
Número de cartilla militar	:	B–7146278
Licenciatura	:	Ingeniero Agrónomo Especialista en Irrigación
Cédula licenciatura	:	2 001 821
Maestría	:	Maestría en Ingeniería Hidráulica
Cédula maestría	:	3 547 936

El autor de la presente investigación, originario de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, egresó de la Universidad Autónoma Chapingo en 1992 como Ingeniero Agrónomo Especialista en Irrigación. En el año 2001, obtuvo el grado de Maestro en Ingeniería Hidráulica por la Universidad Nacional Autónoma de México.

Ha participado en varias publicaciones en temas como agroclimatología, aguas subterráneas y planeación de recursos hídricos. En la Comisión Nacional del Agua ha colaborado en la integración de documentos oficiales como el Programa Nacional Hídrico, programas hídricos regionales, programas hídricos estatales, la gestión del agua en México: avances y retos, entre otros; asimismo, ha participado en varias ponencias a nivel nacional e internacional.

Resumen General

Evaluación de la subsidencia a partir de un modelo de optimización para la gestión del agua subterránea [1]

La sobreexplotación del agua subterránea ocasiona un agotamiento gradual del almacenamiento en los acuíferos, por lo que los modelos de gestión del agua subterránea son una buena herramienta para conocer la respuesta del sistema a las alternativas planteadas y apoyar la toma de decisiones.

En esta investigación se evalúa la subsidencia a partir de una propuesta metodológica que integra un módulo de cálculo de los coeficientes de respuesta; un módulo de optimización y cálculo de los abatimientos del acuífero; y un módulo para evaluar el efecto transitorio en el acuitardo y el cálculo del hundimiento.

Inicialmente, se maximizó el caudal de extracción de los pozos de bombeo y se determinaron abatimientos menores o iguales a 15 metros en los distintos puntos de control. Este abatimiento se consideró como perturbación inicial en la interfase acuífero-acuitardo para realizar un análisis transitorio y determinar el efecto en el almacenamiento del acuitardo. Esta propuesta analiza un tiempo adimensional y aplica una solución analítica para determinar el abatimiento a diferentes profundidades del acuitardo. Se determinó que el hundimiento es del orden de 7 centímetros en los 3 años de análisis.

Finalmente, se analizaron escenarios para evaluar la subsidencia en un sistema multi-acuífero que permitan plantear esquemas de manejo con el apoyo de un modelo de optimización para la gestión del agua subterránea; los escenarios consideraron esquemas de bombeo integrados con información de los volúmenes de extracción del acuífero Chalco-Amecameca. Para el escenario óptimo, se determinó un esquema de bombeo que restringe el abatimiento a 10 metros y maximiza el bombeo a 2.6 millones de metros cúbicos por año en promedio, ocasionando hundimientos en el acuitardo del orden 16.6 centímetros en el horizonte de planeación.

Palabras clave: modelo de gestión de agua subterránea; método de la matriz de coeficientes de respuesta; optimización; efecto transitorio; subsidencia.

---

[1] Tesis de Doctorado en Ingeniería. Posgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua. Universidad Autónoma Chapingo

Autor: Juan José Díaz Nigenda.
Director: Ph. D. Mauricio Carrillo García

General Abstract

Subsidence assessment of from an optimization model for groundwater management [2]

The overexploitation of groundwater causes a gradual depletion of storage in aquifers, so groundwater management models are a good tool to know the response of the system to the proposed alternatives and support decision making.

In this research, subsidence is evaluated based on a methodological proposal that integrates a module for calculating the response coefficients; a module for optimization and calculation of aquifer drawdowns; and a module to evaluate the transitory effect on the aquitard and the calculation of the sinking.

Initially, the extraction flow of the pumping wells was maximized and drawdowns of less than or equal to 15 meters were determined at the different control points. This depletion was considered as an initial disturbance in the aquifer-aquitard interface to perform a transient analysis and determine the effect on aquitard storage. This proposal analyzes a dimensionless time and applies an analytical solution to determine the drawdown at different depths of the aquitard. It was determined that the subsidence is of the order of 7 centimeters in the 3 years of analysis.

Finally, scenarios were analyzed to evaluate subsidence in a multi-aquifer system which allows proposing management schemes with the support of an optimization model for groundwater management; the scenarios considered integrated pumping schemes with information on the extraction volumes of the Chalco-Amecameca aquifer. For the optimal scenario, a pumping scheme was determined which restricts drawdown to 10 meters and maximizes pumping to 2.6 million cubic meters per year on average, causing subsidence in the aquitard of the order of 16.6 centimeters in the planning horizon.

Key words: groundwater management model; response coefficient matrix method; optimization; transient effect, subsidence.

---

[2] Doctoral Thesis in Engineering. Postgraduate in Agricultural Engineering and Integrated Use of Water. Universidad Autónoma Chapingo
Author: Juan José Díaz Nigenda.
Advisor: Ph. D. Mauricio Carrillo García

1. INTRODUCCIÓN GENERAL

En diversos países como la India, China y los Estados Unidos, así como de México, el agua subterránea es de vital importancia para la agricultura de riego y para el abastecimiento a la población. La extracción excesiva donde el agua subterránea se renueva lentamente es la causa principal de su agotamiento, y el cambio climático tiene el potencial de incrementar el problema en algunas regiones. La producción de alimentos en esas regiones solo puede hacerse sostenible a largo plazo si los niveles de agua subterránea se estabilizan. Para este fin, se requiere una transformación en la forma en que se valoran, administran y caracterizan los sistemas de agua subterránea. Los enfoques técnicos, como el intercambio de agua, la recarga artificial y el riego eficiente, no han logrado equilibrar el balance regional de agua subterránea, por lo que se deben implementarse estrategias más integrales que se adapten a los entornos sociales, económicos, políticos y ambientales específicos de cada región (Aeschbach-Hertig, et al., 2012).

La gestión de un sistema hidrogeológico ya sea que incluya un acuífero o un sistema de acuíferos, es de relevancia para tomar decisiones sobre la cantidad de agua que se debe extraer, la ubicación de los pozos para el bombeo y la recarga artificial. Para esto, se necesitan instrumentos que proporcionen información sobre la respuesta del sistema a las alternativas planteadas y traten de pronosticarla ante operaciones planificadas, como el bombeo y la recarga. Esta respuesta puede tomar la forma de cambios en los niveles de agua, en la calidad del agua o en la subsidencia del terreno (Bear & Verruijt, 1998).

Antes de plantear la justificación técnica de la presente investigación, se analizará el estado actual del agua subterránea en México.

1.1. SITUACIÓN ACTUAL DEL AGUA SUBTERRÁNEA Y DÉFICIT HÍDRICO

El agua subterránea es un recurso finito y, en muchas partes del mundo, se está convirtiendo en un recurso escaso (Bagheri, et al., 2019). En muchas regiones, el abastecimiento de agua para usos industriales, domésticos y agrícolas dependen principalmente de las aguas subterráneas (Sun N. Z., 1996). En un futuro, el agua subterránea será la principal fuente de suministro de agua y tendrá gran relevancia en aquellas regiones donde no se tienen aprovechamientos superficiales importantes o de otro tipo para cualquier tipo de desarrollo (Zhao, 2017).

En México, el agua subterránea desempeña un papel vital y de creciente importancia en el crecimiento socioeconómico del país. El volumen total concesionado para usos consuntivos en México es de 88,390 hm^3; el 40% de este volumen, 35,600 hm^3, se extrae de 653 acuíferos, por lo que la importancia del agua subterránea se manifiesta en la magnitud del volumen utilizado por los principales usuarios, como el agrícola, que concentra el 70% del volumen subterráneo. La recarga se estima en 92.40 miles de hectómetros cúbicos (Conagua, 2022).

En el período 2005-2015, el uso de agua agrícola en México tuvo un crecimiento del orden de 7.4%, al pasar el volumen de 54,411 a 58,450 hm^3. En este mismo periodo, las extracciones subterráneas crecieron en un 16.0% y se han concentrado en zonas con problemas de sobreexplotación (Díaz-Nigenda, et al., 2017).

Los escenarios futuros de la gestión del agua, que consideran tanto el crecimiento de la población como el cambio climático, muestran que el agua subterránea se utiliza para cubrir la brecha entre la demanda y el abastecimiento anual renovable del agua superficial; en este sentido, el diseño de un plan de gestión sostenible de las aguas superficiales y subterráneas de manera conjunta en las cuencas, es esencial para satisfacer de manera confiable la demanda de agua en estas condiciones dinámicas (Castle, et al., 2014).

La sobreexplotación de los sistemas hidrogeológicos y los desequilibrios que se ocasionan, son un problema ambiental, social y económico en muchas cuencas del mundo, incluidas las de nuestro país; se produce cuando la extracción que se destina para abastecer a la población y el desarrollo industrial y agrícola excede la recarga natural e inducida durante un largo período de tiempo. Si este problema no se considera seriamente en la gestión del agua subterránea puede provocar efectos adversos como condiciones de bombeo no económicas, escasez en el suministro de agua, degradación de la calidad del agua a través de la intrusión salina o agua subterránea de mala calidad, disminución y extinción de flujo base, afectación a humedales, hundimiento de la tierra y agotamiento gradual del almacenamiento de agua subterránea (Bagheri, et al., 2019; Allain, et al., 2018; Rupérez-Moreno, et al., 2017; Davidsen, et al., 2016; Sun N. Z., 1996).

Actualmente, los usos agrícola, ambiental y urbano, y otros más, compiten por el agua subterránea, lo que genera una extracción considerable en años secos y un abatimiento en los niveles freáticos, lo que a su vez aumenta los costos de bombeo y reduce la capacidad de bombeo del agua subterránea (Medellín-Azuara, et al., 2015; Ward, et al., 2012).

Para fines de evaluación, manejo y administración de las aguas nacionales del subsuelo, en el artículo 3 fracción II de la Ley de Aguas Nacionales[3], se define que un acuífero es cualquier formación geológica o conjunto de formaciones geológicas hidráulicamente conectados entre sí, por las que circulan o se almacenan aguas del subsuelo que pueden ser extraídas para su explotación, uso o aprovechamiento y cuyos límites laterales y verticales se definen convencionalmente; de acuerdo a esta definición, en México se tienen 653 zonas administrativas para la gestión del agua subterránea, de las cuales se reportan 157 sobreexplotadas, en función de la relación extracción/recarga (Conagua, 2022).

[3] Ultima reforma publicada en el Diario Oficial de la Federación el 11 de mayo de 2022 y consultada en https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/index.htm

Díaz-Nigenda, et al., (2017) documentó que, en el año 2015, los niveles de sobreexplotación del agua subterránea eran cercanos a 6,500 hm³ de agua; las zonas administrativas localizadas en el estado de Guanajuato concentraban el 16.0% de ese volumen. En esta entidad federativa, así como en Ciudad de México, Durango, México, Chihuahua, Sonora, San Luis Potosí, Zacatecas, Coahuila, Aguascalientes, y otros más tendrían que vigilarse las extracciones futuras, los niveles de sobreexplotación y el crecimiento de las actividades productivas.

Actualmente, se señala que existen 274 zonas administrativas con déficit hídrico, el cual asciende a 9,600 hm³ (Conagua, 2020); se estima que 24 de estas zonas concentran el 51% de este volumen (Cuadro 1); mientras que 42 de las 61 zonas administrativas del estado de Chihuahua concentran el 38% del déficit hídrico (Cuadro 2). En la Figura 1, se muestra la delimitación de las zonas administrativas en nuestro país, así como la distribución de aquellas que presentan algún nivel de déficit hídrico.

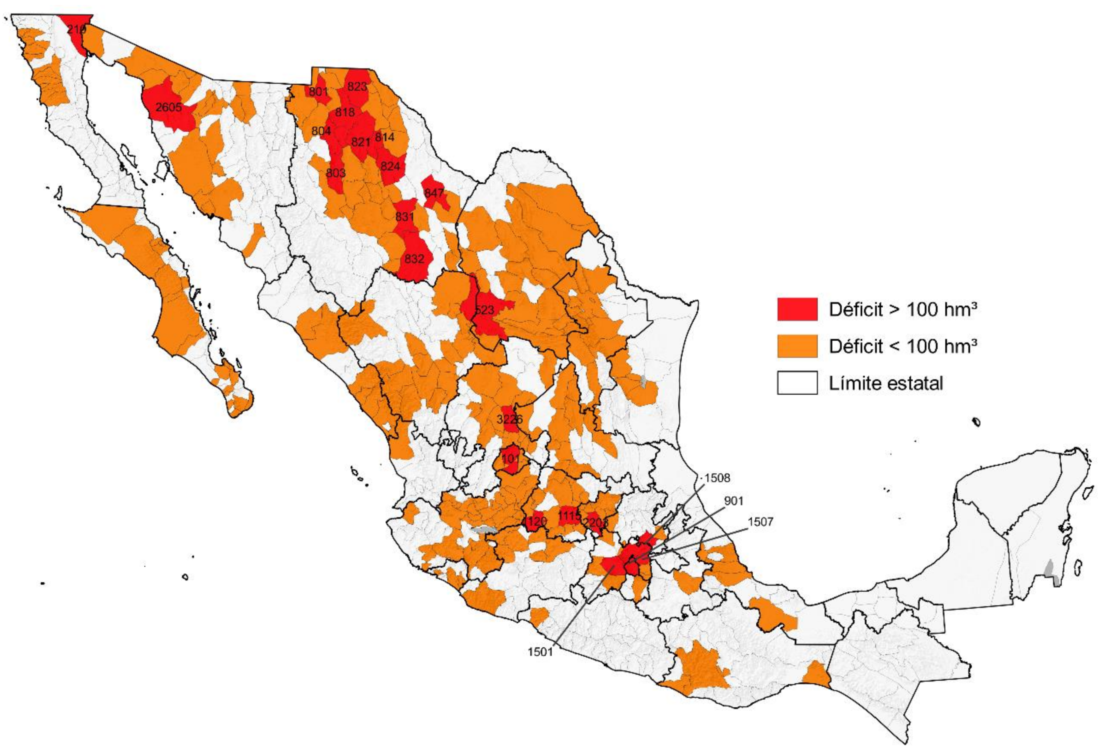


Figura 1. Delimitación de las zonas administrativas para la gestión del agua subterránea y su condición de déficit hídrico (Conagua, 2020)

Cuadro 1. Principales zonas administrativas para la gestión del agua subterránea con déficit hídrico, cifras en hm^3. (Conagua, 2020)

Id	Nombre de la zona administrativa	Entidad federativa	R	Ext	DNC	Déficit hídrico
847	Los Juncos	Chihuahua	133.6	831.3	0.1	697.8
901	Zona Metropolitana de la Cd. de México	Ciudad de México	512.8	1020.0	0.0	507.2
818	Laguna de Santa María	Chihuahua	45.2	461.8	3.2	419.8
814	Laguna de Tarabillas	Chihuahua	36.4	323.5	0.0	287.1
824	Laguna de Hormigas	Chihuahua	25.5	294.5	0.0	269.0
210	Valle de Mexicali	Baja california	520.5	776.0	2.5	258.0
819	Laguna la Vieja	Chihuahua	77.1	294.1	0.0	217.0
832	Jiménez-Camargo	Chihuahua	173.3	359.9	5.5	192.1
1508	Cuautitlán-Pachuca	Estado de México	356.7	545.4	0.0	188.7
831	Meoqui-Delicias	Chihuahua	211.2	376.2	0.0	165.0
804	Buenaventura	Chihuahua	66.5	216.8	0.0	150.3
523	Principal-Región Lagunera	Coahuila	534.1	683.1	0.0	149.0
803	Baja Babícora	Chihuahua	90.6	229.1	0.0	138.5
2203	Valle de San Juan del Río	Querétaro	191.5	327.8	0.0	136.3
1120	Pénjamo-Abasolo	Guanajuato	225.0	353.2	0.0	128.2
2605	Caborca	Sonora	212.9	333.6	0.0	120.7
821	Flores Magón-Villa Ahumada	Chihuahua	137.5	256.1	0.0	118.6
1115	Valle de Celaya	Guanajuato	317.1	429.1	3.3	115.3
1507	Texcoco	Estado de México	145.1	245.7	10.4	111.0
1501	Valle de Toluca	Estado de México	336.8	393.5	53.6	110.3
801	Ascensión	Chihuahua	132.2	241.3	0.0	109.1
823	Conejos-Médanos	Chihuahua	18.8	120.9	0.0	102.1
101	Valle de Aguascalientes	Aguascalientes	249.6	347.6	2.4	100.4
3226	Chupaderos	Zacatecas	86.6	186.7	0.0	100.1

Nota: Se listan únicamente aquellas unidades que presentan un déficit hídrico > 100 hm^3

R = Recarga; Ext = Extracción; DNC = Descarga natural comprometida.

Cuadro 2. Niveles de déficit hídrico por entidad federativa, cifras en hm^3 (Conagua, 2020)

Entidad federativa	R	Ext	DNC	Déficit hídrico
Chihuahua	3,899.7	6,556.9	655.1	3,656.9
Coahuila	1,960.6	2,000.8	538.0	643.2
Guanajuato	2,236.6	2,613.5	90.2	618.1
Sonora	3,279.5	3,208.5	348.8	527.2
Ciudad de México	512.8	1,020.0	0.0	507.2
Estado de México	1,643.2	1,419.6	657.2	442.4
Baja California	951.3	1,288.6	35.9	426.6
Jalisco	3,411.9	2,632.0	1,059.3	397.9
Nuevo León	1,179.6	1,249.9	223.8	393.1
Zacatecas	1,092.5	1,276.4	103.8	380.5
Durango	961.1	865.5	145.4	305.8
San Luis Potosí	2,033.2	964.2	1,154.7	288.7
Querétaro	568.6	702.2	35.3	246.2
Sinaloa	2,507.3	1,438.9	1,053.3	151.6
Aguascalientes	326.5	454.8	8.3	136.6
Michoacán	2,905.4	1,308.0	1,374.7	122.9
Baja California Sur	459.6	410.9	109.9	81.4
Veracruz	4,079.9	1,467.2	2,084.5	75.2
Puebla	1,298.6	986.4	248.3	63.2
Oaxaca	1,347.2	586.1	534.9	61.2
Hidalgo	2,122.4	464.2	1,481.4	40.0
Tamaulipas	998.9	548.3	245.2	33.4
Nayarit	1,204.9	329.7	801.2	5.9
Colima	520.1	406.5	100.7	5.0
Morelos	825.5	385.7	407.6	0.5
Guerrero	1,672.3	391.4	561.6	0.0

Nota: Se listan las entidades federativas donde las zonas administrativas presentan algún nivel de déficit hídrico; R = Recarga; Ext = Extracción; DNC = Descarga natural comprometida.

El desequilibrio entre los recursos hídricos naturales y la demanda de agua ha sido causado por la expansión de las áreas de riego (nuevas tierras irrigadas con pozos de bombeo ilegales), el crecimiento de los centros urbanos de población, el costo subsidiado de la energía y la mala gestión de los derechos de uso del agua. Además, el cambio climático y las frecuentes sequías pueden agravar la situación (Rupérez-Moreno, et al., 2017; Ward, et al., 2012).

Bajo este escenario, la sobreexplotación del agua subterránea ha provocado serios problemas en algunas regiones de México, como el avance de la intrusión salina, sobre todo en las porciones cercanas a las costas (Costa de Hermosillo); asimismo, se han generado zonas administrativas con grandes asentamientos diferenciales que afectan a la infraestructura en zonas urbanas (Zona Metropolitana de la Ciudad de México, Texcoco, Chalco-Amecameca, Valle de Querétaro, entre otros); adicionalmente, se han inducido conflictos entre los diferentes sectores usuarios del agua (zona administrativa Principal-Región Lagunera), situación que ha requerido, en algunos casos, la cancelación de la actividad agropecuaria por resultar no rentable en tales condiciones. En la Figura 2, se muestran algunas causas y efectos de la sobreexplotación del agua subterránea.

Adicionalmente, el abatimiento gradual de los niveles del agua ha incrementado también, los costos de la extracción a través de mayores consumos de energía eléctrica, de las maniobras para aumentar inicialmente tramos de columna hasta eventualmente llegar al cambio de equipo por otro de mayor potencia e inclusive la sustitución de la captación por otra de mayor profundidad.

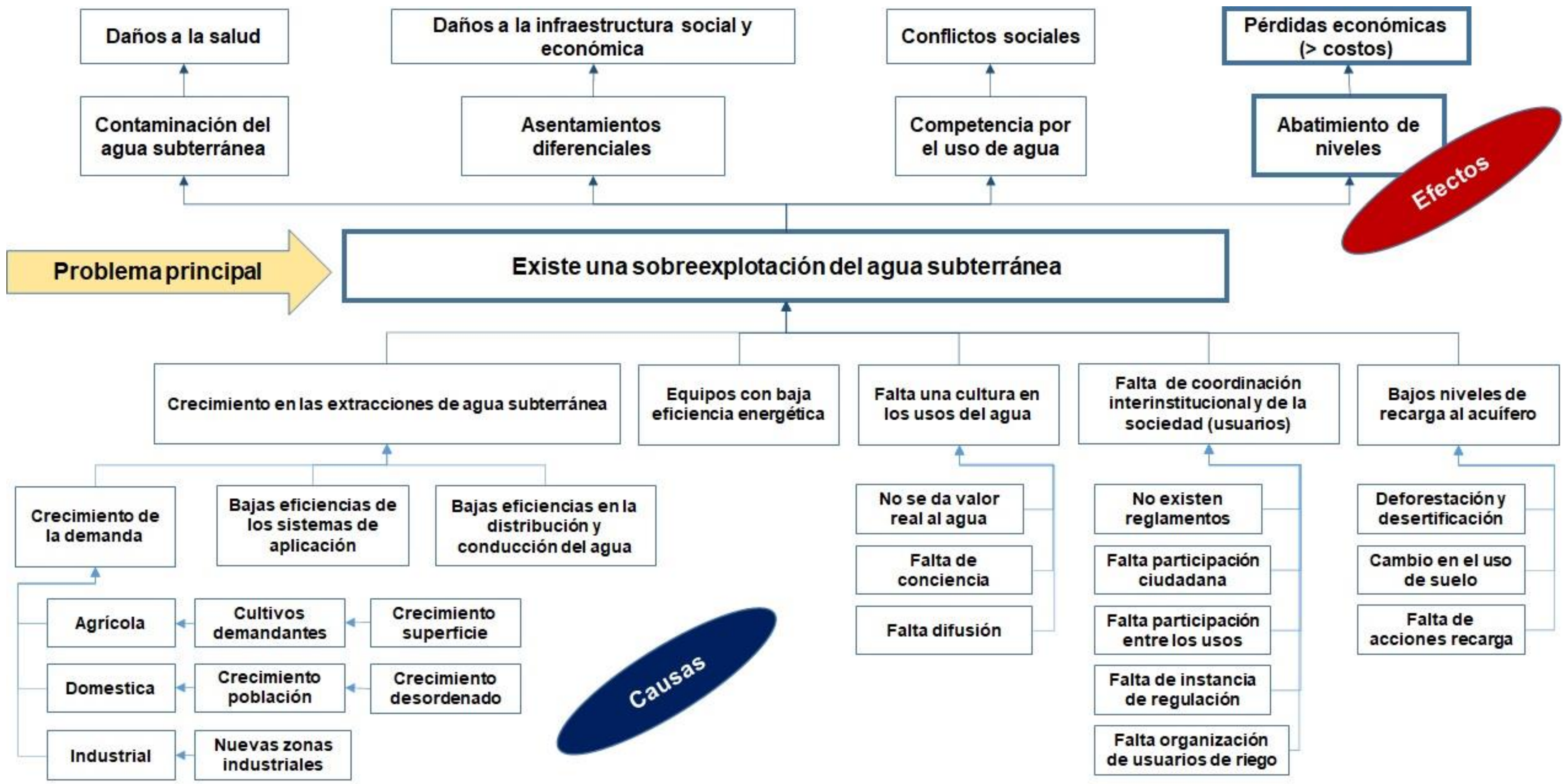


Figura 2. Árbol de causas-efectos de la sobreexplotación del agua subterránea (elaboración propia)

Los efectos comentados anteriormente no son perceptibles por lo regular de un día para otro, por lo que la definición de tiempos de respuesta en los sistemas hidrogeológicos ante perturbaciones es estratégica para evaluar las intervenciones a implementar o identificar sus efectos. De acuerdo con Bredehoeft y Pinder (1970), se plantea el concepto de tiempo adimensional, t^*, a partir de las características del acuitardo,

$$t^* = \frac{K't}{S_s'b'^2} \tag{1}$$

Donde b', K', y Ss' son el espesor, la conductividad hidráulica y el almacenamiento específico del acuitardo, respectivamente; y, t, es el tiempo de bombeo en el sistema.

Este tiempo adimensional permite identificar el efecto del almacenamiento en el acuitardo dentro de un sistema en dos etapas:

- Etapa 1, donde el almacenamiento en el acuitardo es importante y se extiende hasta que el tiempo adimensional es aproximadamente igual a 0.1:

$$t^* \leq 0.1 \tag{2}$$

- Etapa 2, cuando el flujo de agua a través del acuitardo se encuentra establecido para valores del tiempo adimensional mayores a 0.5, y el sistema responde como si no hubiera almacenamiento en el acuitardo:

$$t^* > 0.5 \tag{3}$$

Con este análisis, se evaluaría un intervalo de tiempo (horizonte de planeación) para analizar los efectos dentro del sistema.

Muchos sistemas hidrogeológicos que se presentan frecuentemente en la naturaleza consisten en varios acuíferos separados por estratos confinantes que, en un grado u otro, transmiten agua e interconectan los acuíferos; además, el contraste de conductividades hidráulicas entre ellos es de varias órdenes de magnitud (Herrera, 1970; Bredehoeft y Pinder, 1970). Hantush, mencionado por Herrera (1970), indicó que estos sistemas multi-acuífero se presentan en varias zonas de los Estados Unidos de América, así como en México.

Figueroa-Miranda et al. (2018) concentró la información de varios autores que mencionan la presencia de problemas de subsidencia relacionada con la compactación de los estratos en sistemas multi-acuífero en varias ciudades a nivel mundial: Beijing, Shanghai, Murcia, Bologna, Tokyo, Las Vegas y la Ciudad de México; e indicó que este problema generó pérdidas económicas que excedieron los 125 millones de dólares por año; en México este problema afecta millones de personas en cerca de 40 ciudades.

Figueroa et al., también mencionó que las revisiones integrales de la ocurrencia, los mecanismos, las técnicas de monitoreo y los enfoques para la evaluación y mitigación del hundimiento de la tierra debido a la extracción de agua subterránea han ganado relevancia.

Por tal motivo, se plantean las siguientes preguntas que, en el desarrollo de la investigación, serán respondidas:

1. ¿Por qué es importante estudiar un sistema multi-acuífero en un modelo de gestión de agua subterránea?

2. ¿Cómo relacionar el abatimiento de los niveles de agua en un sistema multi-acuífero con las extracciones y los niveles de subsidencias en el terreno?

3. ¿Cómo evaluar los efectos transitorios de la extracción del agua subterránea en un sistema multi-acuífero?

1.2. HIPÓTESIS

A partir de las preguntas anteriores, se puede plantear la siguiente hipótesis de investigación:

El hundimiento del terreno es un fenómeno de efecto retardado debido a que la consolidación de las formaciones geológicas dependerá de la rapidez o lentitud a la que se propague una perturbación en la presión de poro (por disminución de la carga hidráulica) desde las partes permeables hacia las menos permeables. Este retardo puede ser de años, por lo que este efecto debe ser considerado en los esquemas de gestión del agua subterránea

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. General

- Plantear una propuesta metodológica computacionalmente eficiente para simular el efecto retardado en la consolidación de un acuitardo en un sistema multi-acuífero, dentro de un modelo de gestión del agua subterránea.

1.3.2. Específicos

- Diseñar un modelo de optimización para la gestión del agua subterránea, considerando una restricción de abatimiento.

- Establecer un modelo de simulación del flujo subterráneo con el que se determinen y se evalúe la operación óptima del sistema, a través del abatimiento y la subsidencia.

- Evaluar los efectos transitorios de la explotación del agua subterránea en un sistema multi-acuífero de funcionamiento similar a los del Valle de México.

1.4. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Este trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera:

- Capítulo 1. En este capítulo, se analiza la situación actual del agua subterránea en nuestro país, mencionando los niveles de sobreexplotación del agua subterránea y las zonas administrativas con niveles de sobreexplotación mayores a 100 hectómetros cúbicos al año. El análisis permite el planteamiento de la hipótesis y los objetivos de la investigación, que forman parte de la justificación técnica del problema.

- Capítulo 2. Se presenta la revisión de literatura, principalmente en los temas abordados.

- Capítulo 3. Se hace el planteamiento y la propuesta metodológica para identificar y evaluar el efecto transitorio en el almacenamiento de un acuitardo dentro de un modelo de gestión del agua subterránea

- Capítulo 4. Se aplica la metodología propuesta en diferentes escenarios para verificar el funcionamiento en un sistema multi-acuífero.

Esta investigación aportará una metodología que permita evaluar la subsidencia a partir de un modelo de optimización para apoyar la gestión del agua subterránea en México, principalmente en aquellos sistemas hidrogeológicos donde la explotación del agua subterránea se realiza sin ninguna restricción en su uso y en zonas de escasez, donde su disponibilidad se encuentra ya condicionada por los altos niveles de sobreexplotación; además se analizará un marco conceptual para la aplicación de esta herramienta.

Para tal efecto, se considera un sistema multi-acuifero integrado por un acuífero y un acuitardo, por lo que se toma el planteamiento teórico presentado en el Caso 1 del apartado 2.3.1.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

2.1. LOS MODELOS DE GESTIÓN DEL AGUA SUBTERRÁNEA.

Gorelick (1983) presentó dos grandes categorías para clasificar los modelos de gestión del agua subterránea; en la primera, se integran los modelos en los que las decisiones de gestión consideran principalmente a la hidráulica del agua subterránea mientras que, en la segunda, se engloban modelos que inspeccionan la evaluación de políticas, así como la economía de la asignación de agua (Figura 3).

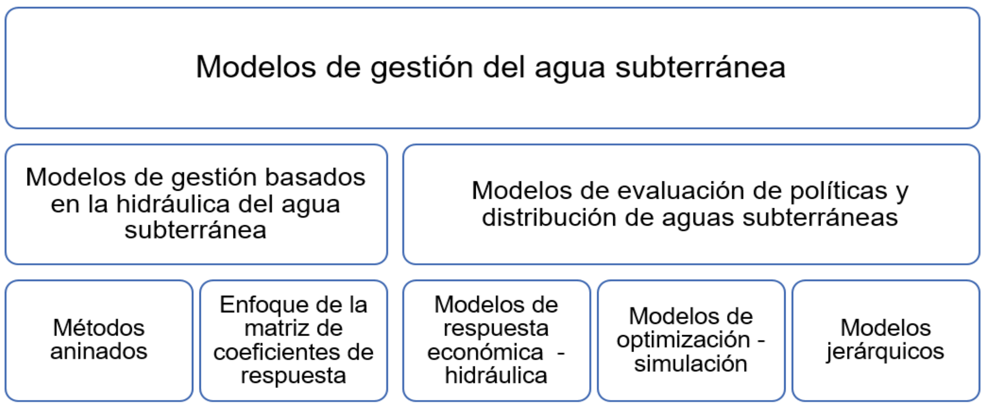


Figura 3. Clasificación de los modelos de gestión del agua subterránea (adaptado de Gorelick, 1983)

2.1.1. Modelos basados en la hidráulica del agua subterránea.

Estos modelos de gestión de aguas subterráneas combinan modelos de simulación de aguas subterráneas con métodos de optimización (Ahlfeld, 2004) a través del planteamiento de restricciones (Gorelick, 1983); utilizan las técnicas de la matriz anidada y de la matriz de coeficientes de respuesta para su implementación.

Una de las técnicas más utilizadas para el desarrollo de estos modelos es el *enfoque de la matriz de coeficientes de respuesta;* para determinarlos, se utiliza un modelo de simulación de aguas subterráneas para calcular la respuesta unitaria que describe la influencia de un estímulo de pulso (como el bombeo durante un período breve) sobre las cargas hidráulicas en puntos de interés a lo largo del sistema; admite una superposición espacial para el análisis en estado permanente, y una superposición espacial combinada con la superposición temporal para el análisis en estado transitorio (Psilovikos, 2006; Gorelick, 1983).

La mayoría de los modelos de gestión proponen restricciones de tipo volumétrico y pocos restringen el abatimiento; por lo regular el abatimiento es determinado a partir de la matriz de coeficientes de respuesta (Chang et al., 2011 y 2007, Psilovikos, 2006; Steinbrügge, 2005; Maddock, 1972).

Este método ha sido considerado en muchas investigaciones a lo largo de estos últimos 50 años; sin embargo, en muchos de los casos, los coeficientes de respuesta son determinados sugiriendo un flujo establecido en el acuífero (Maddock, 1972).

Maddock (1972), generó una función algebraica que permitió un acoplamiento explícito del modelo de simulación de aguas subterráneas con un modelo de gestión, que buscaba optimizar un objetivo económico (ecuación 4); esta función algebraica relacionaba el bombeo estacional (q) en los pozos del sistema con el abatimiento (s) en los mismos pozos a través de un coeficiente de respuesta $\beta(k, j, n - i + 1)$, que medía el incremento del abatimiento en el *k-ésimo* pozo en el *n-ésimo* periodo de tiempo debido al bombeo en el *j-ésimo* pozo durante el *i-ésimo* periodo de tiempo.

Para determinar el conjunto de coeficientes de respuesta, Maddock utilizó métodos analíticos, pero sugiere que, en la práctica, estos valores son determinados a través de modelos de simulación numérica ya que la forma irregular de las fronteras y los parámetros no homogéneos hacen imposible su determinación analíticamente. Para este caso particular, el abatimiento no se consideró como una restricción, sino como parte de la función objetivo.

$$Z = min\left\{\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=1}^{10}\frac{C(k,n)}{(1+r)^n}\left[\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{10}\beta(k,j,n-i+1)q(j,i)+L(k)\right]Q(k,n)\right\} \quad (4)$$

Donde, $C(k,n)$ es el costo de bombeo por acre-pie de agua por pie de abatimiento en el periodo de bombeo para el *k-ésimo* pozo en el *n-ésimo* periodo; r es la tasa de interés para llevar los costos a valor presente; $L(k)$ es el estímulo inicial para el *k-ésimo* pozo.

Hernandez-Narvaez (1987), sugirió que este método evalúa la respuesta del abatimiento del nivel de agua del acuífero ante un bombeo unitario en cada uno de los pozos del sistema y desarrolló un modelo de simulación en el Acuífero La Calera en Zacatecas, México. Los coeficientes de respuesta, $\beta(k,j,n-i+1)$, representaron el abatimiento promedio en la celda discretizada asociada al k-*ésimo* pozo de observación al final del n-*ésimo* periodo de bombeo. Contrario a Maddock (1972), Hernandez-Narvaez (1987) planteó una función objetivo que buscaba maximizar la extracción del agua subterránea del acuífero (ecuaciones 5 – 8), manteniendo el abatimiento dentro de límites permitidos:

$$Max\ Q = \left\{\sum_{k=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} q(k,n)\right\} \quad (5)$$

$$q(k,n) \leq Q_{max}(k) \quad para\ todo\ k\ y\ n \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{M} q(k,n) \geq D(n) \quad para\ todo\ n \quad (7)$$

$$s(k,n) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\beta(k,j,n-i+1)q(j,i) \leq |b(k) \quad (8)$$

Donde, Q es la suma del bombeo de los *M* pozos en los *N* periodos de tiempo; $q(k,n)$ es el bombeo del pozo *k* durante el periodo *n*; $Q_{max}(k)$ es el bombeo máximo de extracción del pozo *k*; $D(n)$ es la demanda de agua requerida en el periodo de tiempo *n*; $|b(k)$ es el abatimiento permitido en el pozo *k* al final del periodo de tiempo *n*.

Para calcular los coeficientes de respuesta, $\beta(k, j, n - i + 1)$, Hernandez-Narvaez utilizó un modelo de simulación numérica en diferencias finitas para asignar un bombeo unitario al primer pozo de bombeo durante el primer periodo de tiempo y cero en los periodos de tiempo restantes; este procedimiento fue repetido al resto de los pozos.

Psilovikos (2006), señaló que estos modelos pueden plantearse para analizar dos funciones objetivo, una que minimice los costos de extracción, y otra que maximice la extracción de agua subterránea, ambas funciones pueden estar sujetas a restricciones de abatimientos, subsidencias y extracciones máximas anuales. Todo el modelo de optimización puede ser resuelto a través de los métodos de programación lineal, programación entera, programación cuadrática o programación no lineal:

$$Z = \max\left\{\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} Q_j^k\right\} \tag{9}$$

$$Z = min\left\{\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} C_j^k Q_j^k\right\} \tag{10}$$

Donde N es el número de pozos de bombeo; T son los periodos de tiempo; C_j^k es el costo y Q_j^k es el volumen o caudal de bombeo.

Chang, et al., (2007) realizó un modelo estocástico para la gestión de aguas subterráneas considerando explícitamente la subsidencia del terreno; en este modelo, para evaluar el abatimiento del nivel de agua subterránea, se utilizó la técnica de la matriz de coeficientes de respuesta. En su planteamiento, el modelo de gestión permitió maximizar el bombeo total sujeto a las restricciones de abatimiento y subsidencia (ecuaciones 11 – 13), los cuales, no deberían exceder de ciertos valores permitidos.

$$Z = max\left\{\sum_{j=1}^{NP}\sum_{t=1}^{NT} Q(j,t)\right\} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} s(k,t) \leq s^*(k,t), \quad t = 1, \dots, NT; \quad k = 1, \dots, NC \\ \delta(k,t) \leq \delta^*(k,t), \quad t = 1, \dots, NT; \quad k = 1, \dots, NC \\ 0 \leq Q(j,t) \leq Q^*(j,t), \quad t = 1, \dots, NT; \quad j = 1, \dots, NP \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} s(k,t) = \sum_{j=1}^{NP}\sum_{i=1}^{t} \beta(k,j,t-i+1)Q(j,i) \leq s^*(k,t) \\ t = 1, \dots, NT; \;\; k = 1, \dots, NC \end{gathered} \tag{13}$$

Donde, NP es el número de pozos de bombeo; NT es el número de periodos de tiempo; NC es el número de puntos de control; $Q(j,t)$ es el bombeo del j-*ésimo* pozo durante el t-*ésimo* periodo de tiempo; $s(k,t)$ es el abatimiento en el k-*ésimo* punto de control al final del t-*ésimo* periodo de tiempo; $\delta(k,t)$ es la subsidencia en el k-*ésimo* punto de control durante el t-*ésimo* periodo de tiempo; $Q^*(j,t)$ es el bombeo permitido en el j-*ésimo* pozo durante el t-*ésimo* periodo de tiempo; $s^*(k,t)$ es el abatimiento permitido en el k-*ésimo* punto de control al final del t-*ésimo* periodo de tiempo; $\delta^*(k,t)$ es la subsidencia permitida en el k-*ésimo* punto de control durante el t-*ésimo* periodo de tiempo; $\beta(k,j,t-i+1)$ es el coeficiente de respuesta unitario que representa el abatimiento del k-*ésimo* punto de control al final del t-*ésimo* periodo de tiempo debido a un bombeo de un volumen unitario del j-*ésimo* pozo durante el i-*ésimo* periodo de tiempo.

Chang, et al., (2011), mejoró el modelo realizado en el 2007, al aplicarlo a un sistema multi-acuífero formado por 2 acuíferos confinados separados por un acuitardo. Para el modelo de gestión, se consideró la técnica de la matriz de los coeficientes de respuesta y la ecuación de consolidación unidimensional para establecer las restricciones de abatimiento y de subsidencias en el modelo; se plantearon dos funciones objetivo, una para determinar el bombeo máximo (ecuaciones 14 – 16) y otra para minimizar el impacto ambiental (ecuaciones 17 – 20) debido a la extracción del agua subterránea.

$$Z = max\left\{\sum_{j=1}^{NP}\sum_{t=1}^{NT} Q(j,t)\right\} \tag{14}$$

$$\delta(k) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{NT} \delta(l,k,t) \leq \delta^{*}(k) \quad\quad k = 1, \dots, NC \tag{15}$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^{*}(j,t), \quad t = 1, \dots, NT; \quad j = 1, \dots, NP \tag{16}$$

$$Z = Min\,\{Max\,[\delta(NC)]\} \tag{17}$$

$$\delta(k) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{t=1}^{NT} \delta(l,k,t) \leq \delta^{*}(k) \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{NP} Q(j,t) \geq Q^{D}(t) \tag{19}$$

$$0 \leq Q(j,t) \leq Q^{*}(j,t) \tag{20}$$

En ambos casos, para calcular el abatimiento en el k-*ésimo* punto de control al final del t-*ésimo* periodo de tiempo, $s(k,t)$, se utiliza la ecuación (21):

$$s(l,k,t) = \sum_{j=1}^{NP}\sum_{i=1}^{t} \beta(l,k,j,t-i+1)Q(j,i) \quad\quad \forall l;\ \forall k;\ \forall t \tag{21}$$

Donde, NP es el número de pozos de bombeo; NT es el número de periodos de tiempo; NC es el número de puntos de control; $Q(j,t)$ es el bombeo del j-*ésimo* pozo durante el t-*ésimo* periodo de tiempo; $Q^{*}(j,t)$ es el bombeo permitido en el j-*ésimo* pozo durante el t-*ésimo* periodo de tiempo; $\delta^{*}(k,t)$ es la subsidencia permitida en el k-*ésimo* punto de control de control al final del NT-*ésimo* periodo de tiempo; $\delta(NC)$ es un vector de dimensión NC formado por las subsidencias de los NC puntos de control; $Q^{D}(t)$ es la demanda de agua subterránea durante el t-ésimo periodo de tiempo; y $\beta(k, j, t - i + 1)$ es el coeficiente de respuesta unitario que representa el abatimiento del k-*ésimo* punto de control al final del t-*ésimo* periodo de tiempo debido a un bombeo de un volumen unitario del j-*ésimo* pozo durante el i-*ésimo* periodo de tiempo..

Con las ecuaciones 17 – 20 se intentó encontrar la estrategia óptima de bombeo que minimiza el valor de la subsidencia del suelo mientras la demanda de agua subterránea es asegurada.

Estas investigaciones no consideran el efecto transitorio dentro del acuitardo, debido a que el efecto del almacenamiento da como resultado una relación no lineal entre la carga hidráulica y el bombeo, por lo que el método de la matriz de coeficientes de respuesta no es válido.

2.1.2. Modelos de evaluación de políticas y distribución del agua subterránea.

Los modelos de evaluación y asignación de políticas de aguas subterráneas son valiosos para problemas complejos donde la gestión hídrica no es la única preocupación; en estos modelos se inspeccionan los problemas de asignación de agua que involucran el objetivo de gestión económica.

Una de las herramientas que se usa con frecuencia para respaldar la Gestión Integrada de los Recursos Hídricos es la modelación hidro-económica (Kragt, 2013).

Los modelos hidro-económicos integran, a escala regional, los aspectos hidrológicos, de ingeniería, gestión del agua, condiciones ambientales y los aspectos socioeconómicos de los sistemas de recursos hídricos dentro de un marco de modelación coherente (Harou et al., 2009; Kragt, 2013; Medellín-Azuara et al., 2009; Darani et al., 2017). La idea es conjuntar los conceptos económicos en los modelos de gestión de recursos hídricos (Harou, et al., 2009).

Al combinar los procesos económicos junto con los modelos hidrológicos, se logra una perspectiva relevante en la toma de decisiones y en el diseño de políticas para la gestión del agua. Si estos modelos se desarrollan y se utilizan con la participación de los involucrados en los temas del agua, pueden convertirse en una base para la comprensión compartida de los problemas del agua, para la gestión negociada y las soluciones óptimas de políticas. Cuando los modelos se implementan con técnicas de optimización, los modelos hidro-económicos integrados también pueden sugerir soluciones innovadoras para que sean consideradas por los actores políticos (Harou, et al., 2009).

Los modelos hidro-económicos pueden variar en enfoque y nivel de complejidad según el problema a analizar (Maneta, et al., 2009) y tienen como objetivo capturar la complejidad de las interacciones entre el agua y la economía (Brouwer, et al., 2008). Estos modelos pueden utilizarse para guiar el diseño y la implementación de políticas de gestión en cuencas ubicadas principalmente en zonas áridas y semiáridas, donde ya se enfrentan a decisiones difíciles para la adaptación al cambio climático. (Kahil, et al., 2016).

Según Brouwer, et al., (2008), se distinguen tres enfoques principales en los modelos: modulares, holísticos y de equilibrio general computable. La clave para la modelación hidro-económica integrada es que los sistemas de agua tienen funciones económicas y que pueden usarse como una fuente y salida para la actividad socioeconómica y, por lo tanto, tienen valor económico. La mayoría de los modelos hidro-económicos se basan en un algoritmo de optimización económica simple sujeto a procesos detallados del flujo de aguas subterráneas y superficiales y su impacto en uno o múltiples sectores económicos.

La modelación económica de los recursos hídricos ha evolucionado desde que la demanda de agua de un uso en particular se analizaba de manera individual, generalmente independiente del resto de los usos dentro de la cuenca, y la oferta a una escala local, hasta considerar la demanda integrada junto con los recursos hídricos superficiales y subterráneos en toda la cuenca. Otros cambios importantes son la inclusión de los valores ambientales y las instituciones de gobernanza del agua. Apoyando estos cambios, los modelos hidro-económicos, en los últimos 25 años, han avanzado en teoría, diseño de modelos y técnicas computacionales, mejorando la capacidad de comprender los efectos de las políticas de recursos hídricos (Booker, et al., 2012).

Existen dos enfoques principales para integrar sistemas económicos e hidrológicos: simulación y optimización. En la primera, los modelos hidrológicos se utilizan para reproducir el funcionamiento del sistema para diferentes escenarios de hidrología y gestión, por lo que es poco probable que el uso de un enfoque de simulación encuentre la estrategia de gestión óptima en un espacio tan amplio y viable de alternativas. Por lo tanto, los modelos de simulación a menudo están vinculados a modelos de optimización que ayudan a buscar alternativas eficientes, que pueden verificarse y refinarse posteriormente mediante modelos de simulación más detallados (Pulido-Velazquez, 2010).

Los modelos hidro-económicos típicos se desarrollan como problemas de optimización sujetos a una serie de restricciones. Las medidas económicas de los beneficios y costos del uso del agua se utilizan en la función objetivo, mientras que los factores hidrológicos y de otro tipo generalmente se representan como restricciones. Se utilizan restricciones adicionales para representar el entorno institucional y, con frecuencia, limitaciones ambientales (Booker, et al., 2012).

En su artículo de revisión de literatura, Brouwer, et al., 2008, indica que muchos de los modelos hidro-económicos se basan en redes detalladas de nodos de equilibrio de agua y sustancias en toda la cuenca fluvial, vinculadas a una actividad económica a través de una función de demanda. Adicionalmente, menciona que estos modelos se pueden emplear en los siguientes temas: 1) política y toma de decisiones; 2) escasez y abastecimiento de agua; 3) calidad del agua y ecología; 4) avenidas e inundaciones; 5) alternativas para el cambio del uso de suelo; 6) uso integrado de agua superficial y subterránea; 7) abastecimiento urbano y uso agrícola; y, 8) aspectos institucionales-económicos de la gestión integrada del agua.

Harou, et al., (2009), hace una revisión y clasificación de los estudios hidro-económicos tomando en cuenta los siguientes temas: 1) distribución y uso intersectorial dentro y fuera de la corriente; 2) abastecimiento de agua, infraestructura y expansión de capacidades; 3) uso integrado de agua subterránea y superficial; 4) instituciones, mercados de agua y precios; 5) resolución de conflictos, gestión transfronteriza y sostenibilidad; 6) gestión para el cambio climático y sequías; y, 7) gestión uso de suelo: inundaciones y calidad del agua.

Pulido-Velazquez (2010) menciona que los modelos hidro-económicos son una herramienta útil para hacer frente a varios tipos de problemas relacionados con los recursos hídricos: i) analizar las políticas de gestión del agua subterránea; ii) evaluar los recursos y el costo de oportunidad ambiental en la gestión de aguas subterráneas; iii) aplicar técnicas de análisis de sistemas a la gestión de aguas subterráneas; y, iv) integrar la economía e hidrología para la gestión de aguas subterráneas.

Aunque los trabajos mencionados se enfocan en temas relevantes, resalta Davidsen, et al., (2016), quien analizó un sistema integral considerando tanto aguas subterráneas como superficiales y planteó un modelo hidro-económico para identificar la estrategia de menor costo para lograr una extracción de agua subterránea sostenible, definida como la extracción promedio a largo plazo que no excede la recarga. Se definió una función objetivo para minimizar los costos totales (ecuaciones 22 y 23) durante el período de planificación, que involucraba el costo de manejo inmediato (IC), que surge del suministro de agua y del abatimiento, y el costo esperado futuro (EFC), que es la función de valor óptimo en $t + 1$ ponderado por las probabilidades de transición correspondientes. Debido a que los costos de bombeo de aguas subterráneas dependen de la carga hidráulica, el costo inmediato depende de manera no lineal de las variables de decisión.

$$F_t^*\left(V_{gw,t}, V_{sw,t}, Q_{sw,t}^k\right) = min\left\{IC\left(V_{gw,t}, V_{sw,t}, Q_{sw,t}^k\right) + \sum_{l=1}^{L}\left[p_{kl}F_{t+1}^*\left(V_{gw,t+1}, V_{sw,t+1}, Q_{sw,t+1}^l\right)\right]\right\} \tag{22}$$

$$IC\left(V_{gw,t}, V_{sw,t}, Q_{sw,t}^k\right) = \sum_{m=1}^{M}\left(C_{sw}x_{sw} + C_{gw}x_{gw} + C_{SNWTP}x_{SNWTP} + C_{ct}x_{ct}\right)_{m,t} - r_{sw,t}b_{hp} \tag{23}$$

Al contrario del resto de las investigaciones, el abatimiento (Δh) se integró con la profundidad al nivel estático (Δh_{top}), abatimiento regional de agua subterránea (Δh_{reg}) y el abatimiento local en estado estacionario de Thiem (Δh_{Thiem}), por lo que fue calculado a partir de las ecuaciones 24 – 25, y se consideró en el costo de bombeo a partir de la ecuación 26.

$$\Delta h = \Delta h_{top} + \Delta h_{reg} + \Delta h_{Thiem}$$

$$\Delta h_{reg} = \left(V_{max,gw} - \frac{V_{gw,t} + V_{gw,t+1}}{2}\right) S_y^{-1} A^{-1} \tag{24}$$

$$\Delta h_{Thiem} = \frac{x_{gw}}{2\pi T} \ln\left(\frac{r_{in}}{r_w}\right) \tag{25}$$

$$C_{gw,t}x_{gw,t} = \rho g \Delta h \varepsilon^{-1} C_{el} x_{gw,t} \tag{26}$$

Donde, F_t^* es el valor de la función objetivo en el tiempo t; $V_{gw,t}$ es el volumen de agua almacenado en el acuífero; $V_{sw,t}$ es el volumen de agua superficial almacenado en las presas; $Q_{sw,t}^k$ es el escurrimiento en los ríos aguas arriba de las presas; p_{kl} es una probabilidad de transición desde *k* a *l*; C_{sw} y x_{sw} es el costo marginal y el volumen de la extracción de agua superficial; C_{gw} y x_{gw} es el costo marginal y el volumen de extracción de agua subterránea; C_{SNWTP} y x_{SNWTP} es el costo marginal y el volumen de extracción de agua del canal SNWTP; C_{ct} y x_{ct} es el costo marginal y el volumen de extracción de agua de otras fuentes; $r_{sw,t}$ y b_{hp} es el volumen de agua y el beneficio marginal de la generación hidroeléctrica; M es el usuario del agua; S_y, A, T es el rendimiento específico, área y transmisividad del acuífero

Es de resaltar que la mayoría de los artículos mencionados, proponen modelos de optimización económica no lineal, maximizando los beneficios o minimizando costos.

De la revisión bibliográfica, se identificaron dos trabajos realizados en México por el mismo autor, Medellín-Azuara, et al., el primero de ellos, realizado en el 2009, se enfocó en proporcionar información sobre una cartera de acciones y proyectos (mercados de agua, reutilización de aguas residuales, desalinización de agua de mar y expansiones de infraestructura) para el suministro de agua para Baja California a través de un análisis integrado de la gestión del agua en la Región; mientras que en el segundo, realizado en el 2010, se evaluaron los efectos del nivel de agregación al estimar el valor económico del agua en la agricultura en la cuenca del Río Bravo bajo cuatro escenarios: cambio tecnológico, cambio climático (de cálido a seco), cambios en los precios de los productos agrícolas y los costos del agua para la agricultura.

Las posibilidades de aplicación de estos modelos de gestión en los acuíferos de México son muy grandes, y más aún donde la explotación del agua subterránea se realiza sin ninguna restricción en el uso del agua y en zonas de escasez, donde su disponibilidad se encuentra ya condicionada por los altos niveles de sobreexplotación. Escolero-Fuentes, (1993), integró un marco conceptual de la modelación aplicada a las aguas subterráneas en México, además identificó, analizó y clasificó las metodologías apropiadas para el manejo óptimo de un acuífero en México.

Como puede observarse, ambos tipos de modelos de gestión se sustentan en algoritmos de optimización que permiten minimizar costos o maximizar extracciones bajo el cumplimiento de restricciones para alcanzar una función objetivo; por lo que la siguiente parte de la revisión de literatura se enfocará en un breve análisis sobre los temas de optimización.

2.2. TEORÍA DE LA OPTIMIZACIÓN

El desarrollo de este apartado toma como referencia la publicación de Peralta y Kalwij, 2012.

Un enfoque de optimización implica definir matemáticamente el problema a resolver, utilizando variables de decisión, variables de estado, función objetivo, restricciones y límites. En la Figura 4, se muestran los componentes para definir un problema de optimización.

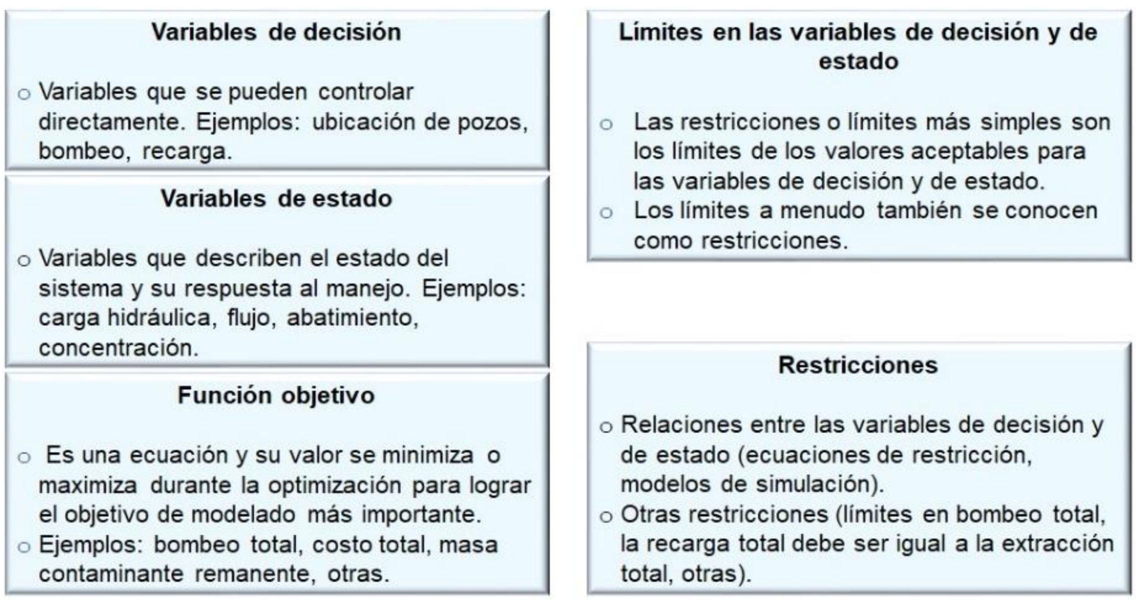


Figura 4. Componentes de un problema de optimización (tomado de Peralta y Kalwij, 2012).

Los problemas de optimización pueden clasificarse como lineales, enteros, enteros mixtos, no lineales y enteros mixtos no lineales. La designación de un tipo de problema de optimización en particular depende significativamente de la linealidad y no linealidad tanto del sistema físico como del problema de gestión. En el cuadro 3 se analizan los tipos de problemas de optimización, restricciones y si se alcanza la optimalidad.

Cuadro 3. Tipos de problemas de optimización y optimalidad alcanzada usando optimizadores clásicos (tomado de Peralta y Kalwij, 2012).

Función objetivo	Restricciones	Problema de optimización	Optimalidad alcanzada
Lineal	Lineal	Programación lineal (LP)	Global
Algunas cuadráticas	Lineal	Programación cuadrática (QP)	Con frecuencia global
Lineal y entera	Lineal y entera	Enteros mixtos (MIP)	Algunas veces solo local
Lineal o no lineal	No lineal	No lineal (NLP)	Algunas veces solo local
Lineal. Entera y no lineal	Lineal, entera o no lineal	Enteros mixtos no lineal (MINLP)	Algunas veces solo local

2.2.1. Problema de optimización por programación lineal (LP)

Los problemas de optimización de programación lineal (LP, por sus siglas en inglés) solo tienen ecuaciones lineales, en las que las variables existen solo a la primera potencia y no hay productos de dos o más variables. Un ejemplo de una función objetivo lineal es la suma total del bombeo, el cual suele maximizarse para problemas de suministro de agua y minimizarse para problemas ambientales o de remediación. El esquema de optimización de programación LP típico es el siguiente:

- Las variables X_1 y X_2 son números reales.
- Función objetivo lineal:

$$Z = \max a_1 X_1 + a_2 X_2 \tag{27}$$

- Restricciones lineales:

$$c_{1,1} X_1 + c_{1.2} X_2 \leq 5 \tag{28}$$

$$c_{2,1} X_1 + c_{2.2} X_2 = 3 \tag{29}$$

- Límites:

$$X_1 \geq b_1;\ X_2 \leq b_2 \tag{30}$$

2.2.2. Problema de optimización por programación cuadrática (QP)

Los problemas de optimización de programación cuadrática (QP, por sus siglas en inglés) tienen todas las ecuaciones lineales, excepto la función objetivo que es cuadrática. La función objetivo incluye uno o más términos que tienen una variable elevada a la segunda potencia, o un producto de dos variables cada una a la primera potencia. Un ejemplo de función objetivo cuadrática es la que calcula el costo total del bombeo (si el costo incluye el volumen de bombeo o la tasa multiplicada por el nivel dinámico provocado por el bombeo). Normalmente, la optimización minimiza este valor. Un esquema de optimización por QP típico es el siguiente:

- Las variables X_1 y X_2 son números reales.
- Función objetivo cuadrática:

$$Z = \max a_1X_1 + a_2X_1X_2 + a_3X_2 \tag{31}$$

- Restricciones lineales (como en el modelo lineal).
- Límites (como en el modelo lineal).

2.2.3. Problema de optimización por programación entera (IP)

Los problemas de programación entera (IP, por sus siglas en inglés) involucran variables enteras como 0, 1, 2, 3, etc. Los problemas en los que las variables enteras deben ser 0 o 1 se denominan enteros binarios o problemas de programación 0 - 1. Las variables binarias (0 y 1) se utilizan a menudo para indicar que una acción no se realizará o se realizará, respectivamente. Una función objetivo binaria puede representar la suma de los productos de los costos de instalación de pozos multiplicados por 0 (para un pozo que no se instalará) o 1 (para un pozo que se instalará). Una función objetivo no binaria incluye el número de pozos de cada tipo multiplicado por su respectivo costo. Un esquema de optimización IP típico es el siguiente:

- Las variables I_1 y I_2 son números enteros no negativos.
- Función objetivo:

$$Z = \max a_1 I_1 + a_2 I_1 \tag{32}$$

- Restricciones:

$$c_1 I_1 - c_2 I_2 < 10 \tag{33}$$

- Límites (como en el modelo lineal).

$$I_1 > 0;\ I_2 < 5 \tag{34}$$

2.2.4. Problema de optimización por programación de enteros mixtos (MIP).

En los problemas de programación de enteros mixtos (MIP, por sus siglas en inglés), algunas variables son números enteros y otras son números reales. Una función objetivo MIP representa la suma total de los costos de bombeo de agua subterránea más los costos de instalación de pozos bombeados. La optimización generalmente minimiza esta suma. Un esquema de optimización de MIP típico es el siguiente:

- Las variables incluyen números reales y enteros:
    - I_1 y I_2 son números enteros no negativos.
    - X_1 y X_2 son números reales.
- Función objetivo:

$$Z = \min a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 I_1 + a_4 I_2 \tag{35}$$

- Restricciones pueden ser reales, enteras o una mezcla:
    - Como en programación lineal para variables reales.
    - Como en programación entera para variables enteras.
    - Mezcla de variables reales y enteras:

$$c_{3,1}X_1 + c_{3,3}I_1 > 12$$
$$c_{4,2}X_2 + c_{4,4}I_2 > 8 \tag{36}$$

- Límites:
    - Como en programación lineal para variables reales.
    - Como en programación entera para variables enteras

2.2.5. Problema de optimización por programación no lineal (NLP).

Un problema de optimización de programación no lineal (NLP, por sus siglas en inglés) tiene, al menos, una restricción no lineal, o una función objetivo de una potencia diferente a uno o cuadrática. Un ejemplo de un problema de optimización NLP es minimizar el bombeo de extracción necesario para lograr el objetivo no lineal de las concentraciones de contaminantes en el agua subterránea en un tiempo determinado. Las concentraciones óptimas también pueden existir dentro de una función objetivo. Son más no lineales que cuadráticas. Un esquema de optimización de NLP típico es el siguiente:

- Función objetivo:
    - Si solo es lineal o cuadrática, debe haber una restricción no lineal.
    - No lineal.

$$Z = \mathrm{Max}\, a_1{X_1}^{0.33} + a_2X_1{X_2}^4 \tag{37}$$

- Restricciones:
    - Lineal (opcional).
    - No lineal (función objetivo o al menos una restricción debe ser no lineal).

$$c_1X_1{X_2}^2 - c_2{X_2}^3 = 10 \tag{38}$$

- Límites (como el modelo lineal).

2.2.6. Problema de optimización por programación no lineal de enteros mixtos (MINLP).

Una programación no lineal de enteros mixtos (MINLP, por sus siglas en inglés) combina características de MIP y NLP. Comúnmente tiene una función objetivo MIP y restricciones no lineales. Un problema de muestra del MINLP es minimizar el costo de instalación y operación de pozos para lograr los objetivos de remediación de la contaminación del agua subterránea mediante bombeo de extracción o bombeo y tratamiento. Las concentraciones de contaminantes en las aguas subterráneas son funciones no lineales de la extracción por bombeo.

2.3. TEORÍA DEL FLUJO DEL AGUA EN ACUÍFEROS SEMICONFINADOS (LEAKY THEORY)

De acuerdo con Bear J. y Cheng A. H. D. (2010), el agua subsuperficial, o agua subterránea, es un término que se usa para denotar todas las aguas que se encuentran debajo de la superficie del suelo en la zona de saturación. Para el aprovechamiento del agua subterránea, las formaciones geológicas se pueden clasificar según sus propiedades hidráulicas en *acuíferos*, *acuitardos* y *acuicludos*.

Un *acuífero* es una formación geológica porosa que permite almacenar y transmitir agua en cantidades significativas en relación con otras formaciones cercanas. Un *acuitardo* es una formación geológica semipermeable que transmite agua a un ritmo muy bajo en comparación con un acuífero. Finalmente, el *acuifugo* es una formación impermeable, que no contiene ni transmite agua.

El acuitardo es una capa semipermeable que tiene una conductividad hidráulica que es mucho menor que la del acuífero, pero en áreas grandes (horizontales), puede permitir el paso de grandes cantidades de agua entre los acuíferos que delimita.

A escala local, desde el punto de vista de la hidráulica de pozos, los sistemas de aguas subterráneas se integran por acuíferos separados por acuitardos o acuicludos. Un acuífero que está delimitado en la parte superior e inferior por capas impermeables, y está aislado hidráulicamente del resto, se denomina *acuífero confinado*. Un acuífero cuya base es impermeable, pero la parte superior está en contacto con la atmósfera, es un *acuífero libre o no confinado*. Si las formaciones delimitantes del acuífero son semipermeables, se puede producir un intercambio de agua entre el acuitardo y el acuífero. Este intercambio generalmente se conoce como goteo y el sistema acuífero-acuitardo se le denomina *acuífero semiconfinado*.

A continuación, se realiza el planteamiento teórico del flujo de agua en medios semiconfinados a partir de las publicaciones de Cheng A.H.D (2000) y Lezama-Campos, J. L. (2016).

2.3.1. Flujo del agua en el acuitardo

En un acuitardo se supone que el flujo de agua es en dirección vertical, por lo que en una ubicación determinada (x, y), la ecuación gobernante del flujo del agua subterránea depende únicamente de la coordenada z; de esta manera, la ecuación de flujo, en un acuitardo homogéneo, se reduce a:

$$S_s{}' \frac{\partial h'}{\partial t} = K' \frac{\partial^2 h'}{\partial z^2} \tag{39}$$

Tomando el abatimiento dentro del acuitardo, $s'(z,t)$, como la diferencia entre la carga hidráulica, $h'(z,t)$, y la carga hidráulica inicial en el estado en equilibrio, $h_0{}'(z)$:

$$s'(z,t) = h_0{}'(z) - h'(z,t) \tag{40}$$

Al considerar un estado estacionario, la ecuación (39) se simplifica a:

$$\frac{d^2 h_0{}'}{dz^2} = 0 \tag{41}$$

Una solución de la ecuación (41) está dada por:

$$h_0{}' = az + b \tag{42}$$

Sustituyendo las ecuaciones (40) y (41) en la ecuación (39) y considerando que $S' = b'S_s{}'$,

$$S'\frac{\partial s'}{\partial t} = b'K'\frac{\partial^2 s'}{\partial z^2} \tag{43}$$

Para resolver la ecuación (43) y determinar los valores del abatimiento en el acuitardo hay que definir un conjunto de condiciones de frontera e inicial. De acuerdo con la Figura 5, se pueden definir 2 casos de análisis:

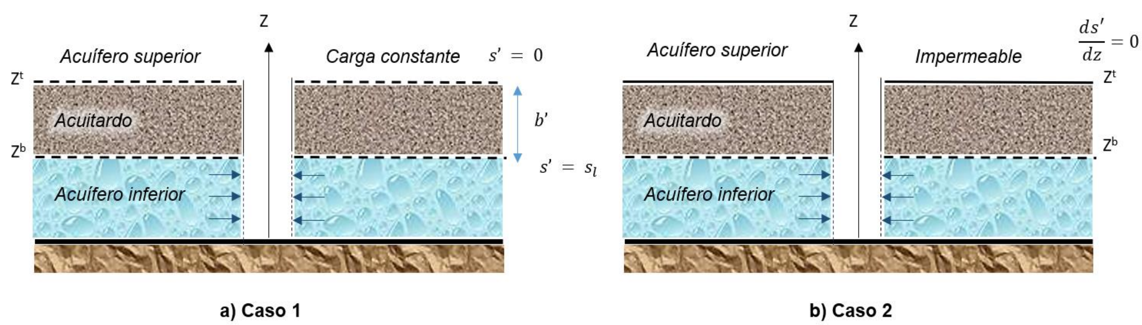


Figura 5. Casos de análisis para el flujo del agua en el acuitardo.

Caso 1. Considerando 2 acuíferos separados por un acuitardo; inicialmente, el acuitardo está sin perturbación, $s' = 0$; en un tiempo mayor del inicial, el acuífero inferior está sujeto a un abatimiento escalonado en el tiempo con una magnitud, s_l; el acuífero superior se asume altamente permeable con una cantidad infinita de agua, por lo que la carga hidráulica permanece constante en todo el tiempo; estas condiciones pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} s'(z, 0) &= 0 \\ s'(0, t) &= s_l \\ s'(b', t) &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

La solución de la ecuación (43) considerando las condiciones de frontera e inicial de la ecuación (44) es:

$$\frac{s'(z,t)}{s_l} = 1 - \frac{z}{b'} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\exp\left(-\frac{m^2\pi^2K't}{S'b'}\right)\sin\frac{m\pi z}{b'} \tag{45}$$

El flujo de agua desde el acuitardo hacia el acuífero puede ser obtenido con:

$$q'_z(z,t) = -\frac{s_lK'}{b'}\left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{m^2\pi^2K't}{S'b'}\right)\cos\frac{m\pi z}{b'}\right] \tag{46}$$

Caso 2. La parte superior del acuitardo está delimitada por una capa impermeable (acuifugo), por lo que las condiciones de frontera e inicial son las siguientes:

$$\begin{gathered}\frac{\partial s'}{\partial z} = 0 \ \ con\ z = b' \\ s'(0,t) = s_l \\ s'(z,0) = 0\end{gathered} \tag{47}$$

La solución de la ecuación (43) sujeta a las condiciones de frontera e inicial de la ecuación (47) es:

$$\frac{s'(z,t)}{s_l} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\exp\left(-\frac{(2m-1)^2\pi^2K't}{4\,S'b'}\right)\sin\frac{(2m-1)\pi z}{2\,b'} \tag{48}$$

2.3.2. Ecuaciones gobernantes

Considerando un sistema multi-acuífero formado por un acuífero confinado inferior delimitado en su parte superior por un acuitardo y éste a su vez por un acuífero libre, tal y como se muestra en la Figura 6; además, se considera que el acuífero libre tiene una alta conductividad hidráulica provocando que la carga hidráulica se mantenga constante todo el tiempo. Con estos supuestos, la ecuación que rige el flujo de agua en el acuífero tomando en cuenta el “goteo” del acuitardo, q_l, es la siguiente:

$$S\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial s}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)+q_l \qquad (49)$$

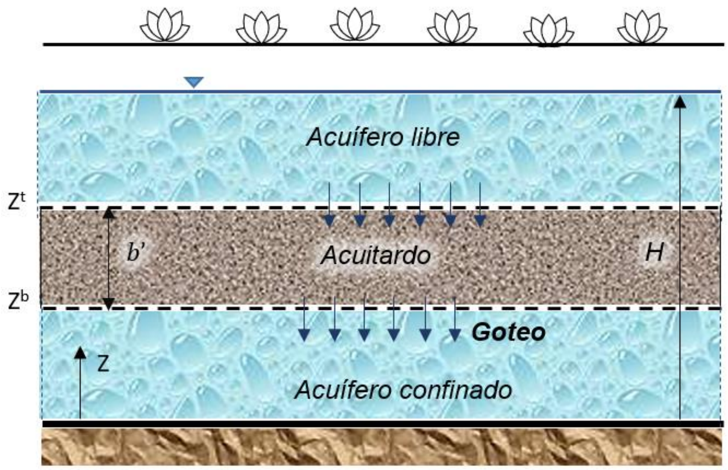


Figura 6. Ejemplo de un sistema multi-acuífero considerando el goteo del acuitardo.

Revisando la misma Figura 6 y considerando el principio de conservación de masa, el goteo del acuitardo hacia el acuífero es equivalente al flujo de agua en la parte inferior del acuitardo, $z = z^b$, esto es:

$$q_l = K'\frac{\partial s'}{\partial z}\bigg|_{z=z^b} \qquad (50)$$

Por otra parte, el abatimiento en el acuitardo, s', esta regido por la ecuación (43)

$$S'\frac{\partial s'}{\partial t}=b'K'\frac{\partial^2 s'}{\partial z^2} \qquad (51)$$

Con las siguientes condiciones de frontera e inicial:

$$\begin{aligned} s' &= 0 & para\ z &= z^t \\ s' &= s(x,y,t) & para\ z &= z^b \end{aligned} \qquad (52)$$

Donde s es el abatimiento definido en la ecuación (49). La primera condición es debido a la carga constante en el acuífero superior, mientras que la segunda condición se establece por el equilibrio dinámico en la interfase acuífero-acuitardo del sistema.

2.3.3. Flujo en estado estacionario

En estado estacionario, la ecuación (51) que rige el flujo de agua en el acuitardo, se ajusta a:

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial z^2} = 0 \qquad (53)$$

Considerando las condiciones de frontera e inicial de la ecuación (52), el abatimiento en el acuitardo es una función lineal de la profundidad:

$$s' = \frac{s}{b'}(z^t - z) \qquad (54)$$

Donde $b' = (z^t - z^b)$ es la altura del acuitardo; a partir de la ecuación (50) el goteo hacia el acuífero es,

$$-q_l = K'\frac{s}{b'} \qquad (55)$$

Sustituyendo en la ecuación (49), se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial s}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial s}{\partial y}\right) - K'\frac{s}{b'} = 0 \qquad (56)$$

Si el acuífero es homogéneo e isotrópico, la ecuación (56) puede escribirse como una ecuación de Helmholtz modificada,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} - \frac{s}{\lambda^2} = 0 \qquad (57)$$

Donde $\lambda = \sqrt{\frac{b'T}{K'}}$ es el factor de goteo, el cual es una propiedad combinada entre el acuífero y acuitardo, tiene la dimensión de longitud y caracteriza la caída exponencial de la perturbación local.

Otros autores como Bredehoeft y Pinder (1970), proponen que con las ecuaciones (58) y (59), se pueden determinar los valores del abatimiento en diferentes posiciones, z, dentro del acuitardo, en cada intervalo de tiempo y el flujo de agua, q', hacia el acuífero producido por un cambio en el abatimiento inicial en la interfaz acuitardo-acuífero, respectivamente:

$$s'_{(m,k)} = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ erf\left[\frac{(2n+1)+z/b'}{(4t^*)^{1/2}}\right] - erf\left[\frac{(2n+1)-z/b'}{(4t^*)^{1/2}}\right] \right\} \tag{58}$$

$$q' = \frac{K'S_0}{b'(\pi t^*)^{1/2}} \left\{ 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} exp\left[-\frac{n^2}{t^*}\right] \right\} \tag{59}$$

Donde, S_0 es el cambio en el abatimiento inicial en el límite entre el acuífero y el acuitardo producto del bombeo óptimo, en cada intervalo de tiempo; z es la posición vertical dentro del acuitardo donde se calcula el valor del abatimiento; t^* es el tiempo adimensional, definido con:

$$t^* = \frac{K't}{S_s' b'^2} \tag{60}$$

Donde, b' es el espesor del acuitardo [L], m; K' es la conductividad hidráulica del acuitardo [LT^{-1}], m/s, y Ss' es el coeficiente de almacenamiento específico del acuitardo [L^{-1}], m^{-1}; y t es el intervalo de tiempo [T], s.

2.3.4. Soluciones analíticas a las ecuaciones de flujo

En el cuadro 4, se concentran las diferentes soluciones analíticas a las ecuaciones de flujo de acuíferos semiconfinados sometidos a perturbaciones ocasionadas por el bombeo.

Las soluciones en estado transitorio que consideran el almacenamiento del acuitardo, satisfacen un abatimiento variable en el tiempo, $s(r,t)$. Para resolver este problema se aplica una técnica matemática conocida como el principio de superposición de Duhamel.

Para esto, se asume que $U(z,t)$ es la solución de una ecuación diferencial parcial lineal con condiciones de frontera e inicial nulas, pero, en una condición de frontera se toma una función de escalón unitario en el tiempo, $H(t - 0)$. Si el problema se resuelve con la misma ecuación gobernante y condiciones iniciales y de frontera, y se considera que la función de escalón unitario se reemplaza por una condición de frontera variable $b(t)$ con su valor inicial $b(0) = 0$, entonces la solución está dada por la integral de convolución:

$$V(z,t) = \int_0^t U(z,\tau) \frac{\partial b(t-\tau)}{\partial t} d\tau \tag{61}$$

La función $U(z,t)$, basada en la condición de frontera de escalón unitario es una función de influencia de escalón; la linealidad del sistema permite obtener la solución por superposición.

A partir de este principio, se plantea la siguiente solución para el abatimiento en el acuitardo; para el caso 1, se tiene:

$$s'(r,z,t) = \int_0^t \left[1 - \frac{z - z^b}{b'} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 K' \tau}{S' b'}\right) \sin\left(\frac{m\pi\left(z - z^b\right)}{b'}\right)\right] \frac{\partial s(r,t-\tau)}{\partial t} d\tau \tag{62}$$

Para el caso 2:

$$s'(r,z,t) = \int_0^t \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \exp\left(-\frac{(2m-1)^2 \pi^2 K' \tau}{4S' b'}\right) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi\left(z - z^b\right)}{2b'}\right)\right] \frac{\partial s(r,t-\tau)}{\partial t} d\tau \tag{63}$$

Cuadro 4. Soluciones analíticas a las ecuaciones de flujo de acuíferos semiconfinados (adaptado de Cheng A.H.D, 2000).

Condición	Solución analítica	Cálculo del abatimiento en el acuífero	Función de pozo
Con bombeo en estado estacionario	Solución de Jacob	$s = \frac{Q_w}{4\pi T} W(\beta)$	$W(\beta) = W(\frac{r}{\lambda}) = 2K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)$
Con bombeo en estado transitorio	Solución de Hantush-Jacob	$s = \frac{Q_w}{4\pi T} W(u, \beta)$	$W(u, \beta) = \int_u^\infty \frac{1}{u} exp\left(-u - \frac{\beta^2}{4u}\right) du$ Con: $u = \frac{r^2 S}{4Tt}$ $\beta = \frac{r}{\lambda} = \sqrt{\frac{K'}{b'T}} r$ Utilizando la transformada inversa de Laplace: $W(u, \beta) = W\left(\frac{1}{t^*}, \beta\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^*} K_0\left(\sqrt{4p^* + \beta^2}\right)\right\}$
Considerando el almacenamiento del acuitardo – Tiempos cortos	Solución de Hantush	Caso 1 y caso 2: $s = \frac{Q_w}{4\pi T} H(u, \beta')$	$H(u, \beta') = H\left(\frac{1}{t^*}, \beta'\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^*} K_o\left(\sqrt{4p^* + 8\beta' \sqrt{p^*}}\right)\right\}$ Con: $p^* = \frac{\log(2)}{t^*}$ $\beta' = \frac{\sqrt{\eta}\beta}{4}$
Considerando el almacenamiento del acuitardo – Tiempos largos	Solución de Hantush	Caso 1. $s = \frac{Q_w}{4\pi T} W(u_1, \beta)$ Caso 2. $s = \frac{Q_w}{4\pi T} W(u_2)$	$W(u_1, \beta)$ es la función de pozo de Hantush-Jacob y $W(u_2)$ es la función de pozo de Theis. Con: $u_1 = \left(1 + \frac{\eta}{3}\right) u$ $u_2 = (1 + \eta) u$

Condición	Solución analítica	Cálculo del abatimiento en el acuífero	Función de pozo
Considerando el almacenamiento del acuitardo	Solución de Hantush-Neuman	Caso 1: $s = \frac{Q_w}{4\pi T} W_1(u,\beta,\eta)$ Caso 2. $s = \frac{Q_w}{4\pi T} W_2(u,\beta,\eta)$	W_1 y W_2son las funciones de pozo de Hantush-Neuman para los casos 1 y 2, respectivamente: $W_1(u,\beta,\eta) = W_1\left(\frac{1}{t^*},\beta,\eta\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^*}K_o\left(\sqrt{4p^* + 2\beta\sqrt{\eta p^*}coth\frac{2\sqrt{\eta p^*}}{\beta}}\right)\right\}$ $W_2(u,\beta,\eta) = W_2\left(\frac{1}{t^*},\beta,\eta\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^*}K_o\left(\sqrt{4p^* + 2\beta\sqrt{\eta p^*}tanh\frac{2\sqrt{\eta p^*}}{\beta}}\right)\right\}$ Con: $u = \frac{r^2S}{4Tt}$ $\beta = \frac{r}{\lambda} = \sqrt{\frac{K'}{b'T}}r$ $\eta = \frac{S'}{S}$

2.4. LITERATURA CITADA

Abdulbaki D., Al-Hindi M., Yassine A., Najm M. A. (2017). An optimization model for the allocation of water resources. Journal of Cleaner Production 164 (2017) 994e1006. http://dx.doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.07.024.

Aeschbach-Hertig W., Gleeson T. (2012). Regional strategies for the accelerating global problem of groundwater depletion. Nature Geoscience Vol 5 Decembre 2012. doi: 10.1038/NGEO1617.

Aguilera P. A., Fernández A., Fernández R., Rumí R., Salmerón A. (2011). Bayesian networks in environmental modelling. Environmental Modelling & Software 26 (2011) 1376-1388. doi:10.1016/j.envsoft.2011.06.004.

Ahlfeld, D. P. (2004). Nonlinear response of streamflow to groundwater pumping for a hydrologic streamflow model. Advances in Water Resources. 27, 349–360.

Ahmad A., El-Shafie A., Razali S. F. M., Mohamad Z. S. (2014). Reservoir Optimization in Water Resources: a Review. Water Resour Manage (2014) 28:3391–3405. doi 10.1007/s11269-014-0700-5.

Alamanos A., Xenarios S., Mylopoulos N., Stålnacke P. (2016). Hydro-economic modeling and management with limited data: The case of Lake Karla Basin, Greece. European Water 54: 3-18, 2016.

Allain S., Ndong G. O., Lardy R., Leenhardt D. (2018). Integrated assessment of four strategies for solving water imbalance in an agricultural landscape. Agronomy for Sustainable Development (2018) 38: 60. doi.org/10.1007/s13593-018-0529-z.

Bagheri R., Nosrati A., Jafari H., Eggenkamp H.G.M., Mozafari M. (2019). Overexploitation hazards and salinization risks in crucial declining aquifers, chemo-isotopic approaches. Journal of Hazardous Materials 369 (2019) 150–163. https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2019.02.024

Barton D. N., Saloranta T., Moe S. J., Eggestad H. O., Kuikka S. (2008). Bayesian belief networks as a meta-modelling tool in integrated river basin management — Pros and cons in evaluating nutrient abatement decisions under uncertainty in a Norwegian river basin. Ecological economics 66 (2008)91 – 104. doi:10.1016/j.ecolecon.2008.02.012

Bear J. & Verruijt A. (1987). Modeling Groundwater Flow and Pollution. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Booker J. F., Howitt R. E., Michelsen A. M., Young R. A. (2012). Economics and the modeling of water resources and policies. Natural resource modeling Volume 25, Number 1, February 2012.

Bredehoeft J. D. and Pinder G. F. (1970). Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater systems: A quasi three-dimensional model. Water Resources Research, 6(3), 1970, 883- 888.

Brouwer R., Hofkes M. (2008). Integrated hydro-economic modelling: Approaches, key issues and future research directions. Ecological economics 66 (2008) 16-22. doi:10.1016/j.ecolecon.2008.02.009

Brown C. M., Lund J. R., Cai X., Reed P. M., Zagona E. A., Ostfeld A., Hall J., Characklis G. W., Yu W., Brekke L. (2015). The future of water resources systems analysis: Toward a scientific framework for sustainable water management, Water Resour. Res. 51, 6110–6124, doi:10.1002/2015WR017114.

Cai X., Ringler C., You J Y. (2008). Substitution between water and other agricultural inputs: Implications for water conservation in a River Basin context. Ecological Economics 66 (2008) 38 – 50. doi:10.1016/j.ecolecon.2008.02.010

Cai X., ASCE M., McKinney D. C., ASCE A. M., Lasdon L. S. (2003). Integrated Hydrologic-Agronomic-Economic Model for River Basin Management. Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 129, No. 1, January 1, 2003. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:1(4)

Carmona G., Varela-Ortega C., Bromley J. (2011). The Use of Participatory Object-Oriented Bayesian Networks and Agro-Economic Models for Groundwater Management in Spain. Water Resour Manage (2011) 25:1509–1524. doi 10.1007/s11269-010-9757-y

Castle S. L., Thomas B. F., Reager J. T., Rodell M., Swenson S. C., Famiglietti J. S. (2014). Groundwater depletion during drought threatens future water security of the Colorado River Basin, Geophys. Res. Lett., 41, 5904–5911, doi:10.1002/2014GL061055.

Chang, Y. L., Huang, C. Y., Tsai, T. L., Chen, H. E., & Yang, J. C. (2011). Optimal groundwater quantity management for land subsidence control. Proceedings of the IASTED International Conference on Environmental Management and Engineering, Calgary AB, Canada, 38–45.

Chang Y. L., Tsai T. L., Yang J. C., and Tung Y. K. (2007). Stochastically optimal groundwater management considering land subsidence. Journal of Water Resources Planning and Management, 133(6), 486–498.

Cheng A. H. D. (2000). Multilayered aquifer systems: fundamentals and applications. Marcel Dekker, Inc.

Conagua. (2022). Comisión Nacional del Agua. Sistema Nacional de Información del Agua (SINA). http://sina.conagua.gob.mx/sina/index.php. México.

Conagua. (2020). Comisión Nacional del Agua. Publicación de la disponibilidad de agua subterránea en el DOF. Sistema Nacional de Información del Agua (SINA). http://sina.conagua.gob.mx/sina/index.php. México.

Darani H. R., Kohansal M., Ghorbani M. R., Saboohi M. (2017). An integrated hydro-economic modeling to evaluate marketing reform policies of agricultural products. Bulg. J. Agric. Sci., 23 (2): 189–197.

Davidsen C., Liu S., Mo X., Rosbjerg D., Bauer-Gottwein P. (2016). The cost of ending groundwater overdraft on the North China Plain. Hydrol. Earth Syst. Sci., 20, 771–785, 2016. doi:10.5194/hess-20-771-2016

Davidsen C., Liu S., Mo X., Holm P. E., Trapp S., Rosbjerg D., Bauer-Gottwein P. (2015). Hydroeconomic optimization of reservoir management under downstream water quality constraints. Journal of Hydrology 529 (2015) 1679–1689. dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2015.08.018.

Díaz-Nigenda J. J., Cruz J. M., Tafolla M. D. (2017). Dinámica del uso del agua agrícola en México: análisis 2005 – 2015. III Congreso Nacional COMEII 2017, Puebla, Pue.

Escolero-Fuentes, O. (1993). Manejo óptimo de un acuífero. Tesis de maestría. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México.

Fetter C. W. (2001). Applied hydrogeology. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey 07458.

Figueroa-Miranda S., Tuxpan-Vargas J., Ramos-Leal J. A., Hernández-Madrigal V. M., Villaseñor-Reyes C. I. (2018). Land subsidence by groundwater over-exploitation from aquifers in tectonic Valleys of Central Mexico: A review. Engineering Geology 246 (2018) 91–106. https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2018.09.023

Foster, T., Brozovic, N., Butler, A.P., (2014). Modeling irrigation behavior in groundwater systems. Water Resour. Res. 50, 6370–6389. http://dx.doi.org/ 10.1002/2014WR015620.

Garcia-Prats A., Del Campo A. D., Pulido-Velazquez M. (2016). A hydroeconomic modeling framework for optimal integrated management of forest and water, Water Resour. Res., 52, 8277–8294, doi:10.1002.

Gorelick S. M. (1983). A Review of Distributed Parameter Groundwater Management Modeling Methods. Water Resources Research, 19(2), 305-319.

Haavisto R., Santos D., Perrels A. (2019). Determining payments for watershed services by hydro-economic modeling for optimal water allocation between agricultural and municipal water use. Water Resources and Economics 26 (2019) 100127. https://doi.org/10.1016/j.wre.2018.08.003.

Harou J. J., Pulido-Velazquez M., Rosenberg D. E., Medellín-Azuara J., Lund J. R., Howitt R. E. (2009). Hydro-economic models: Concepts, design, applications, and future prospects. Journal of Hydrology 375 (2009) 627–643. doi:10.1016/j.jhydrol.2009.06.037.

Hernandez-Narvaez, M. (1987). Application of the algebraic technological function to the optimization of groundwater abstraction from an unconfined aquifer in Zacatecas, Mexico. Master of science Thesis. Department of Hydrology and Water Resources. The University of Arizona.

Herrera I. (1970). Theory of multiple leaky aquifers. Water Resources Research, 6(1), 185-193,1970.

Kahil M. T., Ward F. A., Albiac J., Eggleston J., Sanz D. (2016). Hydro-economic modeling with aquifer–river interactions to guide sustainable basin management. Journal of Hydrology 539 (2016) 510–524. dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2016.05.057

Kragt M. E. (2013). Hydro-economic modelling in an uncertain world: Integrating costs and benefits of water quality management. Water Resources and Economics 4 (2013) 1-21. http://dx.doi.org/10.1016/j.wre.2013.11.001.

Lezama-Campos, J. L. (2016). Contribución a la modelación del hundimiento de la Ciudad de México. Tesis de maestría. Posgrado en Ciencias de la Tierra. Universidad Nacional Autónoma de México.

Maddock T, III. (1972). Algebraic Technologic Function from a Simulation Model. Water Resources Research, 8(1) 129-134.

Maneta M. P., Torres M. O., Wallender W. W., Vosti S., Howitt R., Rodrigues L., Bassoi L. H., Panday S. (2009), A spatially distributed hydroeconomic model to assess the effects of drought on land use, farm profits, and agricultural employment, Water Resour. Res., 45, W11412, doi:10.1029/2008WR007534.

Medellín-Azuara J., MacEwan D., Howitt R. E., Koruakos G., Dogrul E. C., Brush C. F., Kadir T. N., Harter T., Melton F., Lund J R. (2015). Hydro-economic analysis of groundwater pumping for irrigated agriculture in California's Central Valley, USA. Hydrogeology Journal (2015) 23:1205–1216. DOI 10.1007/s10040-015-1283-9.

Medellín-Azuara J., Harou J. J., Howitt R. E. (2010). Estimating economic value of agricultural water under changing conditions and the effects of spatial aggregation. Science of the Total Environment 408 (2010) 5639-5648. doi:10.1016/j.scitotenv.2009.08.013

Medellín-Azuara J., Mendoza-Espinosa L. G., Lund J. R., Harou J. J., Howitt R. E. (2009). Virtues of simple hydro-economic optimization: Baja California, Mexico. Journal of Environmental Management 90 (2009) 3470–3478. doi:10.1016/j.jenvman.2009.05.032.

Peralta R. C. y Kalwij I. M. (2012). Groundwater Optimization Handbook: flow, contaminant transport and conjunctive management. IWA Publishing.

Psilovikos A. Response Matrix Minimization Used in Groundwater Management with Mathematical Programming: A Case Study in a Transboundary Aquifer in Northern Greece. Water Resources Management (2006) 20: 277–290. DOI: 10.1007/s11269-006-0324-5.

Pulido-Velazquez M. (2010). General hydro-economic modelling blueprint. GENESIS groundwater and dependent ecosystems.

Rupérez-Moreno C., Senent-Aparicio J., Martinez-Vicente D., García-Aróstegui J. L., Calvo-Rubio F. C., Pérez-Sánchez J. (2017). Sustainability of irrigated agricultura with overexploited aquifers: The case of Segura basin (SE, Spain). Agricultural Water Management 182 (2017) 67–76. dx.doi.org/10.1016/j.agwat.2016.12.008

Steinbrügge G., Muñoz J. F. y Fernández B. (2005). Análisis probabilístico y optimización de los recursos de agua subterránea: el casso del acuífero Maipo-Mapocho, Chile. Ingeniería Hidraúlica en México. Vol. XX, no. 3, 85-97, julio-septiembre.

Sun N. Z. (1996). Mathematical Modeling of Groundwater Pollution. Springer Science+Business Media New York.

Ward F. A., Pulido-Velazquez M. (2012). Economic Costs of Sustaining Water Supplies: Findings from the Rio Grande. Water Resources Management. 26(10):2883-2909. doi:10.1007/s11269-012-0055-8.

Zhao Q., Su X., Kang B., Zhang Y., Wu X., Liu M. A. (2017). Hydrogeochemistry and multi-isotope (Sr, O, H, and C) study of groundwater salinity origin and hydrogeochemical processes in the shallow confined aquifer of northern Yangtze River downstream coastal plain, China, Appl. Geochem. 86 (2017) 49–58.

3. METODOLOGÍA PARA INCLUIR EL EFECTO TRANSITORIO EN ACUITARDOS EN UN MODELO DE GESTIÓN DE AGUA SUBTERRÁNEA

Methodology to include the transient effect on aquitards in a groundwater management model[4]

Juan José Díaz-Nigenda[1], Eric Morales-Casique[2*], Mauricio Carrillo-Garcia[1], Mario Alberto Vázquez-Peña[1]

[1] Posgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua. Departamento de Irrigación. Universidad Autónoma Chapingo. C.P. 56230 Chapingo, Estado de México, México.

[2] Posgrado en Ciencias de la Tierra. Instituto de Geología. Universidad Nacional Autónoma de México. C.P. 04510 Ciudad de México, México.

* Autor de correspondencia: ericmc@geologia.unam.mx

3.1. Resumen

La sobreexplotación del agua subterránea ocasiona hundimientos de la tierra y un agotamiento gradual del almacenamiento de agua subterránea, entre otros efectos, por lo que la gestión de un sistema de aguas subterráneas apoya la toma de decisiones mediante herramientas, como los modelos de gestión del agua subterránea, que proporcionan información sobre la respuesta del sistema a las alternativas planteadas. En esta investigación, se realiza una propuesta metodológica para identificar e incluir el efecto transitorio en el almacenamiento de un acuitardo en un modelo de gestión del agua subterránea y evaluar el hundimiento inducido por el funcionamiento óptimo de un sistema multi-acuífero; se logró maximizar el caudal de extracción de los pozos de bombeo, y mediante el método de la matriz de coeficientes de respuesta, se determinaron los abatimientos, que no deben exceder de 15 metros, en los distintos puntos de control. Este abatimiento se consideró como perturbación inicial en la interfase acuífero-acuitardo para realizar un análisis transitorio y determinar el efecto en el almacenamiento del acuitardo. Esta propuesta analiza un tiempo adimensional y aplica una solución analítica para determinar el abatimiento a diferentes profundidades del acuitardo; al comparar los resultados con los que arroja un modelo de simulación numérica desarrollado en Modflow, se observa que, entre más cercano al origen de la perturbación, las diferencias son más notables (mayores a 1.5 metros). Se determinó que el hundimiento en el acuitardo es del

[4] Tesis de Doctorado en Ingeniería. Posgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua. Universidad Autónoma Chapingo
Autor: Juan José Díaz Nigenda.
Director: Ph. D. Mauricio Carrillo García

orden de 7 centímetros en los 3 años de análisis. Las posibilidades de aplicación en los acuíferos de México son muy grandes, y más aún donde la explotación del agua subterránea se realiza sin ninguna restricción en el uso del agua y en zonas de escasez, donde su disponibilidad se encuentra ya condicionada por los altos niveles de sobreexplotación.

Palabras clave: modelo de gestión de agua subterránea; método de la matriz de coeficientes de respuesta; optimización; efecto transitorio, subsidencia.

3.2. Abstract

The overexploitation of groundwater causes land subsidence and a gradual depletion of groundwater storage, among other effects, so the management of a groundwater system supports decision-making through tools such as groundwater management models, which provide information on the response of the system to the proposed alternatives. In this research, a methodological proposal is made to identify and include the transient effect of an aquitard storage in a groundwater management model and to evaluate subsidence induced by the optimal functioning of a multi-aquifer system; It was possible to maximize the extraction flow of the pumping wells, and by means of the response coefficient matrix method, the drawdowns were determined, which should not exceed 15 meters, at the different control points. This drawdown was considered as an initial disturbance in the aquifer-aquitard interface to perform a transient analysis and determine the effect on aquitard storage. This proposal analyzes a dimensionless time and applies an analytical solution to determine the drawdown at different depths of the aquitard; when comparing the results with those produced by a numerical simulation model developed in Modflow, it is observed that, the closer to the origin of the disturbance, the differences are more notable (greater than 1.5 meters). It was determined that the subsidence land in the aquitard is of the order of 7 centimeters in the 3 years of analysis. The possibilities of application in the aquifers of Mexico are very great, and even more so where the exploitation of groundwater is carried out without any restriction in the use of water and in areas of scarcity, where its availability is already conditioned by the high levels of overexploitation.

Keywords: groundwater management model; response coefficient matrix method; optimization; transient effect; subsidence.

3.3. Introducción

El agua subterránea es un recurso finito y, en muchas partes del mundo, se está convirtiendo en un recurso escaso (Bagheri, et al., 2019). En muchas regiones, el abastecimiento de agua para usos industriales, domésticos y agrícolas dependen de las aguas subterráneas (Sun N. Z., 1996) y es la principal fuente de suministro de agua y tendrá gran importancia en cualquier tipo de desarrollo (Zhao, 2017).

La demanda creciente de agua para los usos agrícola, industrial y urbano compiten por el agua subterránea. En muchos lugares la extracción de agua subterránea ha superado el volumen anual que se recarga, provocando abatimiento en el nivel freático; cuando esta situación se agudiza por largos periodos de tiempo, esto puede aumentar los costos de bombeo y reducir el caudal de los pozos (Medellín-Azuara, et al., 2015; Ward, et al., 2012). La alta demanda de agua subterránea que conduce a la sobreexplotación frecuentemente se relaciona con el desarrollo agrícola y la producción de exportación, provocando la disminución del nivel del agua, el deterioro de la calidad del agua y el daño ambiental reflejado entre otros efectos en la afectación de humedales y zonas riparias, así como en la reducción de flujo base (Rupérez-Moreno, et al., 2017). Los desequilibrios del agua subterránea son un problema ambiental, social y económico en muchas cuencas hidrográficas, incluidas las de climas templados (Allain, et al., 2018).

La sobreexplotación del agua subterránea ocasiona también subsidencia (hundimiento del terreno), generando múltiples efectos adversos, desde cuantiosos daños a la infraestructura hasta un agotamiento gradual de la capacidad de almacenamiento del sistema hidrogeológico (Galloway y Burbey, 2011; Bagheri, et al., 2019). Cada uno de estos procesos ocurre de manera gradual dependiendo de las características del sistema hidrogeológico; las escalas de tiempo involucradas en la respuesta del sistema ante las perturbaciones antropogénicas pueden ser muy grandes y diversas (Rousseau-Gueutin et al., 2013; Currell et al., 2016) y el tiempo para que un acuitardo alcance el equilibrio ante una perturbación puede tomar cientos de años (Rudolph and Frind, 1991; Zapata-Norberto et al. 2018).

La gestión de un sistema de aguas subterráneas apoya la toma de decisiones mediante herramientas, como los modelos de gestión del agua subterránea, que proporcionan información sobre la respuesta del sistema a las alternativas planteadas (Bear & Verruijt, 1998). Gorelick (1983) agrupa los modelos de gestión de agua subterránea en dos categorías: modelos en los que las decisiones de gestión involucran a la hidráulica de las aguas subterráneas (gestión del bombeo y la recarga de aguas subterráneas) y modelos que evalúan políticas de gestión, así como la economía de la asignación de agua (caracterizados por múltiples optimizaciones, una para cada subárea en una región, y tienen un fuerte componente de gestión económica). En ambas categorías, el comportamiento del sistema hidrogeológico debe ser representado en el modelo, típicamente mediante un código de simulación que resuelve la ecuación de flujo de agua subterránea. Este código de simulación puede estar basado en el método de la matriz de coeficientes de respuesta que se utiliza para convertir linealmente el bombeo en cambios de presión en el sistema; los coeficientes de respuesta se desarrollan usando una solución analítica a la ecuación de flujo (Maddock, 1972; Chang et al., 2011, 2007; Psilovikos, 2006; Steinbrügge, 2005) o se calculan a través de modelos de simulación numérica (Hernandez-Narvaez, 1987) y representan el abatimiento provocado por el bombeo de magnitud unitaria en un punto del acuífero. El método de la matriz de coeficientes de respuesta admite la superposición espacial para análisis en estado permanente o superposición espacial combinada con la superposición temporal para el análisis en estado transitorio (Psilovikos, 2006; Gorelick, 1983). Los modelos de gestión pueden plantearse para analizar múltiples funciones objetivo, algunas que minimicen costos (por ejemplo, costos de extracción), y otras que maximicen algún beneficio (por ejemplo, el volumen extraído de agua subterránea). El modelo de optimización puede ser resuelto a través de los métodos de Programación Lineal, Programación Entera, Programación Cuadrática o Programación No Lineal (Psilovikos, 2006).

La mayoría de los modelos con enfoque hidráulico proponen restricciones de tipo volumétrico, y pocos restringen el abatimiento, determinado a partir de la matriz de coeficientes de respuesta. Chang et al (2011 y 2007) aplicaron el método de la matriz de coeficientes de respuesta en un modelo de gestión para evaluar un sistema multi-acuífero afectado por subsidencia, y utilizaron dos restricciones, una en función del abatimiento y otra en función del hundimiento. En ambos trabajos despreciaron el efecto transitorio en el acuitardo, es decir, supusieron que el tiempo requerido para que una perturbación (abatimiento) se transmita a todo el espesor del acuitardo, es mucho menor al paso de tiempo empleado en el modelo de optimización. Sin embargo, esto no es aplicable en sistemas hidrogeológicos que incluyen acuitardos altamente compresibles como los que se encuentran en la Ciudad de México, en los que el tiempo de respuesta del acuitardo puede ser de cientos de años (Rudolph and Frind, 1991; Ortega-Guerrero et al., 1999; Zapata-Norberto et al., 2018).

En esta investigación, se realiza una propuesta metodológica para identificar el efecto transitorio en un acuitardo e incluirlo en un modelo de gestión de agua subterránea para un sistema multi-acuífero, y que considere el hundimiento del terreno inducido por el bombeo. Se adopta el método de la matriz de respuesta para representar el funcionamiento del sistema hidrogeológico con el fin de que el modelo sea computacionalmente sencillo y rápido de ejecutar.

3.4. Materiales y métodos

Esta investigación tomó como referencia un sistema multi-acuífero hipotético integrado por un acuífero confinado inferior y un acuitardo, el cual considera tres zonas (I, II y III) homogéneas e isotrópicas; se consideraron 3 pozos de extracción (A, B, C) y 8 pozos de observación (a, b, c, d, e, f, g y h), tal como se muestra en la Figura 7; el dominio del sistema fue discretizado con una malla no homogénea alrededor de los pozos de bombeo; en el Cuadro 5 se concentran los valores de los parámetros hidrogeológicos. Para evaluar la respuesta del sistema, se consideraron intervalos de tiempo de 1 año cada uno; para el acuitardo, se tomó un espesor, b', de 40 m, una conductividad hidráulica, K', de $1x10^{-8}\ m/s$, y dos casos para el valor del coeficiente de almacenamiento específico, $Ss' = 0.00001\ m^{-1}$ y $Ss' = 0.02\ m^{-1}$.

Cuadro 5. Valores de los parámetros hidrogeológicos del acuífero (adaptado de Chang et al., 2011, 2007).

Parámetro hidrogeológico	Zona I	Zona II	Zona III
K (m/s)	0.00005	0.0002	0.0005
Ss (m^{-1})	0.0000053	0.000007	0.000014
b (m)	80	80	80

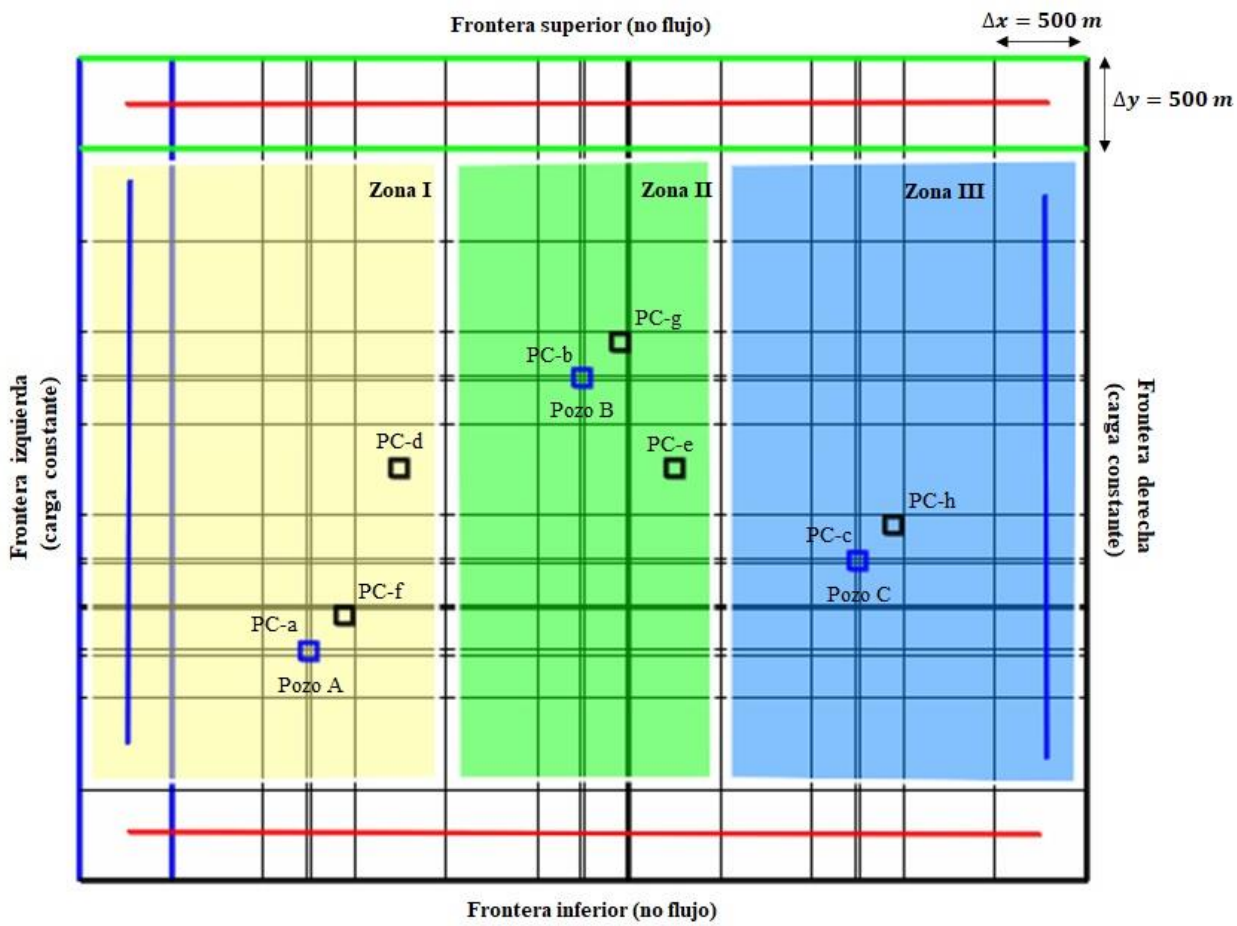


Figura 7. Acuífero hipotético considerado en la investigación (adaptado de Chang et al., 2011, 2007).

3.4.1. Determinación de los coeficientes de respuesta (efecto caudal unitario)

Con los datos iniciales, y con un modelo de simulación numérica desarrollado en Modflow, se determinaron para el acuífero los coeficientes de respuesta [$\alpha_{(m,j,k)}$], que representan el abatimiento del *m-ésimo* punto de control debido a un bombeo de un caudal unitario del *j-ésimo* pozo durante el *k-ésimo* periodo de tiempo, [$L^{-2}T^{1}$]. Esto permitió manejar las zonas de heterogeneidad y la interacción entre las fronteras hidráulicas con los pozos de extracción, situación que no se logra con las soluciones analíticas.

Para determinar los $\alpha_{(m,j,k)}$, se siguió el procedimiento implementado por Hernandez-Narvaez (1987), el cual consistió en asignar un bombeo unitario al primer pozo durante el primer periodo de tiempo y cero unidades para el resto de los periodos de tiempo, repitiéndose este procedimiento para el resto de los pozos.

A partir de estos coeficientes, se plantea una función de respuesta que relaciona linealmente el caudal óptimo de bombeo con el abatimiento en el acuífero (ecuación 65).

3.4.2. Determinación de los caudales óptimos

Una vez calculados los $\alpha_{(m,j,k)}$, se aplicó un algoritmo de optimización para determinar los caudales óptimos de operación de los pozos de bombeo en el acuífero. La función objetivo planteada (ecuación 64) permitió maximizar el caudal de bombeo en el sistema sujeta a restricciones de abatimiento, para posteriormente evaluar el hundimiento del terreno.

$$Z = max \left\{ \sum_{j=1}^{N_{pozo}} \sum_{k=1}^{N_{tiempo}} Q_{(j,k)} \right\} \tag{64}$$

Donde, N_{pozo} es el número de pozos de bombeo; N_{tiempo} es el número de intervalos de tiempo; $Q_{(j,k)}$ es el bombeo del *j-ésimo* pozo durante el *k-ésimo* intervalo de tiempo [L^3T^{-1}]; Z es el máximo caudal de bombeo que se puede extraer de los N_{pozo} del sistema multi-acuífero en N_{tiempo} intervalos de tiempo.

Se utilizó el método Linear Programing (LP) implementado a través de un algoritmo desarrollado en Python.

3.4.3. Determinación de la restricción de abatimiento

Con la ecuación (65), se determinó el abatimiento, $s_{(m)}$, en el *m-ésimo* punto de control (pozo de observación) dentro del acuífero:

$$s_{(m)} = \sum_{k=1}^{N_{tiempo}} \sum_{j=1}^{N_{pozo}} \left(\alpha_{[m,j,k]} Q_{[j,1]} + \sum_{\substack{p=1 \\ p<k}}^{k-1} \alpha_{[m,j,(k-p)]} \Delta Q_{[j,(p+1)]} \right) \tag{65}$$

Donde, $s_{(m,k)}$ es el abatimiento en el *m-ésimo* punto de control en el *k-ésimo* periodo de tiempo, [L]; $Q_{(j,k)}$ es el bombeo del *j-ésimo* pozo durante el *k-ésimo* periodo de tiempo [L^3T^{-1}]; $\Delta Q_{(j,k)}$ es el incremento en el caudal de bombeo del *j-ésimo* pozo observado en el *k-ésimo* periodo de tiempo [L^3T^{-1}]; y, $\alpha_{(m,j,k)}$ es el coeficiente de respuesta que representa el abatimiento del *m-ésimo* punto de control debido a un bombeo de un caudal unitario del *j-ésimo* pozo durante el *k-ésimo* periodo de tiempo, [$L^{-2}T^{1}$].

Este abatimiento calculado con los caudales óptimos fue considerado como la perturbación inicial para determinar el efecto transitorio dentro del acuitardo.

Analizando para el primer punto de control ($m = 1$), con las ecuaciones 66 – 69 se calculó el abatimiento que se provoca en cada uno de los *k-ésimos* intervalos de tiempo:

$$s_{(m,k)} = \sum_{j=1}^{N_{pozo}} \left(\alpha_{[m,j,k]} Q_{[j,1]} + \sum_{\substack{p=1 \\ p<k}}^{k-1} \alpha_{[m,j,(k-p)]} \Delta Q_{[j,(p+1)]} \right) \tag{66}$$

De esta manera:

- Para $k = 1$:

$$s_{(m,1)} = \sum_{j=1}^{N_{pozo}} \left(\alpha_{[m,j,1]} Q_{[j,1]}\right) \tag{67}$$

$$s_{(1,1)} = \alpha_{(1,1,1)} Q_{(1,1)} + \alpha_{(1,2,1)} Q_{(2,1)} + \alpha_{(1,3,1)} Q_{(3,1)}$$

- Para $k = 2$:

$$s_{(m,2)} = \sum_{j=1}^{N_{pozo}} \left(\alpha_{[m,j,2]} Q_{[j,1]} + \alpha_{[m,j,1]} \Delta Q_{[j,2]}\right) \tag{68}$$

$$s_{(1,2)} = \alpha_{(1,1,2)} Q_{(1,1)} + \alpha_{(1,2,2)} Q_{(2,1)} + \alpha_{(1,3,2)} Q_{(3,1)} + \alpha_{(1,1,1)} \Delta Q_{(1,2)} + \alpha_{(1,2,1)} \Delta Q_{(2,2)} + \alpha_{(1,3,1)} \Delta Q_{(3,2)}$$

- Para $k = 3$:

$$s_{(m,3)} = \sum_{j=1}^{N_{pozo}} \left(\alpha_{[m,j,3]} Q_{[j,1]} + \alpha_{[m,j,2]} \Delta Q_{[j,2]} + \alpha_{[m,j,1]} \Delta Q_{[j,3]}\right) \tag{69}$$

$$s_{(1,3)} = \alpha_{(1,1,3)} Q_{(1,1)} + \alpha_{(1,2,3)} Q_{(2,1)} + \alpha_{(1,3,3)} Q_{(3,1)} + \alpha_{(1,1,2)} \Delta Q_{(1,2)} + \alpha_{(1,2,2)} \Delta Q_{(2,2)} + \alpha_{(1,3,2)} \Delta Q_{(3,2)} + \alpha_{(1,1,1)} \Delta Q_{(1,3)} + \alpha_{(1,2,1)} \Delta Q_{(2,3)} + \alpha_{(1,3,1)} \Delta Q_{(3,3)}$$

Este procedimiento se aplicó en cada uno de los puntos de control definidos en el análisis.

3.4.4. Evaluación del abatimiento en el acuitardo

Un tiempo adimensional, t^*, puede ser definido por (Bredehoeft y Pinder, 1970):

$$t^* = \frac{K' t}{{S_s}' {b'}^2} \tag{70}$$

donde t es tiempo [T], b' es el espesor del acuitardo [L], K' es la conductividad hidráulica del acuitardo [LT^{-1}], y Ss' es el almacenamiento específico del acuitardo [L^{-1}].

Estos autores utilizaron una solución analítica (ecuación 71) que describe la respuesta de un acuitardo ante un abatimiento unitario instantáneo; para $t^* > 0.5$ el flujo a través del acuitardo alcanza el estado estacionario, mientras que para $t^* < 0.1$ el efecto transitorio es significativo:

$$s'_{(m,k)} = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ erf\left[\frac{(2n+1) + z/b'}{(4t^*)^{1/2}}\right] - erf\left[\frac{(2n+1) - z/b'}{(4t^*)^{1/2}}\right] \right\} \tag{71}$$

Donde, S_0 es el cambio en el abatimiento inicial en el límite entre el acuífero y el acuitardo producto del bombeo, en cada intervalo de tiempo; z es la posición vertical dentro del acuitardo donde se calcula el valor del abatimiento; t^* es el tiempo adimensional.

Para extender la metodología propuesta por Chang et al. (2011 y 2007) y poder aplicarla en acuitardos altamente compresibles, en este trabajo se consideró la propagación del abatimiento a través del acuitardo, mediante el Teorema de Duhamel:

$$s'_{(z,t)} = \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(z, t-\tau)\, u(z,\tau) d\tau \tag{72}$$

Donde $s'_{(z,t)}$ es el abatimiento en el acuitardo, s_1 es el abatimiento en la interfaz acuífero-acuitardo y $u(z,\tau)$ es la función de memoria que explica la historia del efecto del abatimiento en la capa del acuitardo que se analiza.

Por otro lado, para determinar el flujo de agua, q', hacia el acuífero producido por un cambio en el abatimiento inicial en la interfaz acuitardo-acuífero, se aplicó la ecuación (73):

$$q' = \frac{K'S_0}{b'(\pi t^*)^{1/2}}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} exp\left[-\frac{n^2}{t^*}\right]\right\} \quad (73)$$

3.4.5. Determinación de los hundimientos

Suponiendo que el abatimiento es uniforme en cada segmento en los que se dividió el acuitardo, a partir de la ecuación 74, se determinaron los hundimientos acumulados en el *m-ésimo* punto de control a medida que la perturbación se va propagando a través del acuitardo:

$$\delta_{m,k} = \sum_{p=1}^{k} {}^{b}C_p s_{m,k-p+1} \quad (74)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \mathrm{k} \leq N_{segmentos}$$

Considerando un abatimiento unitario uniforme en toda la columna b', entonces C representa el hundimiento en el *m-ésimo* punto de control:

$$C = \frac{\rho_w g}{2\mu + \gamma} b' \quad (75)$$

A partir del valor de z del apartado 3.4.4, se dividió b' en $N_{segmentos}$ de igual longitud $\Delta b'$, entonces la ecuación 75, se replanteó a:

$${}^{b}C = \frac{\rho_w g}{2\mu + \gamma} \Delta b' \quad (76)$$

Si ${}^{b}C_p = {}^{b}C$ es constante en cada partición del acuitardo, entonces la ecuación 74 quedó de la siguiente manera:

$$\delta_{m,k} = {}^{b}C \sum_{p=1}^{k} s_{m,k-p+1} \quad (77)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \mathrm{k} \leq N_{segmentos}$$

A partir de esta ecuación 77, se calcularon los hundimientos para cada uno de los puntos de control (pozos de observación); donde, $\delta_{(m,k)}$ es el hundimiento calculado en el *m-ésimo* punto de control durante el *k-ésimo* periodo de tiempo; ${}^{b}C$ es el coeficiente que representa el hundimiento en el *m-ésimo* punto de control considerando un abatimiento unitario uniforme en el segmento $\Delta b'$; ρ_w, $g, \Delta b'$ son la densidad del agua, la aceleración de la gravedad, la longitud del segmento en los que se divide el acuitardo en el *m-ésimo* punto de control, respectivamente; μ y λ son las constantes de Lame; para el caso de $\Delta b'$ se tomaron los valores analizados y determinados en el apartado 3.4.4.

De esta manera, analizando para el primer punto de control y para cada periodo de tiempo:

$$\delta_{1,k} = \left(\frac{\rho_w g}{2\mu + \gamma}\Delta b'\right)\sum_{p=1}^{3} s_{m,k-p+1}$$

$$\delta_{1,1} = \left(\frac{\rho_w g}{2\mu + \gamma}\Delta b'\right)\left(s_{1,1}\right)$$

$$\delta_{1,2} = \left(\frac{\rho_w g}{2\mu + \gamma}\Delta b'\right)\left(s_{1,2} + s_{1,1}\right) \tag{78}$$

$$\delta_{1,3} = \left(\frac{\rho_w g}{2\mu + \gamma}\Delta b'\right)\left(s_{1,3} + s_{1,2} + s_{1,1}\right)$$

Estas ecuaciones 78 se aplicaron para los abatimientos determinados en cada uno de N_{tiempo} periodos de tiempo.

3.4.7. Esquema conceptual.

La Figura 8 muestra el diagrama de flujo que se seguirá para el modelo:

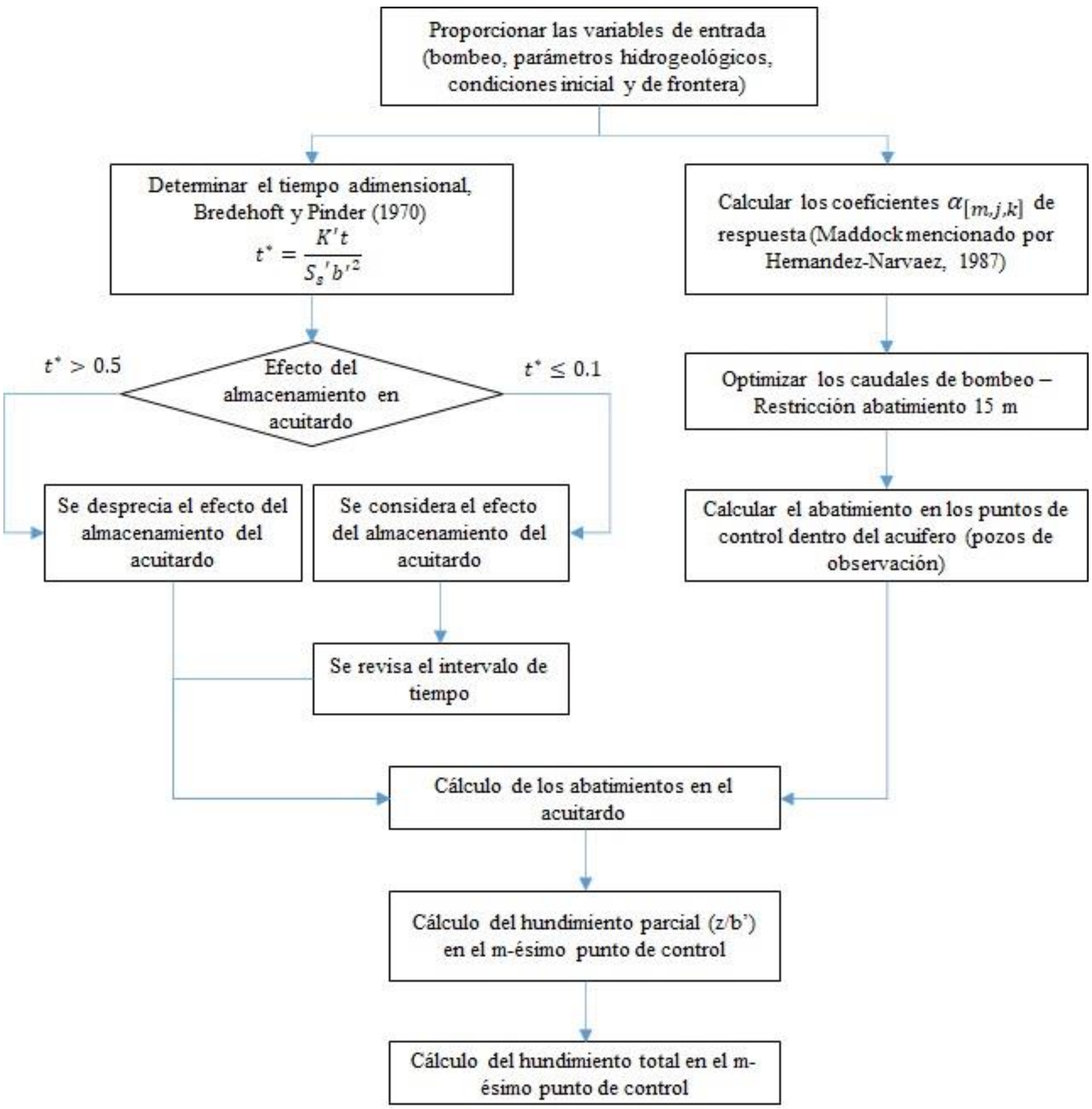


Figura 8. Diagrama de flujo para la aplicación de la metodología

3.5. Resultados y discusión

A partir del algoritmo de optimización planteado, y considerando que los abatimientos no deben ser mayores a los 15 metros en cada uno de los pozos de bombeo (A, B, C), se determinaron los caudales óptimos de extracción; en el Cuadro 6 se muestran los valores determinados para el sistema considerando que el coeficiente de almacenamiento en el acuitardo, S_s', es de 0.02; puede apreciarse que, con esta propuesta de manejo del sistema, los caudales tienden a disminuir conforme se incrementa el tiempo para mantener el efecto causado en el primer intervalo de tiempo, y se estimó un caudal óptimo de extracción de 1.118 m^3/s.

Cuadro 6. Caudal óptimo de extracción en los pozos en cada uno de los periodos de tiempo considerando $S_s{}' = 0.02$ en el acuitardo (m^3/s).

Pozo de bombeo	Tiempo (años)		
	1	**2**	**3**
Pozo A	0.0305	0.0298	0.0295
Pozo B	0.0941	0.0922	0.0913
Pozo C	0.2517	0.2498	0.2489
Caudal anual total	0.3763	0.3718	0.3697

Este esquema de operación del acuífero provoca los abatimientos que se concentran en el Cuadro 7, resaltando que en los puntos de control cercanos a los pozos de bombeo los abatimientos se mantienen en los 15 metros.

Cuadro 7. Abatimientos en los puntos de control en cada uno de los periodos de tiempo (m).

Punto de control	Tiempo (años)		
	1	**2**	**3**
PC-a	15.000	15.000	15.000
PC-b	15.000	15.000	15.000
PC-c	15.000	15.000	15.000
PC-d	2.323	2.623	2.775
PC-e	2.698	2.890	2.983
PC-f	3.526	3.791	3.924
PC-g	3.913	4.120	4.221
PC-h	3.075	3.152	3.189

Estos abatimientos en el acuífero se utilizan como perturbación inicial para evaluar el efecto transitorio dentro del acuitardo, por lo que, bajo el supuesto de que el acuífero es perturbado al inicio del periodo de tiempo, se determinaron los siguientes tiempos adimensionales:

- Acuitardo con $Ss' = 0.00001\ m^{-1}$:

$$t^* = \frac{1x10^{-8} * 31536000}{0.00001 * (40)^2} = 19.71 > 0.5$$

- Acuitardo con $Ss' = 0.02\, m^{-1}$:

$$t^* = \frac{1x10^{-8} * 31536000}{0.02 * (40)^2} = 0.009855 < 0.1$$

Cuando el acuitardo tiene un $S_s{}' = 0.00001$, se obtuvo un valor de tiempo adimensional de $t^* = 19.71$, valor mucho más grande al límite donde el acuífero responde como si no hubiera almacenamiento en el acuitardo debido al flujo establecido de agua a través de él, por lo que esta condición permite una relación lineal entre el abatimiento y el caudal de extracción de los pozos.

Por el contrario, cuando $S_s{}' = 0.02$, se determinó un valor de tiempo adimensional de $t^* = 0.009855$, valor mucho más pequeño a 0.1, por lo que el efecto del almacenamiento en el acuitardo deberá ser considerado.

En la Figura 9, se muestra el comportamiento del abatimiento observado en el PC-a, a diferentes profundidades dentro del acuitardo; debido a la propuesta de operación, que el abatimiento no debe exceder a 15 metros en los pozos de bombeo, en el acuitardo con $S_s{}' = 0.00001$ el comportamiento de los abatimientos se mantiene constante debido a que el flujo de agua está establecido entre al acuitardo y el acuífero desde el primer intervalo de tiempo y durante los 3 años que comprende el horizonte de planeación, por lo que el efecto del abatimiento se propaga rápidamente dentro del acuitardo (Figura 9a). En la misma Figura 9 (b), se observa el efecto transitorio dentro del acuitardo medido en el mismo punto de control PC-a; para condiciones de $S_s{}' = 0.02$, el límite planteado en la ecuación 64 se alcanza para un tiempo de 50.7 años; en el Cuadro 8 se muestran los abatimientos determinados para ambos casos.

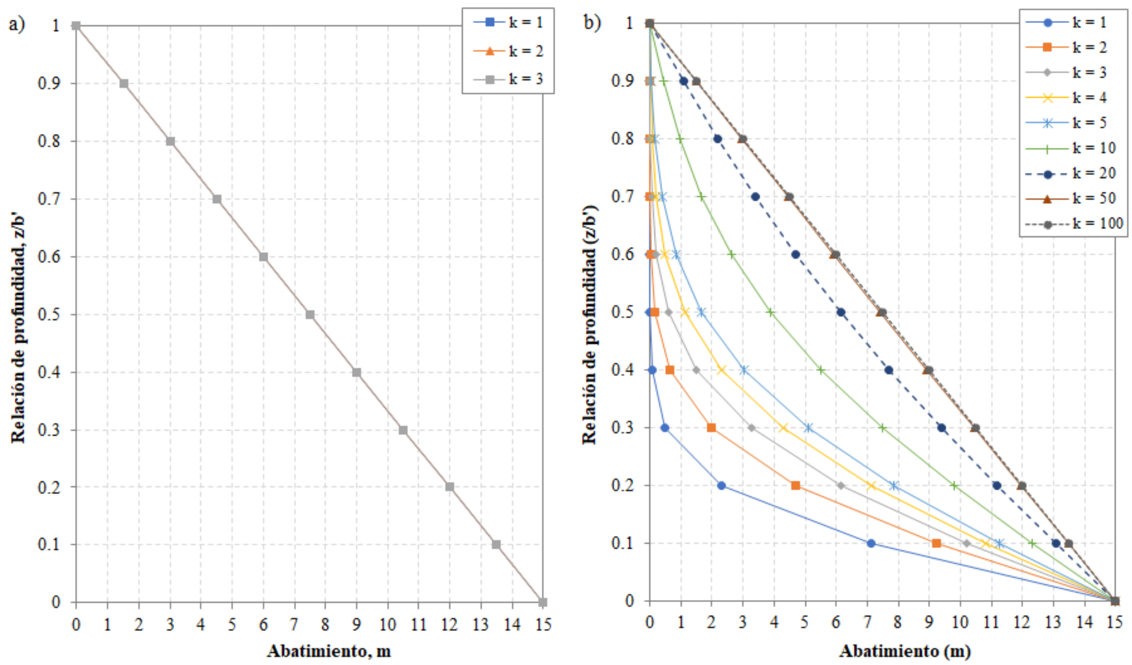


Figura 9. Efecto transitorio en el acuitardo bajo una perturbación de 15 metros en la interfaz con el acuífero, observado en el punto de control a (PC-a): a) Considerando un acuitardo con $S_s{'} = 0.00001$ (k=años), b) Considerando un acuitardo con $S_s{'} = 0.02$ (k=años)

Cuadro 8. Comportamiento de los abatimientos en los tres primeros intervalos de tiempo para los dos casos de $S_s{'}$ del acuitardo (en metros)

Relación 1 - z/b'	$S_s{'} = 0.00001$			$S_s{'} = 0.02$		
	k = 1	**k = 2**	**k = 3**	**k = 1**	**k = 2**	**k = 3**
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.9	1.5000	1.5000	1.5000	0.0000	0.0001	0.0031
0.8	3.0000	3.0000	3.0000	0.0000	0.0008	0.0150
0.7	4.5000	4.5000	4.5000	0.0000	0.0063	0.0599
0.6	6.0000	6.0000	6.0000	0.0003	0.0377	0.2041
0.5	7.5000	7.5000	7.5000	0.0055	0.1769	0.5964
0.4	9.0000	9.0000	9.0000	0.0658	0.6591	1.4997
0.3	10.5000	10.5000	10.5000	0.4891	1.9618	3.2596
0.2	12.0000	12.0000	12.0000	2.3142	4.7066	6.1620
0.1	13.5000	13.5000	13.5000	7.1443	9.2175	10.2134
0.0	15.0000	15.0000	15.0000	15.0000	15.0000	15.0000

Es conveniente resaltar que, dependiendo del valor del coeficiente de almacenamiento específico, ${S_s}'$, en el acuitardo, se tiene que revisar el valor del horizonte de planeación y poder evaluar el efecto transitorio en el mismo. Para el caso de un acuitardo con ${S_s}' = 0.00001$, el intervalo de tiempo de un año no permite identificar el efecto transitorio en él, por lo que el Δt debería ajustarse a un valor menor a 800,000 s (9.25 días) para poder evaluarlo. Por el contrario, con valores de ${S_s}' = 0.02$, el mismo intervalo de tiempo permite conocer la evolución del efecto transitorio en el acuitardo, pero no se evalúa en su totalidad por la duración del horizonte de planeación; en este caso, se tendrá que ajustar hasta alcanzar un valor de 51 años aproximadamente, tiempo al cual el efecto transitorio se estabiliza en el acuitardo.

Para comprobar estos resultados, se compararon con los determinados a partir del modelo de simulación numérica desarrollado en Modflow, por lo que en la Figura 10 se observan los valores de los abatimientos determinados con la solución analítica de Bredehoeft y Pinder (1970); es conveniente citar, que inicialmente se dividió el acuitardo en 10 estratos de 4 metros de espesor ($\Delta b'$); en el Cuadro 9 se concentran los valores de los abatimientos evaluados con estos métodos; esto puede ser una consecuencia de la interacción del flujo de agua entre el acuitardo y el acuífero, que conforme avanza el tiempo, el caudal acuitardo-acuífero tiende a estabilizarse.

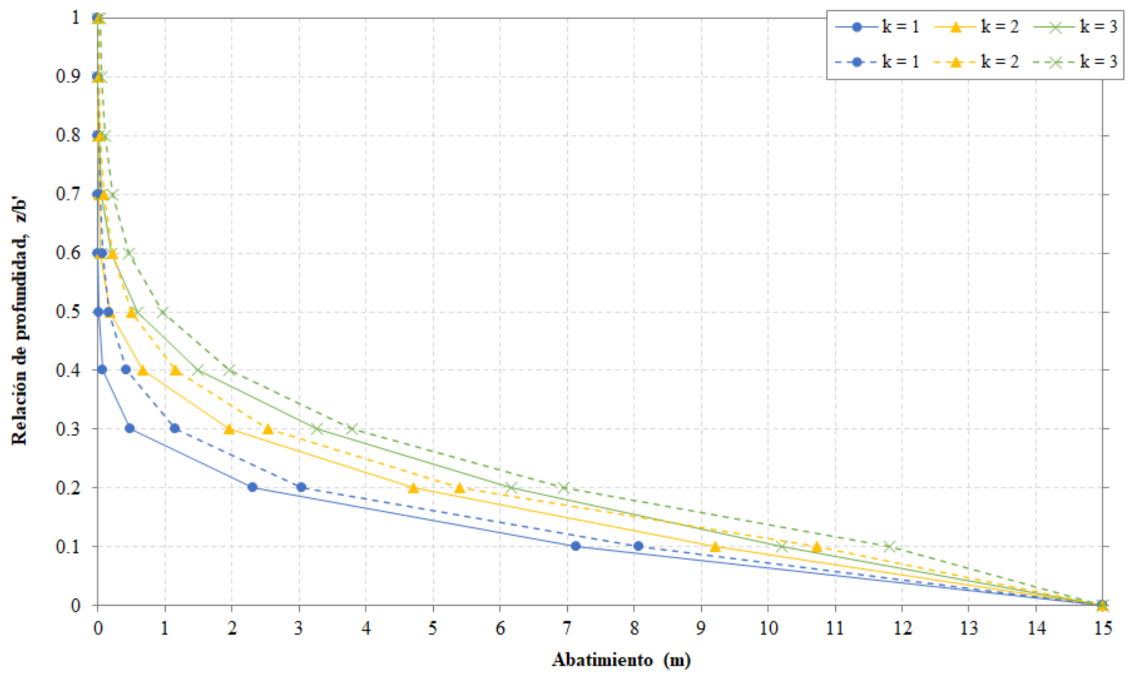


Figura 10. Relación entre los abatimientos en el acuitardo ($S_s' = 0.02$) determinados con la solución analítica de Bredehoeft y Pinder (1970) y el modelo de simulación numérica para un tiempo de simulación k = 3 años: a) Línea continua: solución analítica de Bredehoeft y Pinder (1970) y línea segmentada: modelo de simulación numérica. (k=años).

Cuadro 9. Abatimientos calculados con el modelo de simulación numérica y la solución analítica de Bredehoeft y Pinder, 1970. (en metros)

Relación 1 - z/b'	Modelo de simulación numérica			Solución analítica de Bredehoeft y Pinder (1970)		
	k = 1	k = 2	k = 3	k = 1	k = 2	k = 3
1.0	0.002	0.009	0.029	0.000	0.000	0.000
0.9	0.003	0.017	0.048	0.000	0.000	0.003
0.8	0.009	0.039	0.101	0.000	0.001	0.015
0.7	0.023	0.093	0.218	0.000	0.006	0.060
0.6	0.061	0.218	0.464	0.000	0.038	0.204
0.5	0.163	0.506	0.968	0.006	0.177	0.596
0.4	0.431	1.151	1.956	0.066	0.659	1.500
0.3	1.145	2.544	3.793	0.489	1.962	3.260
0.2	3.038	5.398	6.956	2.314	4.707	6.162
0.1	8.064	10.731	11.810	7.144	9.217	10.213
0.0	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000

En la Figura 11, se muestra el flujo de agua entre el acuitardo y el acuífero durante el tiempo de simulación, evaluado a partir de la perturbación de 15 metros en la interfase entre ellos, se aprecia como el flujo disminuye conforme el tiempo adimensional se incrementa.

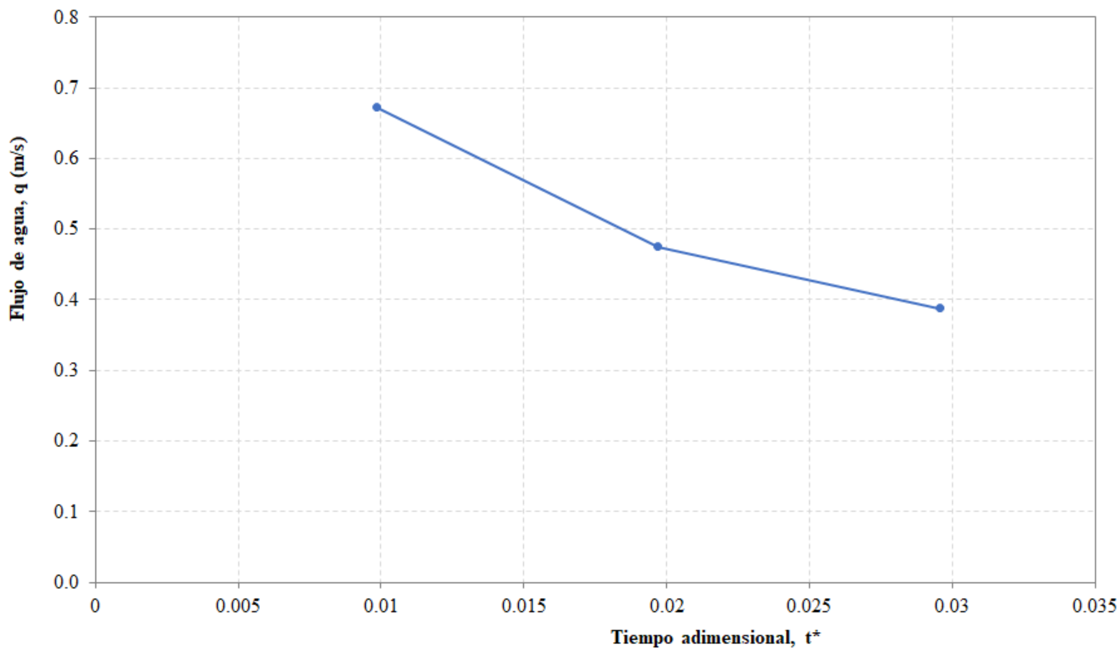


Figura 11. Comportamiento del flujo de agua entre el acuitardo y el acuífero y el tiempo adimensional para el tiempo de simulación de k = 3 años.

Una forma sintética para analizar el efecto transitorio en el acuitardo es su representación en una gráfica escalonada, determinada a partir del área bajo la curva de abatimientos (Figura 9b) para el horizonte de planeación. De esta manera, en la Figura 12, se muestran diversos escenarios creados a partir de estos valores y considerando abatimientos de 15 m, 11 m, 7 m y 15m respectivamente; a partir de estos valores, se determinó la altura equivalente que alcanzará el efecto del abatimiento dentro del acuitardo. En el Cuadro 10, se concentran las características de los escenarios de análisis de la representación escalonada.

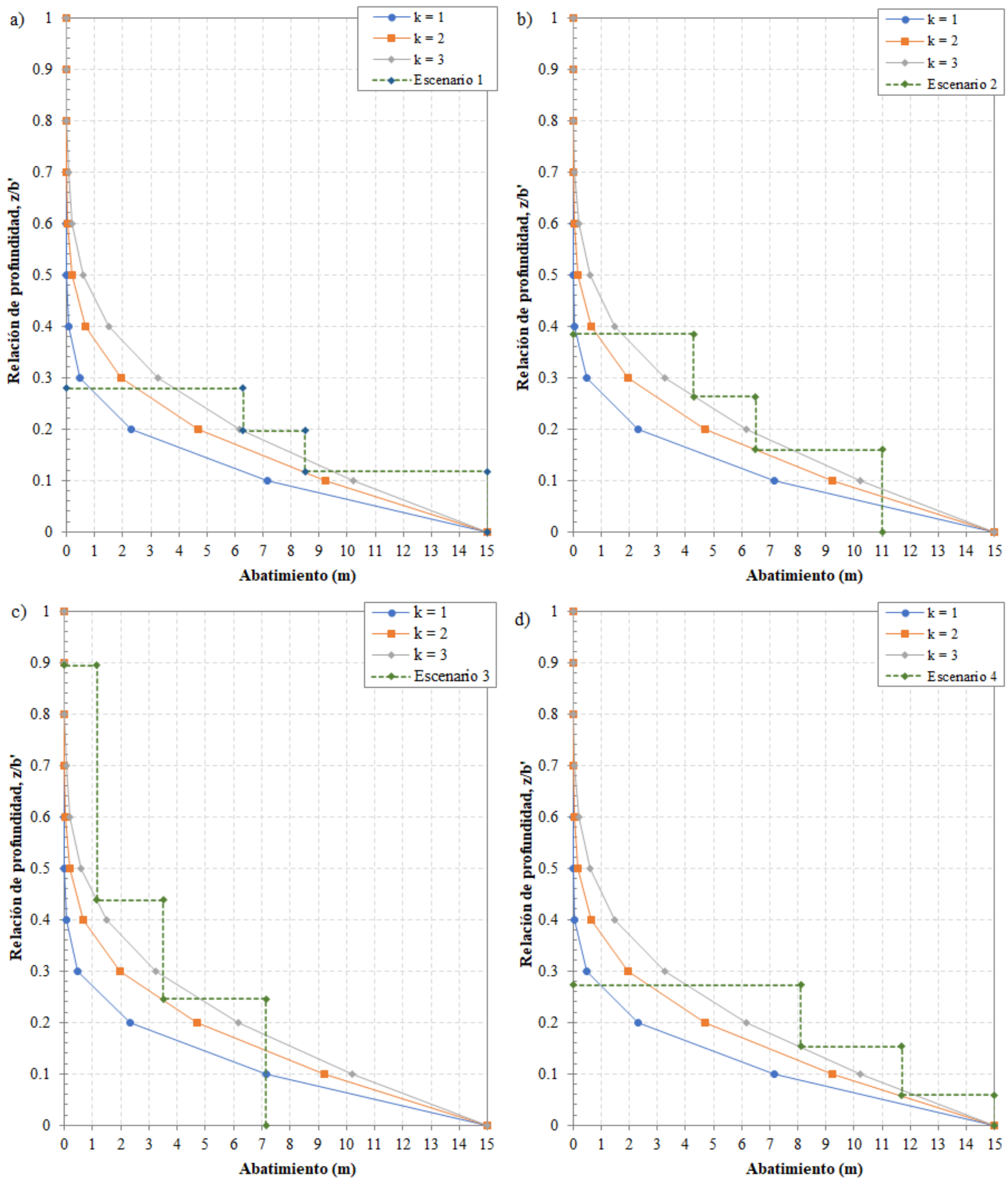


Figura 12. Escenarios para representar el efecto transitorio escalonado en el acuitardo para el tiempo de simulación de k = 3 años.

Cuadro 10. Principales variables de los escenarios de análisis de la representación escalonada del efecto transitorio en el acuitardo.

Escenario	Tiempo (años)	Área bajo la curva (m^2)	Área gráfica escalonada (m^2)	Abatimientos (m)	Altura equivalente z (m)
	1	70.077	70.077	15.0	4.67
1	2	97.067	26.991	8.5	3.18
	3	118.053	20.986	6.3	3.33
	1	70.077	70.077	11.0	6.37
2	2	97.067	26.991	6.5	4.15
	3	118.053	20.986	4.3	4.88
	1	70.077	70.077	7.14	9.81
3	2	97.067	26.991	3.5	7.71
	3	118.053	20.986	1.15	18.25
	1	70.077	35.038	15.0	2.34
4	2	97.067	44.510	11.7	3.80
	3	118.053	38.505	8.1	4.75

Analizando el planteamiento de estos escenarios, los tres primeros consideran el área total bajo la curva en el primer periodo de tiempo, y en los restantes el incremento de ésta; considerando el abatimiento inicial, se determinó la altura equivalente, la cual se extiende hasta interceptar la curva del siguiente periodo de tiempo. En el caso del escenario 4, se tomó la mitad del área bajo la curva para el primer periodo de tiempo, y el resto se incorporó en los 2 periodos de tiempo siguientes. Se resalta con este análisis el movimiento del efecto transitorio a lo largo del acuitardo, alcanzando alturas equivalentes, por encima de la interfase acuífero-acuitardo, que van de los 10 metros hasta los 36 metros. Los escenarios 2 y 4 proponen un abatimiento inicial de 15 metros, pero difieren en cómo se cubre el área bajo la curva; en estos escenarios, el efecto transitorio alcanza valores de 6.3 y 8.1 metros respectivamente, y se reflejarían a una altura equivalente de 11 metros aproximadamente en ambos casos.

En la Figura 13, se muestra una representación alterna del efecto transitorio en el acuitardo que considera el área bajo la curva de abatimientos total en cada intervalo de tiempo, partiendo de un abatimiento de 11 metros, mismo que se extiende hasta una altura equivalente de 2 metros por encima de la interfase acuífero-acuitardo; este efecto se mantiene constante a lo largo del horizonte de planeación. Con estas condiciones, se determina una altura equivalente donde el efecto es cero en el acuitardo; de esta manera, en el Cuadro 11 se muestran los valores de esta propuesta trapecial-radial. En este análisis, el efecto transitorio en el acuitardo se reflejaría hasta una altura equivalente de 20 metros aproximadamente.

Cuadro 11. Resultados de la propuesta de representación trapecial-radial del efecto transitorio en el acuitardo.

Tiempo (años)	Área bajo la curva (m^2)	Área gráfica efecto trapecial (m^2)	Abatimiento (m)	Altura equivalente (m)	
				Menor	Mayor
1	70.077	70.077	11.00	2.00	10.74
2	97.067	97.067	11.00	2.00	15.65
3	118.053	118.053	11.00	2.00	19.46

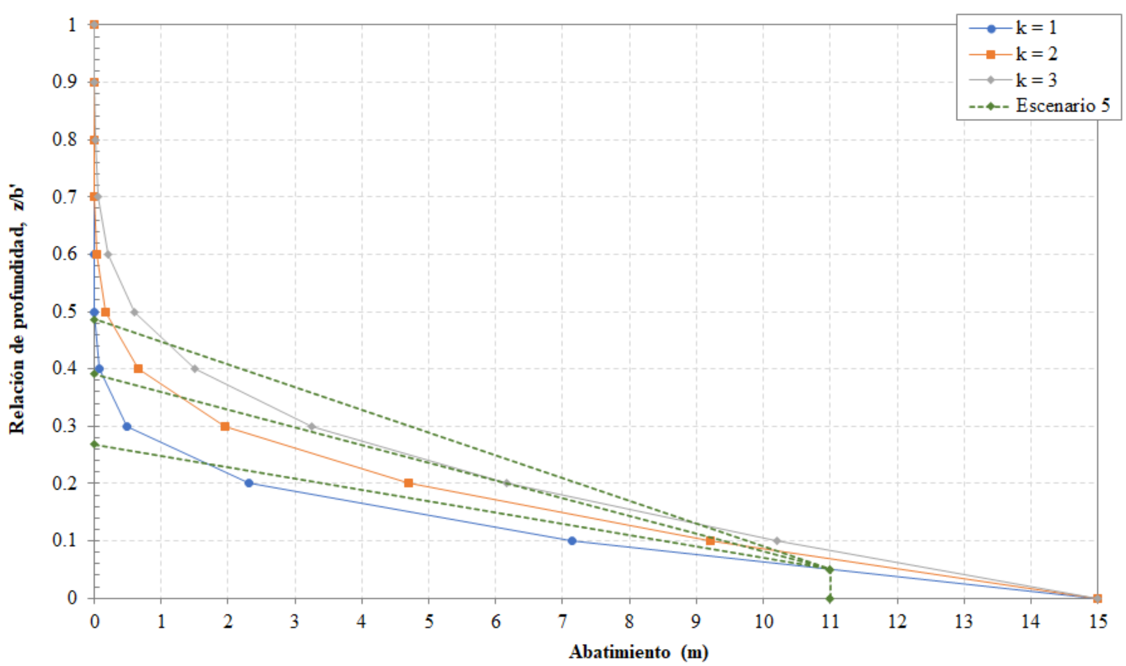


Figura 13. Representación trapecial-radial del efecto transitorio en el acuitardo.

Esta forma de operación del acuífero provoca hundimientos en el acuitardo del orden de 7 cm en los 3 años de funcionamiento del acuífero; el Cuadro 12 concentra los hundimientos parciales determinados en cada periodo de tiempo, considerando que los valores de las constantes de Lame son $\mu = 5x10^6$ y $\lambda = 5x10^6$; se resalta, para llegar a estos resultados, la utilización del método del trapecio para aproximar el área bajo la curva de abatimientos (Figura 9b).

Cuadro 12. Hundimientos parciales provocados en el punto de control PC-a, en cada periodo de tiempo por la operación propuesta del acuífero (en centímetros).

Relación	**Tiempo (años)**		
1 – z/b'	**k = 1**	**k = 2**	**k = 3**
1			
0.9	0.000	0.000	0.000
0.8	0.000	0.000	0.002
0.7	0.000	0.001	0.010
0.6	0.000	0.006	0.035
0.5	0.001	0.028	0.105
0.4	0.009	0.109	0.274
0.3	0.073	0.343	0.623
0.2	0.367	0.872	1.232
0.1	1.237	1.821	2.142
0	2.896	3.168	3.298

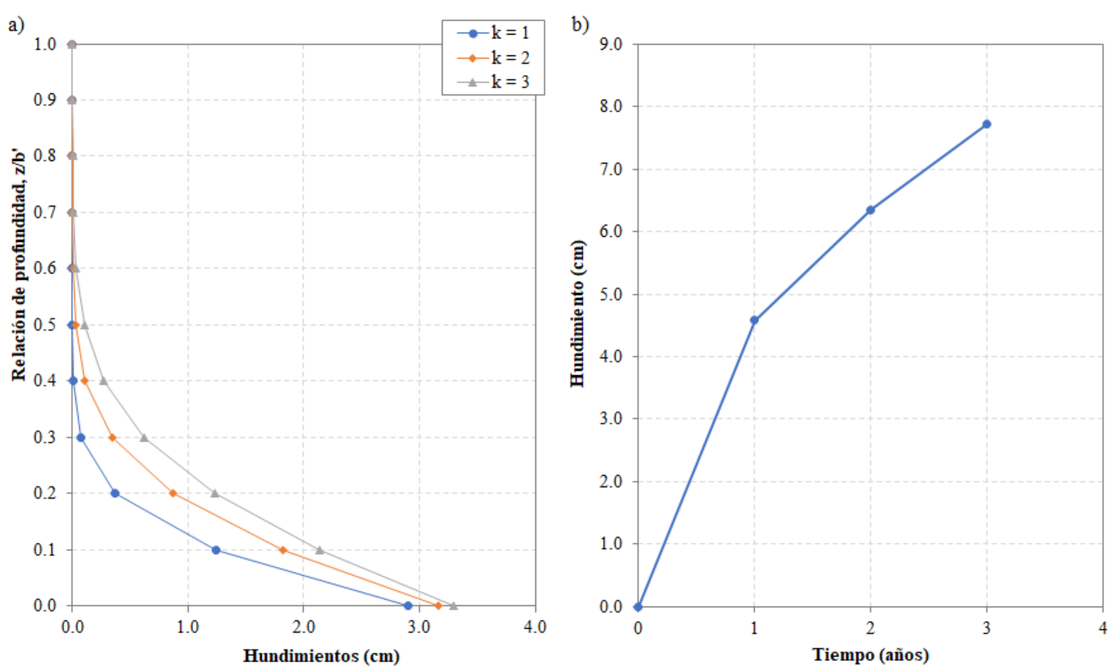


Figura 14. Análisis de los hundimientos entre el acuitardo para el horizonte de planeación (k = 3); a) hundimiento parcial por intervalo de tiempo, en centímetros; b) hundimiento total en cada uno de los intervalos de tiempo, en centímetros.

En la Figura 15 se muestra una comparación en el cálculo de los abatimientos a partir de $\Delta b'$ más finos. Se resalta la utilización del método de los trapecios para determinar el área bajo la curva.

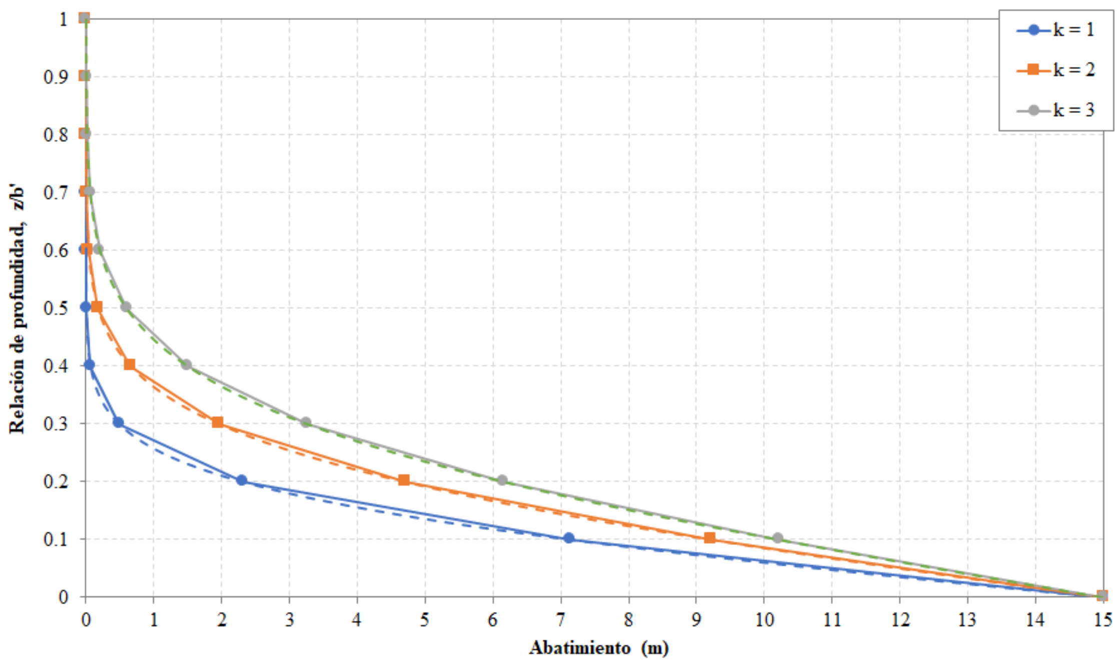


Figura 15. Comparación entre los abatimientos en el acuitardo a partir $\Delta b' = 4\ m$ (línea continua) y $\Delta b' = 0.25\ m$ (línea discontinua) para el tiempo de simulación de k = 3 años.

3.6. Conclusiones

El análisis planteado en esta investigación permitió evaluar las bondades del método de la matriz de los coeficientes de respuesta en el diseño del modelo de gestión, pero también se identificó que, para periodos de tiempo muy grandes, el método del coeficiente de respuesta se vuelve lento y de difícil manejo, esto como consecuencia del esquema de manejo propuesto.

El enfoque de Bredehoeft y Pinder (1970) permitió identificar los límites para considerar el efecto transitorio en el acuitardo a través del cálculo del tiempo adimensional, de esta manera, se verificó, a través de la Figura 9a, para el acuitardo con valor de $S_s' = 0.00001$, un flujo de agua establecido entre el acuitardo y acuífero, mismo que se comprobó a partir del tiempo adimensional t^*

mayor a 0.5. Para el caso del acuitardo con $S_s{}' = 0.02$, con tiempo adimensional t^* menor a 0.1, se realizó todo el análisis transitorio propuesto en la metodología; se resalta que el flujo establecido de agua se logra a partir del año 50 (Figura 9b).

La representación trapecial del efecto transitorio dentro del acuitardo permite observar una relación lineal entre el punto de "pivote" (lado menor) y la altura equivalente alcanzada cuando el abatimiento es cero; en este caso, habrá que tomar en cuenta que el área máxima a representar en la gráfica será la que se obtenga cuando el flujo de agua entre el acuífero-acuitardo se encuentre establecido (alrededor del año 51).

La aplicación del método de los trapecios para evaluar el área bajo la curva de abatimiento fue una buena alternativa en el cálculo de los hundimientos, misma que puede afinarse al considerar valores de $\Delta b'$ más pequeños a lo largo del tiempo.

3.7. Datos suplementarios

Este trabajo no presenta datos suplementarios.

3.8. Contribución de los autores

En este trabajo, la contribución es: (1) Conceptualización: Díaz-Nigenda J.J y Morales-Casique E.; (2) Análisis o adquisición de datos: Díaz-Nigenda J.J y Morales-Casique E.; (3) Desarrollo metodológico/técnico: Díaz-Nigenda J.J y Morales-Casique E.; (4) Redacción del manuscrito original: Díaz-Nigenda J.J, Morales-Casique E., Carrillo-García M., Vázquez-Peña M.; (5) Redacción del manuscrito corregido y editado: Díaz-Nigenda J.J, Morales-Casique E., Carrillo-García M., Vázquez-Peña M.; (6) Diseño gráfico: Díaz-Nigenda J.J.

3.9. Financiamiento

Este trabajo se realizó sin financiamiento.

3.10. Conflicto de interés

En este trabajo, no existe ningún conflicto de interés.

3.11. Referencias bibliográficas

Ahlfeld, D. P. (2004). Nonlinear response of streamflow to groundwater pumping for a hydrologic streamflow model. Advances in Water Resources. **27**, 349–360.

Allain S., Ndong G. O., Lardy R., Leenhardt D. (2018). Integrated assessment of four strategies for solving water imbalance in an agricultural landscape. Agronomy for Sustainable Development (2018) 38: 60. doi.org/10.1007/s13593-018-0529-z.

Bagheri R., Nosrati A., Jafari H., Eggenkamp H.G.M., Mozafari M. (2019). Overexploitation hazards and salinization risks in crucial declining aquifers, chemo-isotopic approaches. Journal of Hazardous Materials 369 (2019) 150–163. https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2019.02.024

Bear J. & Verruijt A. 1987. Modeling Groundwater Flow and Pollution. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Bredehoeft J. D. and Pinder G. F. (1970). Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater systems: A quasi three-dimensional model. Water Resources Research, 6(3), 1970, 883- 888.

Chang, Y. L., Huang, C. Y., Tsai, T. L., Chen, H. E., & Yang, J. C. (2011). Optimal groundwater quantity management for land subsidence control. Proceedings of the IASTED International Conference on Environmental Management and Engineering, Calgary AB, Canada, 38–45.

Chang Y. L., Tsai T. L., Yang J. C., and Tung Y. K. (2007). Stochastically optimal groundwater management considering land subsidence. Journal of Water Resources Planning and Management, 133(6), 486–498.

Currell M., Gleeson T., Dahlhaus P. (2016). A New Assessment Framework for Transience in Hydrogeological Systems. Ground Water. 2016 Jan;54(1):4-14. doi: 10.1111/gwat.12300.

Galloway D. L., Burbey T. J. (2011) Review: Regional land subsidence accompanying groundwater extraction. Hydrogeol Journal 19(8):1459–1486. https://doi.org/10.1007/s10040-011-0775-5.

Gorelick S. M. (1983). A Review of Distributed Parameter Groundwater Management Modeling Methods. Water Resources Research, 19(2), 305-319.

Hernandez-Narvaez, M. (1987). Application of the algebraic technological function to the optimization of groundwater abstraction from an unconfined aquifer in Zacatecas, Mexico. Master of science Thesis. Department of Hydrology and Water Resources. The University of Arizona.

Maddock T, III. (1972). Algebraic Technologic Function from a Simulation Model. Water Resources Research, 8(1) 129-134, Medellín-Azuara J., MacEwan D., Howitt R. E., Koruakos G., Dogrul E. C., Brush C. F., Kadir T. N., Harter T., Melton F., Lund J R. (2015). Hydro-economic analysis of groundwater pumping for irrigated agriculture in California’s Central Valley, USA. Hydrogeology Journal (2015) 23:1205–1216. DOI 10.1007/s10040-015-1283-9.

Ortega-Guerrero A., Rudolph D. L., Cherry J. A. (1999). Analysis of long-term land subsidence near Mexico City: field investigations and predictive modeling. Water Resources Research. 35(11):3327–3341. https://doi.org/10.1029/1999WR900148.

Psilovikos A. Response Matrix Minimization Used in Groundwater Management with Mathematical Programming: A Case Study in a Transboundary Aquifer in Northern Greece. Water Resources Management (2006) 20: 277–290. DOI: 10.1007/s11269-006-0324-5.

Rousseau-Gueutin P., Love A. J., Vasseur G., Robinson N. I., Simmons C. T., de Marsily G. (2013). Time to reach near-steady state in large aquifers. First published: 19 September 2013. https://doi.org/10.1002/wrcr.20534.

Rudolph D. L., Frind E. O. (1991). Hydraulic response of highly compressible aquitards during consolidation. Water Resources Research 27(1):17–30. https://doi.org/10.1029/90WR01700.

Rupérez-Moreno C., Senent-Aparicio J., Martinez-Vicente D., García-Aróstegui J. L., Calvo-Rubio F. C., Pérez-Sánchez J. (2017). Sustainability of irrigated agricultura with overexploited aquifers: The case of Segura basin (SE, Spain). Agricultural Water Management 182 (2017) 67–76. dx.doi.org/10.1016/j.agwat.2016.12.008.

Steinbrügge G., Muñoz J. F. y Fernández B. (2005). Análisis probabilístico y optimización de los recursos de agua subterránea: el casso del acuífero Maipo-Mapocho, Chile. Ingeniería Hidraúlica en México. Vol. XX, no. 3, 85-97, julio-septiembre.

Sun N. Z. (1996). Mathematical Modeling of Groundwater Pollution. Springer Science+Business Media New York.

Ward F. A., Pulido-Velazquez M. (2012). Economic Costs of Sustaining Water Supplies: Findings from the Rio Grande. Water Resources Management. 26(10):2883-2909. doi:10.1007/s11269-012-0055-8.

Zapata-Norberto B., Morales-Casique E., Herrera G. (2018). Nonlinear consolidation in randomly heterogeneous highly compressible aquitards. Hydrogeology Journal (2018) 26:755–769. https://doi.org/10.1007/s10040-017-1698-6.

Zhao Q., Su X., Kang B., Zhang Y., Wu X., Liu M. A. (2017). Hydrogeochemistry and multi-isotope (Sr, O, H, and C) study of groundwater salinity origin and hydrogeochemical processes in the shallow confined aquifer of northern Yangtze River downstream coastal plain, China, Appl. Geochem. 86 (2017) 49–58.

4. ANÁLISIS DE ESCENARIOS PARA EVALUAR LA SUBSIDENCIA A PARTIR DE UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN PARA LA GESTIÓN DEL AGUA SUBTERRÁNEA

Analysis of scenarios for assessing subsidence from an optimization model for groundwater management[5]

Juan José Díaz-Nigenda[1], Eric Morales-Casique[2], Mauricio Carrillo-Garcia[1*], Mario Alberto Vázquez-Peña[1], Oscar Escolero-Fuentes[2]

[1] Posgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua. Departamento de Irrigación. Universidad Autónoma Chapingo. C.P. 56230 Chapingo, Estado de México, México.

[2] Posgrado en Ciencias de la Tierra. Instituto de Geología. Universidad Nacional Autónoma de México. C.P. 04510 Ciudad de México, México.

* Autor de correspondencia: ericmc@geologia.unam.mx

4.1. Resumen

Los modelos de gestión han sido ampliamente aplicados para obtener estrategias de bombeo óptimo para el control de las subsidencias, pero la mayoría de ellos no incorporan explícitamente a la subsidencia dentro de las restricciones del modelo y desprecian el efecto transitorio en el almacenamiento del acuitardo al considerar que la perturbación en la interfaz acuífero-acuitardo recorre por completo todo el espesor del acuitardo. En esta publicación, se analizan escenarios para evaluar la subsidencia en un sistema multi-acuífero que permitan plantear esquemas de manejo con el apoyo de un modelo de optimización para la gestión del agua subterránea; los escenarios consideraron esquemas de bombeo integrados con información de los volúmenes de extracción del acuífero Chalco-Amecameca. Para el escenario óptimo, se logró determinar un esquema de bombeo que restringe el abatimiento a 10 metros y maximiza el bombeo a 2.6 millones de metros cúbicos por año en promedio, ocasionando hundimientos en el acuitardo del orden 16.6 centímetros en el horizonte de planeación. La metodología se aplicó para identificar la superposición de efectos a partir de los escenarios de operación del sistema multi-acuífero, para concluir en que los efectos de la aplicación de una política no pueden evaluarse en el corto plazo, siendo importante el establecimiento de un horizonte de planeación a partir del concepto de tiempo adimensional.

---

[5] Tesis de Doctorado en Ingeniería. Posgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua. Universidad Autónoma Chapingo
Autor: Juan José Díaz Nigenda.
Director: Ph. D. Mauricio Carrillo García

Palabras clave: modelo de gestión de agua subterránea; método de la matriz de coeficientes de respuesta; optimización; escenarios; hundimientos.

4.2. Abstract

Management models have been widely applied to obtain optimal pumping strategies for subsidence control, but most of them do not explicitly incorporate subsidence within the model constraints and disregard the transient effect on aquitard storage when considering that the disturbance at the aquifer-aquitard interface runs completely through the entire thickness of the aquitard. In this publication, scenarios are analyzed to evaluate subsidence in a multi-aquifer system that allow proposing management schemes with the support of an optimization model for groundwater management; The scenarios considered integrated pumping schemes with information on the extraction volumes of the Chalco-Amecameca aquifer. For the optimal scenario, it was possible to determine a pumping scheme that restricts drawdown to 10 meters and maximizes pumping to 2.6 million cubic meters per year on average, causing subsidence in the aquitard of the order of 16.6 centimeters in the planning horizon. The methodology was applied to identify the overlapping of effects from the operating scenarios of the multi-aquifer system, to conclude that the effects of the application of a policy cannot be evaluated in the short term, being important the establishment of a horizon planning based on the concept of dimensionless time.

Keywords: groundwater management model; response coefficient matrix method; optimization; scenarios; subsidence.

4.3. Introducción

La sobreexplotación del agua subterránea ocasiona subsidencia (hundimiento del terreno), generando múltiples efectos adversos, desde cuantiosos daños a la infraestructura hasta un agotamiento gradual de la capacidad de almacenamiento del sistema hidrogeológico (Galloway y Burbey, 2011; Bagheri, et al., 2019). Cada uno de estos procesos ocurre de manera gradual dependiendo de las características del sistema hidrogeológico; las escalas de tiempo involucradas en la respuesta del sistema ante las perturbaciones antropogénicas pueden ser muy grandes y diversas (Rousseau-Gueutin et al., 2013; Currell et al., 2016) y el tiempo para que un acuitardo alcance el equilibrio ante una perturbación puede tomar cientos de años (Rudolph and Frind, 1991; Zapata-Norberto et al. 2018).

Los modelos de gestión han sido ampliamente aplicados para obtener estrategias de bombeo para el control de las subsidencias, pero la mayoría de ellos no incorporan explícitamente a la subsidencia dentro de las restricciones del modelo (Chang et al., 2011 y 2007, Psilovikos, 2006; Steinbrügge, 2005; Maddock, 1972).

Gambolatti et al (1991) evaluó la subsidencia de un sistema multi-acuífero a partir de un modelo de la consolidación vertical unidimensional considerando el abatimiento a través del tiempo en el acuífero, mismo que fue utilizado como un dato de entrada para el modelo de consolidación vertical en cada acuitardo.

Chang et al (2007) planteó un modelo de gestión para determinar el bombeo total óptimo sujeto a las restricciones de abatimiento y subsidencia; para evaluar la subsidencia, consideró la metodología propuesta por Tsai (2001) basada en la ecuación de consolidación unidimensional y asumió que el desplazamiento del suelo en la dirección vertical es mucho más grande que en la dirección horizontal, además, no simuló el efecto de rebote. La subsidencia fue calculada para cada periodo de tiempo y para el total del estrato. Chang et al (2011), modificó el modelo desarrollado previamente para cuantificar la relación entre la subsidencia y el abatimiento, al considerar el compartimiento elástico e inelástico de la subsidencia del suelo debido al bombeo dentro de la ecuación de consolidación unidimensional; para este fin, asumió que la subsidencia es proporcional al cambio en el abatimiento y que la proporción de la compactación elástica a inelástica por unidad de incremento en el abatimiento es α ($\alpha \ll 1$).

En ambos trabajos despreciaron el efecto transitorio en el acuitardo, es decir, supusieron que el tiempo requerido para que una perturbación (abatimiento) se transmita a todo el espesor del acuitardo, es mucho menor al paso de tiempo empleado en el modelo de optimización. Sin embargo, esto no es aplicable en sistemas hidrogeológicos que incluyen acuitardos altamente compresibles como los que se encuentran en la Ciudad de México, en los que el tiempo de respuesta del acuitardo puede ser de cientos de años (Rudolph and Frind, 1991; Ortega-Guerrero et al., 1999; Zapata-Norberto et al., 2018).

Zapata-Norberto et al (2019 y 2018) desarrolló un algoritmo de subsidencia no lineal para evaluar la consolidación del acuitardo en un sistema multi-acuífero; esta propuesta tomó como base el algoritmo de Neuman et al (1982), el cual fue modificado por Rudolph y Frind (1991). Se consideró que los parámetros hidrogeológicos dependen del esfuerzo efectivo, lo que se induce la característica no lineal al modelo. Su aplicación tomó las características del acuitardo lacustre de la Ciudad de México.

Por su parte, Díaz-Nigenda et al (2022) planteó una propuesta metodológica para identificar el efecto transitorio en un acuitardo e incluirlo en un modelo de gestión de agua subterránea para un sistema multi-acuífero, considerando el hundimiento del terreno inducido por el bombeo; esta metodología, toma la teoría de Bredehoeft y Pinder (1970) y, para poder aplicarla en acuitardos altamente compresibles, se consideró la propagación del abatimiento a través del acuitardo, mediante el Teorema de Duhamel. El modelo integró tres módulos que analizan la optimización del sistema, el transitorio del acuitardo y el cálculo del hundimiento.

En esta publicación, se analizan escenarios para evaluar la subsidencia en un sistema multi-acuífero que permitan plantear esquemas de manejo con el apoyo de un modelo de optimización para la gestión del agua subterránea; para este fin, se utilizó la metodología propuesta por Díaz-Nigenda et al (2022).

Actualmente, existen altas posibilidades de aplicación de estos modelos de gestión en los acuíferos de México, y más aún donde la explotación del agua subterránea se realiza sin ninguna restricción en el uso del agua y en zonas de escasez, donde su disponibilidad se encuentra ya condicionada por los altos niveles de sobreexplotación.

4.4. Materiales y métodos

Para aplicar la metodología, se consideraron algunas de las características del sistema multi-acuífero Chalco-Amecameca y se aplicaron al modelo propuesto.

4.4.1. Comprobación del funcionamiento del sistema

Para evaluar que la respuesta del sistema multi-acuífero planteado por Díaz-Nigenda et al (2022) fuera hidrológicamente razonable en el horizonte de planeación, se revisaron las condiciones de frontera definidas originalmente; de esta manera, las fronteras de carga constante (tipo Dirichlet) se compararon con fronteras mixtas o de carga remota (GHB). Se consideraron intervalos de tiempo de 1 año y se determinó, a partir del tiempo adimensional de Bredehoeft y Pinder (1970) y de las características hidrogeológicas del acuitardo, un horizonte de planeación de 50 años.

Para el acuitardo, se tomó un espesor, b', de 40 m, una conductividad hidráulica, K', de $1x10^{-8}\ m/s$, y $Ss' \ = 0.02\ m^{-1}$.

A partir de la teoría de la hidráulica de pozos en un acuífero confinado, con las ecuaciones (79 y 80) se determinó la tasa de propagación radial de un pulso de presión o abatimiento:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{u_f T}{St}} \tag{79}$$

$$u_f = \frac{Sr^2}{4Tt} \tag{80}$$

Donde es T la transmisividad del acuífero; S es el coeficiente de almacenamiento en el acuífero, t es el tiempo; y r es la distancia radial desde el pozo de bombeo.

4.4.2. Definición de los escenarios de gestión del agua subterránea

A partir de la información de los volúmenes concesionados del Registro Público de Derechos de Agua (REPDA) de la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), para el acuífero Chalco-Amecameca, se diseñaron dos esquemas de bombeo a lo largo del horizonte de planeación. Para asignar los volúmenes de bombeo al modelo se consideró una asignación como proporción del área[6] a partir de la información para el acuífero Chalco-Amecameca.

4.4.3. Aplicación de la metodología para analizar la subsidencia

De acuerdo con la propuesta metodológica de Díaz-Nigenda et al (2022), a partir de los coeficientes de respuesta, [$\alpha_{(m,j,k)}$], se calcularon los caudales óptimos de operación de los pozos de bombeo en el acuífero considerando la función objetivo planteada en la ecuación (81) la cual permitió maximizar el caudal de bombeo en el sistema sujeta, inicialmente, a restricciones de abatimiento, para posteriormente evaluar el hundimiento del terreno.

$$Z = max\left\{\sum_{j=1}^{N_{pozo}} \sum_{k=1}^{N_{tiempo}} Q_{(j,k)}\right\} \tag{81}$$

Donde, N_{pozo} es el número de pozos de bombeo; N_{tiempo} es el número de intervalos de tiempo; $Q_{(j,k)}$ es el bombeo del *j-ésimo* pozo durante el *k-ésimo* intervalo de tiempo [L^3T^{-1}]; Z es el máximo caudal de bombeo que se puede extraer de los N_{pozo} del sistema multi-acuífero en N_{tiempo} intervalos de tiempo. El abatimiento, $s_{(m)}$, en el *m-ésimo* punto de control (pozo de observación) dentro del acuífero, fue determinado con la ecuación (82):

$$s_{(m)} = \sum_{k=1}^{N_{tiempo}} \sum_{j=1}^{N_{pozo}} \left(\alpha_{[m,j,k]} Q_{[j,1]} + \sum_{\substack{p=1 \\ p<k}}^{k-1} \alpha_{[m,j,(k-p)]} \Delta Q_{[j,(p+1)]} \right) \tag{82}$$

Donde, $s_{(m,k)}$ es el abatimiento en el *m-ésimo* punto de control en el *k-ésimo* periodo de tiempo, [L]; $Q_{(j,k)}$ es el bombeo del *j-ésimo* pozo durante el *k-ésimo* periodo de tiempo [L^3T^{-1}]; $\Delta Q_{(j,k)}$ es el incremento en el caudal de bombeo del *j-ésimo* pozo observado en el *k-ésimo* periodo de tiempo [L^3T^{-1}]; y, $\alpha_{(m,j,k)}$ es el

[6] Consultados en: http://sina.conagua.gob.mx/sina/tema.php?tema=acuiferos&ver=reporte&o=1&n=nacional,

coeficiente de respuesta que representa el abatimiento del *m-ésimo* punto de control debido a un bombeo de un caudal unitario del *j-ésimo* pozo durante el *k-ésimo* periodo de tiempo, [$L^{-2}T^{1}$].

De acuerdo con Bredehoeft y Pinder (1970), con la ecuación (83), se determinaron los valores del abatimiento en diferentes posiciones, z, dentro del acuitardo, en cada intervalo de tiempo:

$$s'_{(m,k)} = S_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ erf\left[\frac{(2n+1)+z/b'}{(4t^*)^{1/2}}\right] - erf\left[\frac{(2n+1)-z/b'}{(4t^*)^{1/2}}\right] \right\} \qquad (83)$$

Donde, S_0 es el cambio en el abatimiento inicial en el límite entre el acuífero y el acuitardo producto del bombeo, en cada intervalo de tiempo; z es la posición vertical dentro del acuitardo donde se calcula el valor del abatimiento; t^* es el tiempo adimensional.

La aplicación de esta ecuación quedó condicionada a un escenario donde el bombeo sufría incrementos o al menos se mantenía constante a lo largo del horizonte de planeación.

Por otro lado, para determinar el flujo de agua, q', hacia el acuífero producido por un cambio en el abatimiento inicial en la interfaz acuitardo-acuífero, se aplicó la ecuación (84):

$$q' = \frac{K' S_0}{b'(\pi t^*)^{1/2}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} exp\left[-\frac{n^2}{t^*}\right] \right\} \qquad (84)$$

A partir de las ecuaciones (85) y (86), se calcularon los hundimientos para cada uno de los puntos de control (pozos de observación); a medida que la perturbación se va propagando a través del acuitardo:

$$\delta_{m,k} = {}^{b}C \sum_{p=1}^{k} s_{m,k-p+1} \qquad (85)$$

$$\text{Sujeto a} \quad \mathrm{k} \leq N_{segmentos}$$

$$^{b}C = \frac{\rho_w g}{2\mu + \gamma} \Delta b' \tag{86}$$

donde, $\delta_{(m,k)}$ es el hundimiento calculado en el *m-ésimo* punto de control durante el *k-ésimo* periodo de tiempo; ^{b}C es el coeficiente que representa el hundimiento en el *m-ésimo* punto de control considerando un abatimiento unitario uniforme en el segmento $\Delta b'$; $\rho_w,\ g, \Delta b'$ son la densidad del agua, la aceleración de la gravedad, la longitud del segmento en los que se divide el acuitardo en el *m-ésimo* punto de control, respectivamente; $\mu\ y\ \lambda$ son las constantes de Lame.

Para esta parte de la metodología, al suponer que $\Delta b'$ es constante, se determinaron las áreas bajo de la curva de abatimientos para cada uno de los $N_{segmentos}$ en el *k-ésimo* periodo de tiempo en que divide el acuitardo y se comparó con los obtenidos en el periodo *k+1-ésimo* periodo de tiempo, si $(Area_{k+1} > Area_k)_{N_{segmento}}$, con esto, en algunos intervalos de tiempo, se consideran algunos de los segmentos del acuitardo dentro del cálculo del hundimiento (Figura 16).

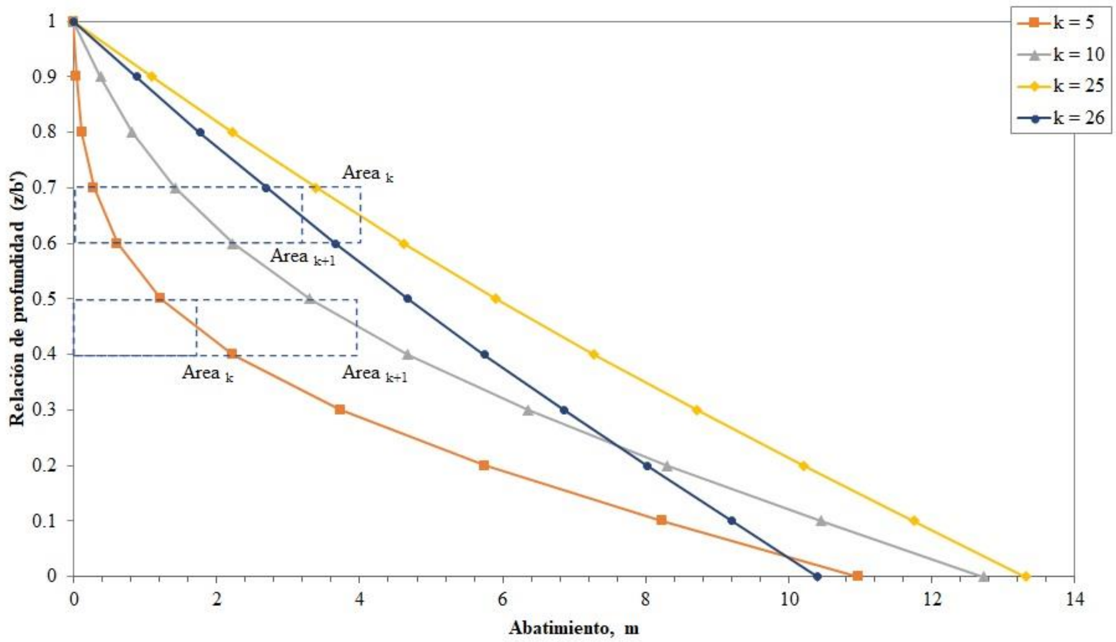


Figura 16. Representación de los casos para considerar las áreas bajo la curva de abatimientos en el cálculo del hundimiento.

Este análisis, se retomó para aplicar la teoría propuesta por Leake, mencionado por Chang *et. al* (2011), donde la relación entre el hundimiento y el cambio en el abatimiento podría simplificarse como se indica en la Figura 17, donde $\Delta h_p\ (l,k,t)$ es la diferencia entre la carga hidráulica inicial y la carga hidráulica de preconsolidación al final del *t-ésimo* período de tiempo. Un valor positivo de Δh_p indica que la carga hidráulica inicial es mayor que la carga hidráulica de preconsolidación.

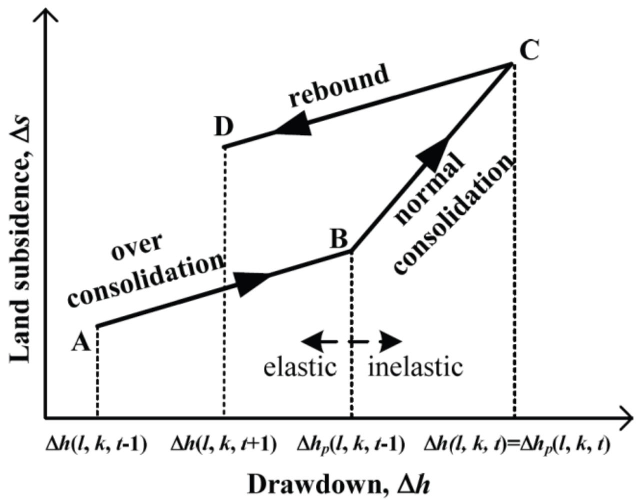


Figura 17. Relación entre el abatimiento y la subsidencia, tomada de Chang et al. (2011).

Cuando el abatimiento aumenta de $\Delta h(l,k,t-1)$ a $\Delta h_p(l,k,t-1)$ durante el *t-ésimo* período de tiempo (segmento de línea AB), la compactación del suelo es elástica y es proporcional o casi proporcional al cambio en abatimiento. Sin embargo, si el abatimiento aumenta continuamente y está más allá de $\Delta h_p(l,k,t-1)$ durante el *t-ésimo* período de tiempo, se producirá la compactación del suelo inelástica y permanente (segmento de línea BC). La compactación por unidad de incremento en el abatimiento en el rango inelástico es considerablemente mayor (un orden de magnitud) que el del rango elástico. A diferencia de la compactación elástica, la relación entre la compactación inelástica y el cambio en el abatimiento no es lineal, lo que significa que la pendiente del segmento BC no es constante, sino una función de esfuerzo efectivo (σ_e). Este supuesto no producirá un error significativo para los sedimentos profundos porque el cambio de esfuerzo efectivo (o reducción) es mucho menor que el esfuerzo total. Para los sedimentos poco profundos, la compactación inelástica se sobreestimará ligeramente. En la compactación inelástica, Δh_p aumenta simultáneamente con el aumento en el abatimiento. Al final del período de tiempo, $\Delta h_p(l,k,t)$ es igual a $\Delta h(l,k,t)$. Si la reducción disminuye de $\Delta h(l,k,t)$ a $\Delta h(l,k,t+1)$ durante el *(t+1) ésimo* período de tiempo debido a la recuperación del nivel freático, la expansión elástica del suelo (o rebote) ocurrirá (segmento de línea CD). Al igual que la compactación elástica, la expansión elástica es proporcional o casi proporcional al cambio en la reducción. Además, la pendiente del segmento de línea CD es aproximadamente igual a la del segmento de línea AB con signo opuesto.

A través de Leake (1990), con la ecuación (87) se puede estimar el tiempo requerido para que se disipe el 93% del exceso de presión de poro luego de un cambio en la carga hidráulica en la interfase acuífero-acuitardo:

$$\tau_v = \frac{S_s\left(\frac{b'}{2}\right)^2}{{K_v}'} \tag{87}$$

4.4.4. Aplicación del Teorema de Duhamel

Cuando el escenario integraba reducciones en el bombeo como parte de una estrategia para evaluar el comportamiento del sistema, el cálculo del abatimiento en diferentes posiciones, z, dentro del acuitardo fue ajustado mediante la aplicación del Teorema de Duhamel a partir de la teoría integro-diferencial planteada por Herrera y Figueroa (1969), Herrera (1970) y Herrera y Rodarte (1973) que analizaba un sistema multi-acuífero conformado por dos acuíferos separados por un acuitardo:

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} + \frac{K'}{T_1}\left(\frac{\partial s_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial s_1}{\partial t} \tag{88}$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha'}\frac{\partial s'}{\partial t} \tag{89}$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} + \frac{K'}{T_2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial z}\right)_{z=b'} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial s_2}{\partial t} \tag{90}$$

Con las siguientes condiciones de frontera e iniciales:

$$s'(x,y,0,t) = s_1(x,y,t) \qquad s'(x,y,b',t) = s_2(x,y,t) \tag{91}$$

$$s_1(x,y,0) = 0 \qquad s_2(x,y,0) = 0 \qquad s'(x,y,z,0) = 0 \tag{92}$$

A partir de la ecuación (89) y de las condiciones de frontera e iniciales de las ecuaciones (91) y (92), se planteaba, para calcular el abatimiento en el acuitardo:

$$s'(x,y,z,t) = \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x,y,z,t-\tau)\, u(z,\tau)d\tau + \int_0^t \frac{\partial s_2}{\partial t}(x,y,z,t-\tau)\, v(z,\tau)d\tau \qquad (93)$$

Para el sistema analizado, la ecuación (93) se simplificó de la siguiente manera:

$$s'(x,y,z,t) = \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x,y,z,t-\tau)\, u(z,\tau)d\tau \qquad (94)$$

En esta investigación, se aplicó la siguiente forma discretizada de la ecuación (94) con el apoyo de las ecuaciones (95 – 100), considerando que $0 \leq \tau \leq t$:

$$s'(z,t) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{s_{(t+\Delta t-\tau_j)} - s_{(t-\tau_j)}}{\Delta t} u\left(z,\tau_j\right)\Delta\tau \qquad (95)$$

$$u(z,\tau) = 1 - z_D - 2\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-n^2\pi^2 t_D}}{n\pi}\right]\sin(n\pi z_D) \qquad (96)$$

$$n = \frac{t}{\tau} \qquad (97)$$

$$z_D = \frac{z}{b'} \qquad (98)$$

$$t_D = \alpha' \frac{\tau}{b'^2} \qquad (99)$$

$$\alpha' = \frac{K'}{S_s{}'} \qquad (100)$$

Donde s_1 y s_2 es el abatimiento en el acuífero 1 y 2 respectivamente; s' es el abatimiento en el acuitardo; T_1 y T_2 es la transmisividad del acuífero 1 y 2 respectivamente; K' es la conductividad hidráulica en el acuitardo; t es el tiempo; $S_s{}'$ es el almacenamiento específico en el acuitardo; b' es el espesor del acuitardo; τ es el tiempo del subintervalo dentro del tiempo t; y, n es el número de subintervalos dentro del t.

4.5. Resultados y discusión

La consulta del Registro Público de Derechos de Agua (REPDA) para el acuífero Chalco-Amecameca arrojó un volumen de bombeo (concesionado) de 99.5 millones de metros cúbicos, mientras que la superficie de este acuífero es de 942.19 km^2. En la Figura 18, se muestra el esquema de bombeo definido para el modelo en los primeros 25 años del horizonte de planeación; este esquema sirvió de base para el diseño de los escenarios de análisis.

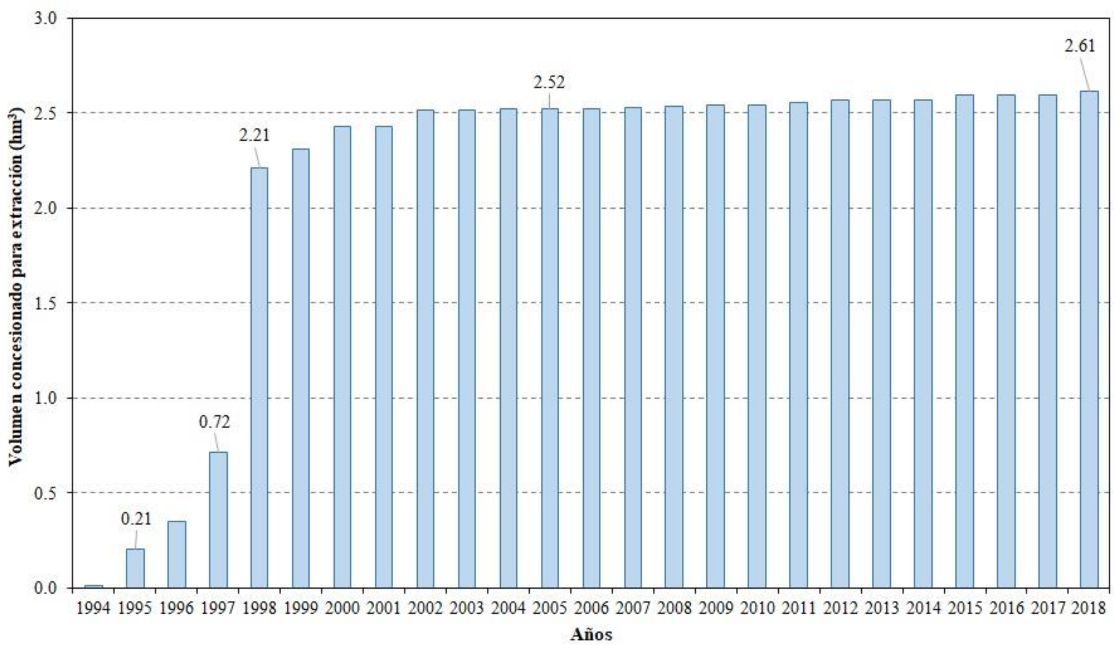


Figura 18. Esquema de bombeo a partir de los volúmenes concesionados en el acuífero Chalco Amecameca.

A partir del concepto de tiempo adimensional, t^*, de Bredehoeft y Pinder (1970) y de las características del acuitardo, se comprobó que en un tiempo de 50.7 años se alcanza un flujo establecido de agua a través del acuitardo hacia el acuífero; este análisis permitió establecer un horizonte de planeación de 50 años para incluir el efecto transitorio del almacenamiento del acuitardo en un modelo de gestión del agua subterránea. Por el contrario, en el acuífero se estimó un tiempo que varía de 90 a 340 segundos cuando se alcanza el flujo establecido en él; estos tiempos del acuífero contrastan en varias órdenes de magnitud con el manejado en el acuitardo.

Esta diferencia en los tiempos de respuesta dentro del sistema también lleva a determinar diferentes velocidades de propagación de un pulso de presión o abatimiento dentro del sistema. Dentro del acuitardo, esta velocidad de propagación es del orden de 5 m/año, mientras que en el acuífero se estima de $23 \ x \ 10^6$ m/año.

Para conocer el efecto de las fronteras del modelo de simulación numérica a través del tiempo y evaluar que la respuesta del sistema fuera hidrológicamente razonable en el horizonte de planeación, se revisaron las condiciones de frontera definidas originalmente; por lo que las fronteras de carga constante (tipo Dirichlet) se compararon con fronteras mixtas o de carga remota (GHB).

De esta manera, en la Figura 19 se muestran los volúmenes de agua aportados por la frontera de carga constante y por el almacenamiento a lo largo del horizonte de planeación en el escenario tendencial; bajo estas condiciones, en el año 5 se observa que el almacenamiento alcanza una aportación máxima del orden de 497 miles de metros cúbicos, para posteriormente decaer hasta 73 miles de metros cúbicos, que demuestra el flujo establecido entre el acuitardo y el acuífero; resalta que hasta el año 5, el almacenamiento del acuitardo aporta del orden del 23% de la extracción total y a lo largo del horizonte de planeación su aportación es del 6% aproximadamente. Este comportamiento del sistema induce abatimientos máximos del orden de 13 metros, valor observado en el punto de control PC-a.

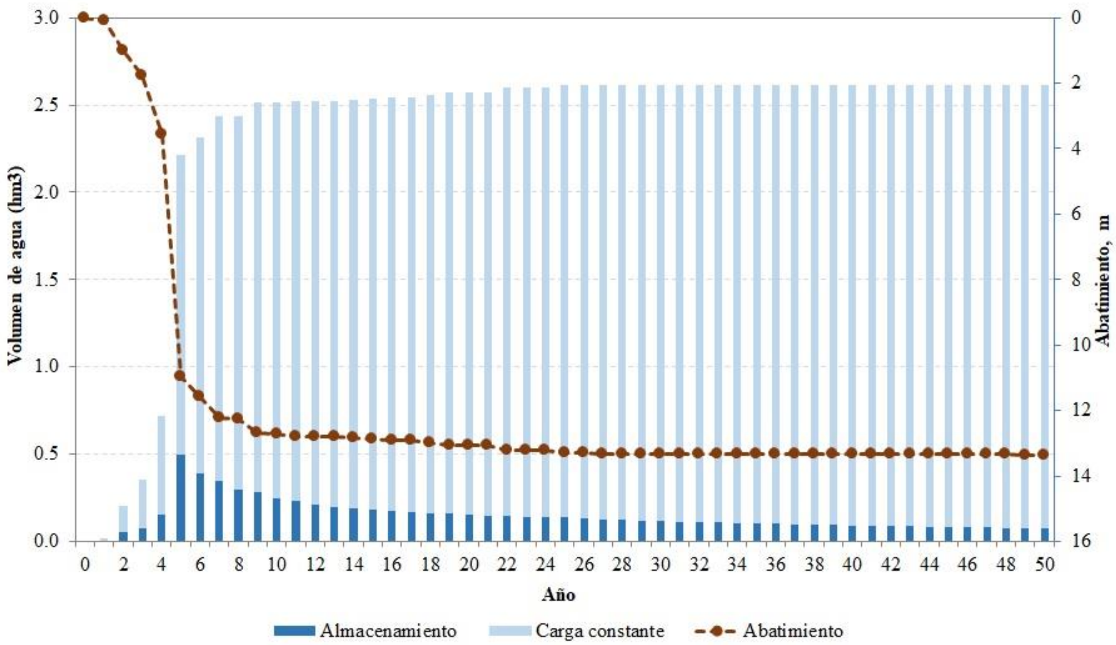


Figura 19. Funcionamiento del sistema bajo condiciones de frontera de carga constante (valores de abatimiento observados en el punto de control PC-a).

En la Figura 20, se muestra el funcionamiento del sistema considerando fronteras de carga remota; aunque se puede apreciar un comportamiento similar en ambos casos, existen diferencias en los volúmenes de agua que aportan tanto el almacenamiento como la frontera de carga remota. En todo el horizonte de planeación el almacenamiento aporta el 8% de la extracción total del agua del sistema, alcanzando su máximo en el año 5 con 622 miles de metros cúbicos. Para el caso de esta frontera, se observa que la aportación del almacenamiento es mayor al 25% para los primeros 5 años de funcionamiento. El abatimiento registrado en el punto de control PC-a con este funcionamiento del sistema es del orden de 13 metros.

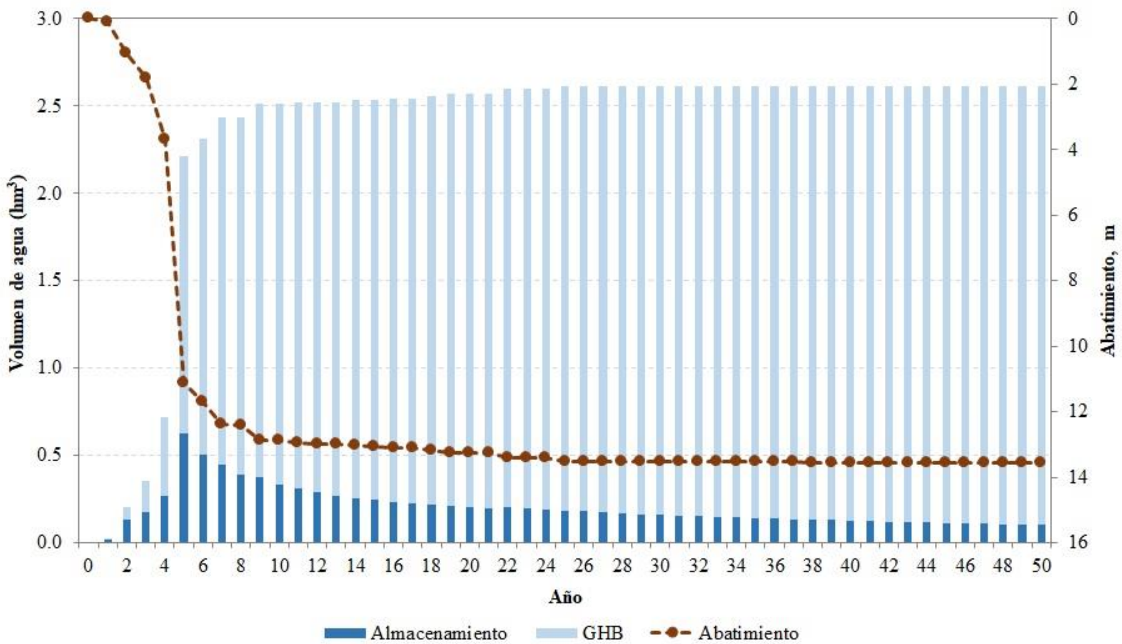


Figura 20. Funcionamiento del sistema bajo condiciones de frontera de carga remota -GHB (valores de abatimiento y carga hidráulica observados en el PC-a).

Tanto en las figuras 19 y 20 puede apreciarse que la máxima tasa de cambio del abatimiento dentro del acuífero se presenta en los años 4 y 5, y a partir del año 10 se estabiliza su funcionamiento con tasas del orden de centímetros por año. El abatimiento máximo alcanzado en los 50 años del horizonte de planeación es del orden de 13 metros. En el Cuadro 13 se concentran algunos de los valores determinados para las dos condiciones de frontera analizadas anteriormente.

Cuadro 13. Valores de las entradas al sistema, abatimientos (s) y cargas hidráulicas (h) determinados en cada tipo de condición de frontera (punto de control: PC-a)

Año	Frontera tipo mixta					Frontera tipo Dirichlet				
	Entradas (miles m^3)			s (m)	h (m)	Entradas (miles m^3)			s (m)	h (m)
	Ss	GHB	Totales			Ss	H cte	Totales		
1	15.9	0.4	16.3	0.1	1499.9	4.2	12.1	16.3	0.1	1499.9
5	622.1	1,590.5	2,212.6	11.1	1,488.9	497.2	1,715.4	2,212.6	11.0	1,489.0
10	335.1	2,180.1	2,515.2	12.9	1,487.1	249.6	2,265.6	2,515.2	12.7	1,487.3
20	205.1	2,363.3	2,568.4	13.3	1,486.7	151.6	2,416.7	2,568.3	13.1	1,486.9
25	185.6	2,428.0	2,613.6	13.5	1,486.5	136.5	2,477.1	2,613.6	13.3	1,486.7
30	159.7	2,453.9	2,613.6	13.5	1,486.5	116.8	2,496.8	2,613.6	13.3	1,486.7
40	126.3	2,487.3	2,613.6	13.5	1,486.5	91.9	2,521.7	2,613.6	13.3	1,486.7
50	101.5	2,512.1	2,613.6	13.6	1,486.4	73.5	2,540.1	2,613.6	13.3	1,486.7

Realizando una prueba de hipótesis, donde $H_0: \mu_{HCTE} = \mu_{GHB}$, y con el estadístico $|t_0| > t_{gl}^{0.975}$ para rechazar la hipótesis nula, se pudo comprobar que no existe una diferencia significativa entre los valores del abatimiento calculados en cada tipo de condición de frontera por lo que son estadísticamente iguales a un nivel de confianza del 95%, esto debido a: $|t_0| = 0.283$ y $t = 1.984$. Para el caso de las entradas de agua del almacenamiento, los datos indican que existe una diferencia significativa entre los valores calculados en cada tipo de condición de frontera, por lo que se rechazó la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95%, esto es, $|t_0| = 2.687$ y $t = 1.986$. Con este análisis pudo comprobarse que el cambio en la condición de frontera afecta los flujos de agua al interior del sistema, pero los abatimientos provocados se mantienen estadísticamente iguales.

Escenario tendencial.

El esquema de bombeo planteado en este escenario no considera incrementos en el volumen de extracción en lo que resta del horizonte de planeación, por lo que el valor del año 25 se mantiene constante, tal y como se muestra en la Figura 21.

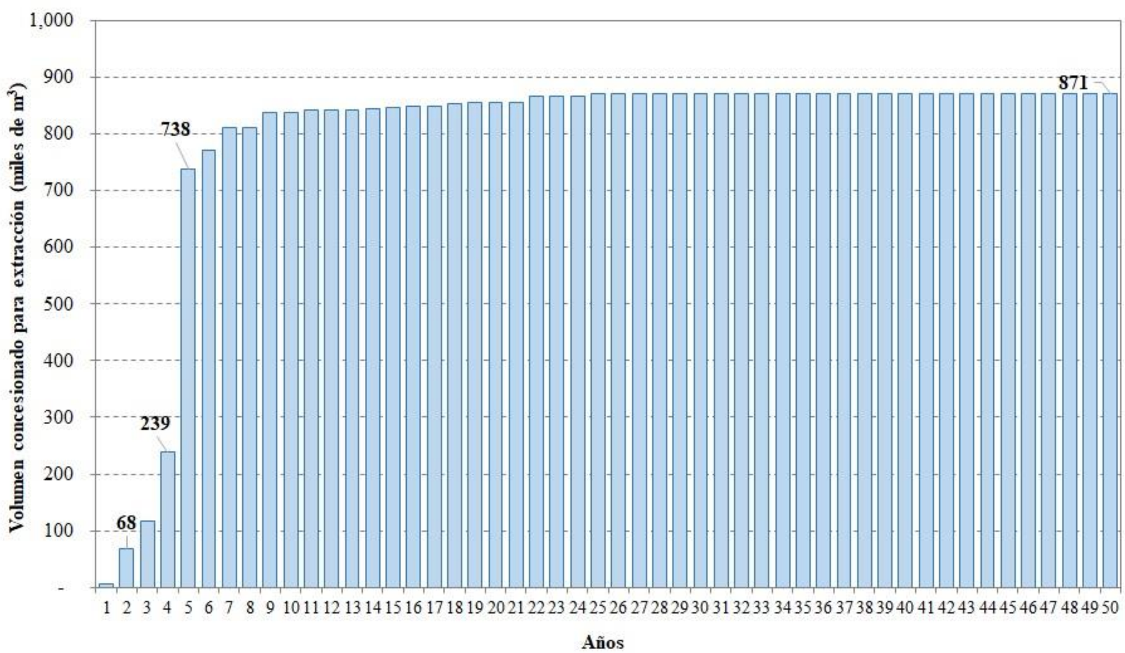


Figura 21. Esquema de bombeo en cada pozo de extracción considerado en el escenario tendencial (cifras en m^3).

Los abatimientos que se inducen en el acuífero con el esquema de bombeo planteado se indican en la Cuadro 14.

Cuadro 14. Escenario tendencial: abatimientos registrados en el acuífero en los puntos de control en el horizonte de planeación (cifras en metros).

Punto de control	Años					
	1	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
PC-a	0.080	12.719	13.063	13.320	13.338	13.352
PC-b	0.027	4.320	4.456	4.551	4.562	4.570
PC-c	0.011	1.760	1.813	1.851	1.855	1.857
PC-d	0.005	0.996	1.081	1.123	1.139	1.150
PC-e	0.004	0.719	0.768	0.794	0.803	0.809
PC-f	0.015	2.609	2.741	2.817	2.835	2.849
PC-g	0.007	1.167	1.234	1.271	1.281	1.289
PC-h	0.003	0.479	0.503	0.517	0.520	0.523

En este escenario se resalta que, aunque el bombeo se mantiene constante en los últimos 25 años, el abatimiento sigue incrementándose a una tasa que varía de 0.3 a 3.2 por ciento. Este comportamiento del abatimiento en el acuífero provoca un efecto transitorio en el acuitardo, por lo que en la Figura 22 se muestra este efecto medido en el punto de control PC-a; puede apreciarse que es en el año 50 cuando el flujo de agua entre el acuitardo y el acuífero se encuentra en un estado estacionario.

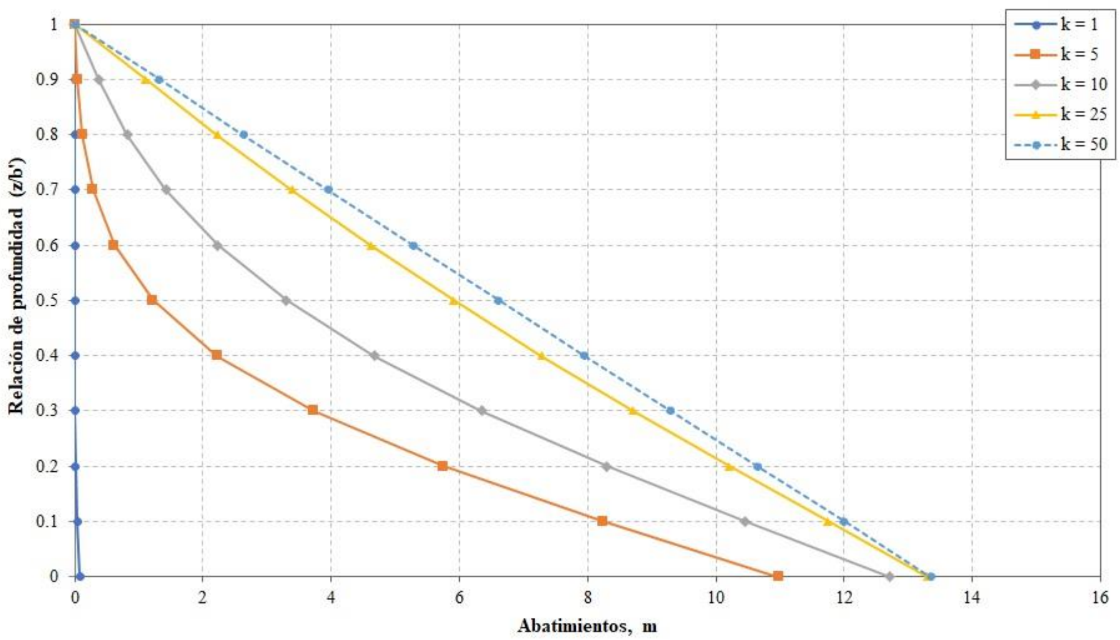


Figura 22. Abatimientos en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación en el escenario tendencial, medido en el punto de control PC-a.

Las Figuras 23 y 24 muestran el comportamiento del hundimiento dentro del acuitardo a lo largo del horizonte de planeación; se determinó que el hundimiento total es superior a los 17 centímetros a una tasa promedio del hundimiento de 0.34 cm/año, utilizándose valores de las constantes de Lame de: $\mu = 5x10^6$ y $\lambda = 5x10^6$. En la misma Figura 24, se concentran las tasas de hundimientos anuales, las cuales presentan valores extremos de 5.13 cm/año en el año 5 y de 0.01 cm/año en el año 50; se vincula este comportamiento a los incrementos de los caudales de extracción al inicio del horizonte de planeación.

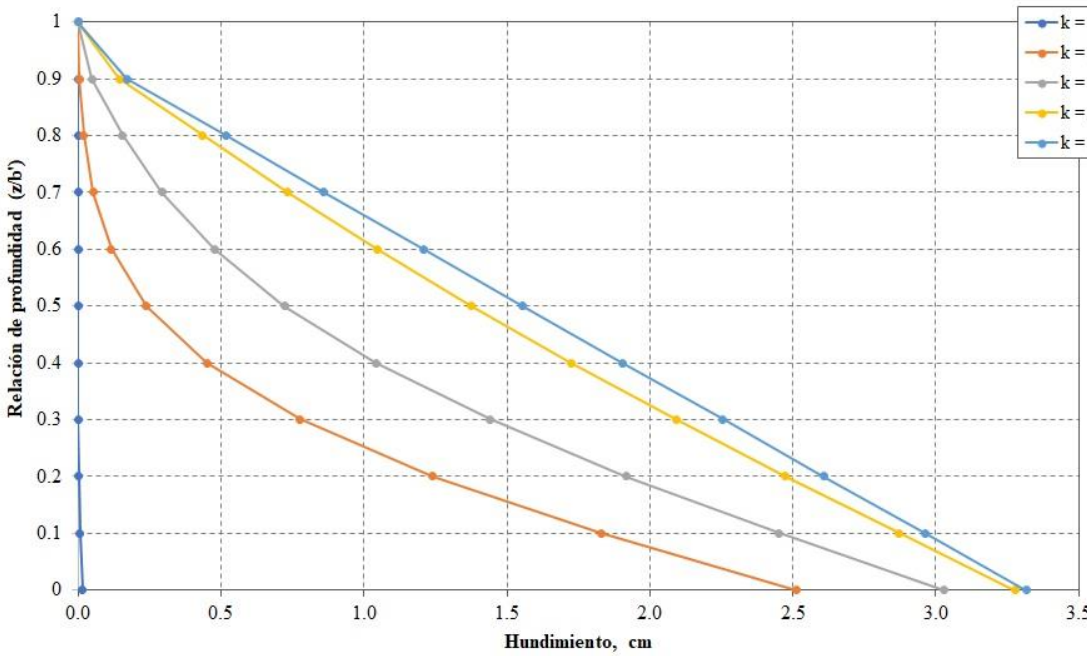


Figura 23. Hundimientos en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación en el escenario tendencial, medido en el punto de control PC-a.

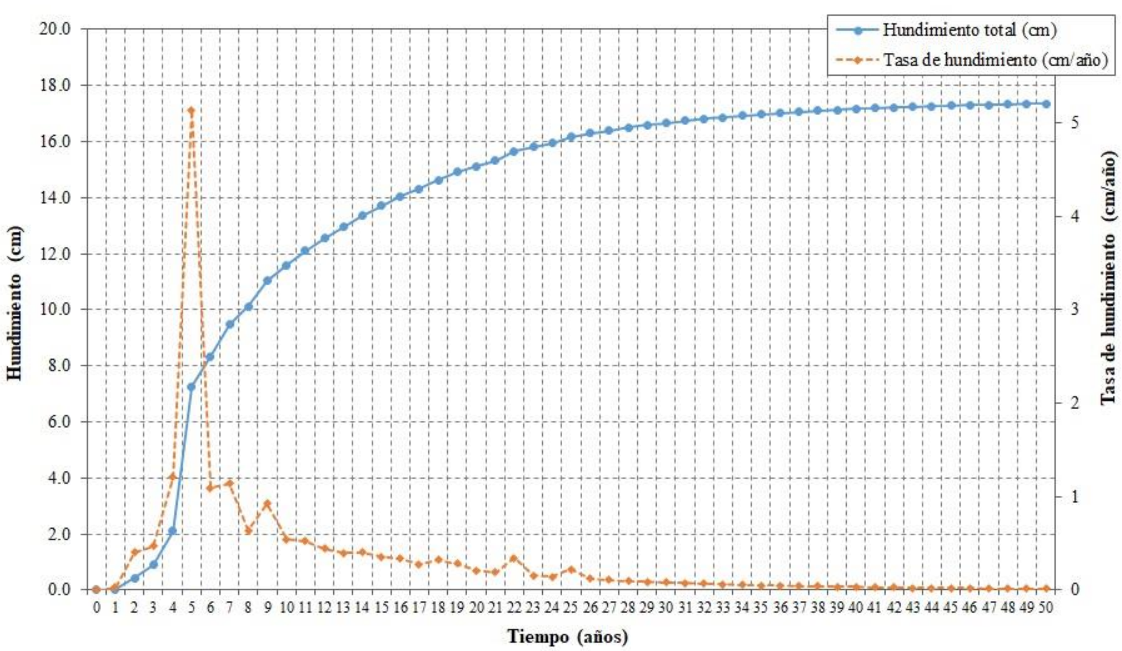


Figura 24. Hundimiento total y tasa de hundimiento en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación, medido en el punto de control PC-a.

Escenario óptimo.

Este escenario está integrado con un esquema de bombeo óptimo a partir del año 26, con el que se garantiza un abatimiento no mayor de 10 metros en los puntos de control; esta restricción de abatimiento fue determinada a partir del escenario tendencial donde se alcanzaban abatimientos máximos de 13 metros en el punto de control PC-a en el horizonte de planeación. Con este criterio, los pozos de bombeo B y C, incrementan el caudal de extracción para alcanzar la restricción de abatimiento, tal y como se muestra en la Figura 25.

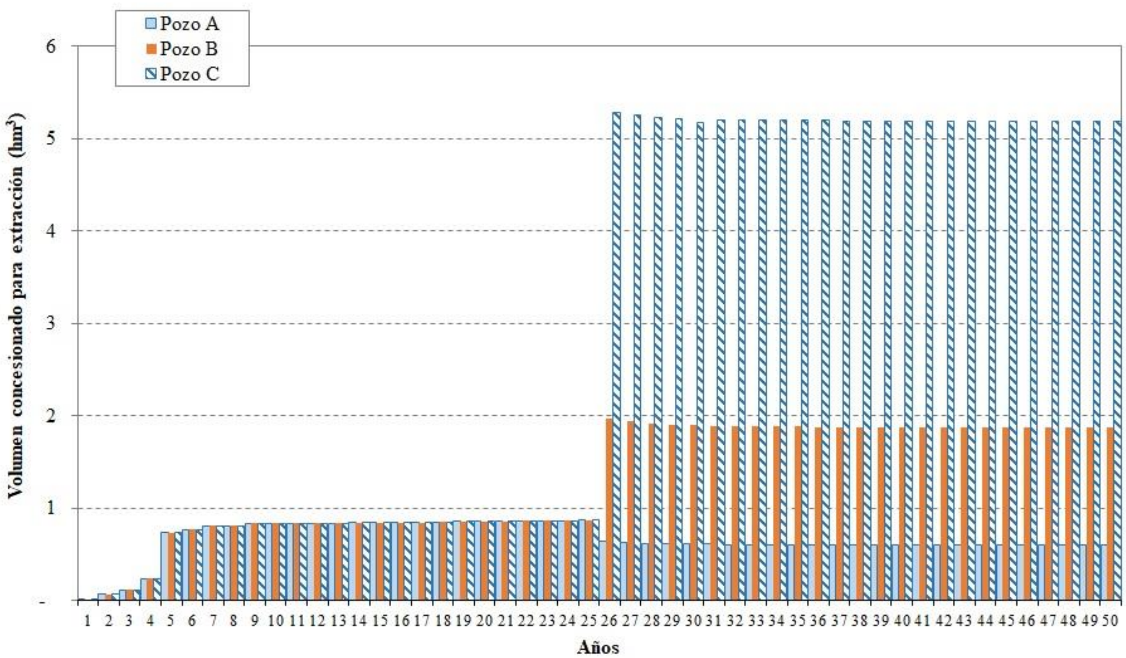


Figura 25. Esquema de bombeo en cada pozo de extracción considerado en el escenario óptimo (cifras en hm^3).

En el Cuadro 15 se concentran los valores de los abatimientos calculados en el horizonte de planeación para este escenario. El abatimiento máximo en el acuífero se alcanza en el año 25; a partir de ese año, los caudales de extracción se ajustan para cumplir con la restricción de abatimiento de 10 metros; al final del horizonte de planeación aún no se logra cumplir con la restricción debido al efecto provocado por la extracción durante los primeros 25 años.

Cuadro 15. Escenario óptimo: abatimientos registrados en los puntos de control del acuífero en el horizonte de planeación (cifras en metros).

Punto de control	Años					
	1	10	20	30	40	50
PC-a	0.080	12.719	13.063	10.122	10.047	10.032
PC-b	0.027	4.320	4.456	10.073	10.028	10.019
PC-c	0.011	1.760	1.813	9.962	10.010	10.007
PC-d	0.005	0.996	1.081	2.050	2.118	2.145
PC-e	0.004	0.719	0.768	2.096	2.142	2.158
PC-f	0.015	2.609	2.741	2.825	2.862	2.881
PC-g	0.007	1.167	1.234	2.943	2.986	3.003
PC-h	0.003	0.479	0.503	2.159	2.185	2.191

El abatimiento inducido por el esquema de bombeo propuesto provoca el efecto transitorio en el acuitardo que se muestra en la Figura 26 para el punto de control PC-a; resalta que a partir del año 26 el funcionamiento del sistema induce un abatimiento de 10 metros, mismo que se extiende hasta el año 50; al menos, durante el horizonte de planeación, el abatimiento empieza a estabilizarse.

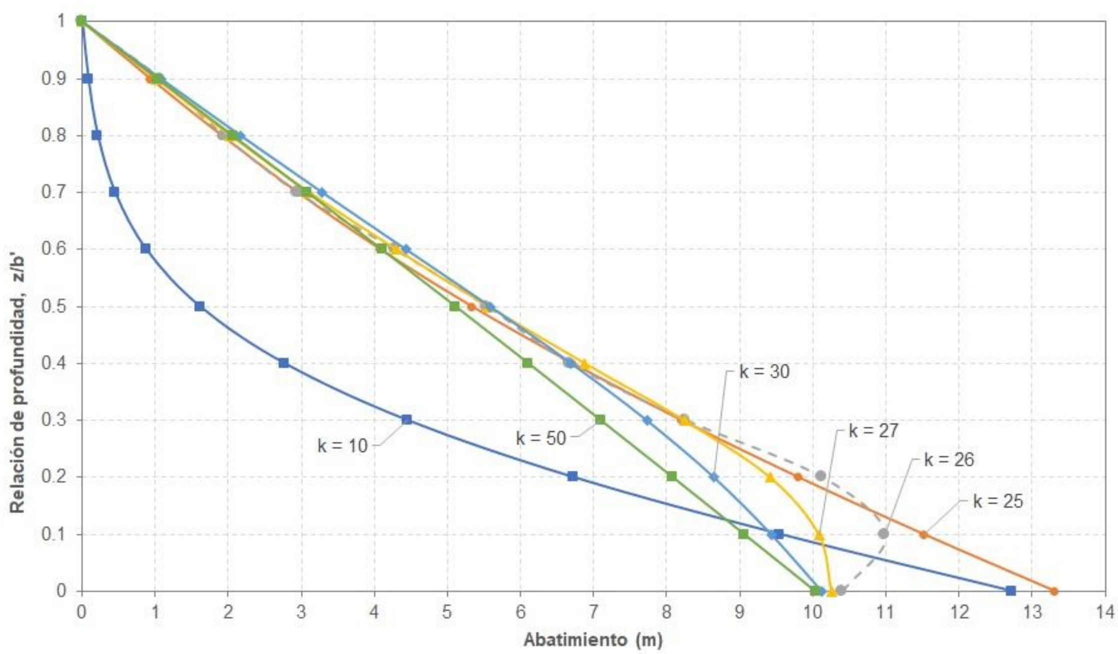


Figura 26. Abatimiento en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación en el escenario óptimo, medido en el punto de control PC-a ($\tau = 0.5$).

En la misma Figura 26, pueden observarse 2 etapas de funcionamiento del sistema; la primera, delimitada por los abatimientos incrementales hasta el año 25, y la segunda a partir del año 26 cuando el sistema tiende a reacomodar su funcionamiento hasta alcanzar un abatimiento de 10 metros en la interfase acuífero-acuitardo. Estos resultados fueron obtenidos al aplicar lo comentado en los apartados 4.4.3 y 4.4.4.

Este comportamiento de abatimiento provoca un hundimiento máximo del orden de 15.6 centímetros en todo el horizonte de planeación; en la etapa 1 se registra, en promedio, una tasa de hundimiento de 0.61 cm/año, mientras que en la etapa 2 la tasa de hundimiento promedio es de 0.017 cm/año.

Las Figuras 27 y 28 muestran el comportamiento del hundimiento parcial y total en el acuitardo. Se resalta en la Figura 28, que, aunque la medida de ajustar la extracción a un valor óptimo se implemente en el tiempo 26, los efectos en el acuitardo se resienten hasta el año 33; por lo que el establecimiento de una medida para contrarrestar el efecto del hundimiento en el acuitardo tardará 7 años al reflejar el impacto deseado.

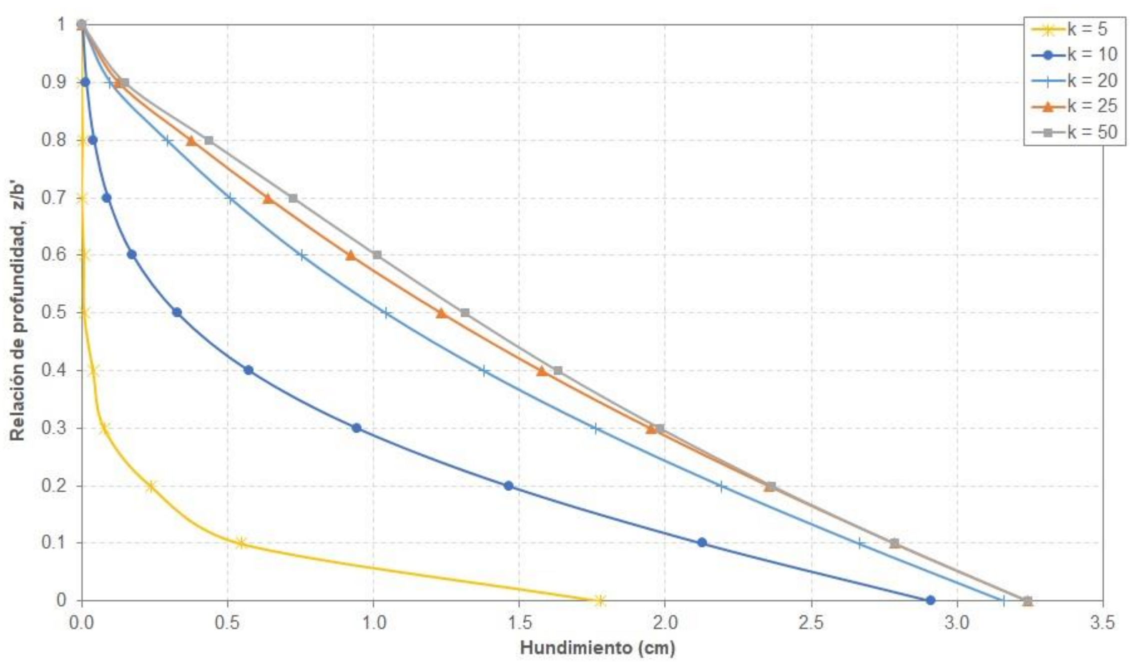


Figura 27. Hundimiento en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación, medido en el punto de control PC-a.

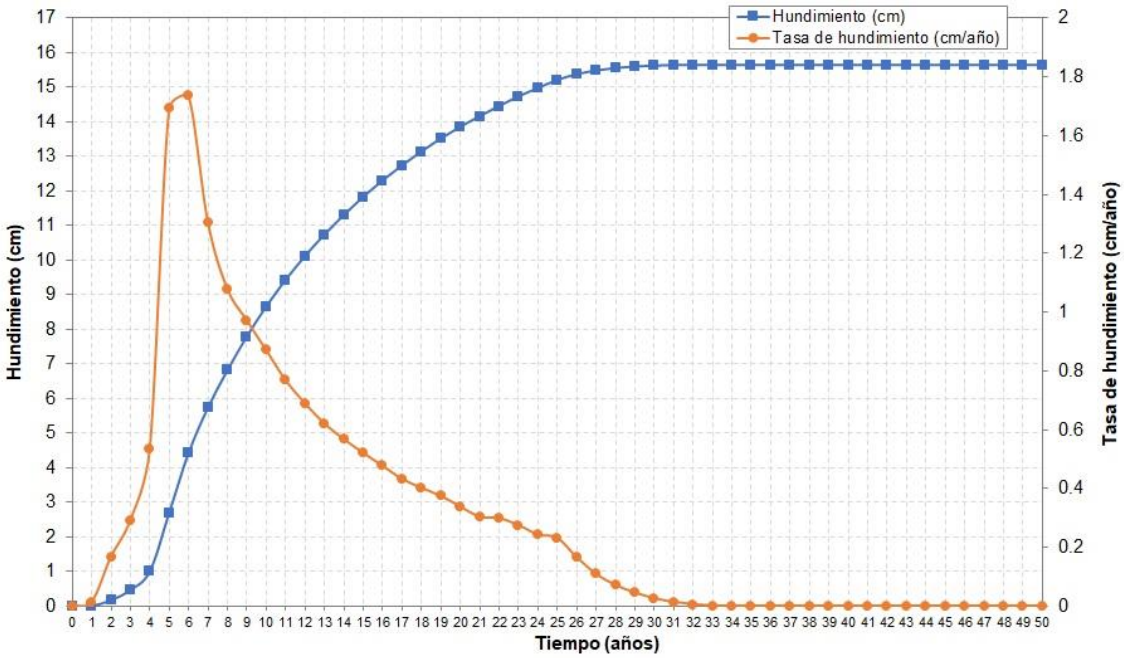


Figura 28. Hundimiento total en el acuitardo y tasa de hundimiento a lo largo del horizonte de planeación, medido en el punto de control PC-a.

La Figura 29, se tiene la gráfica que relaciona el abatimiento y la subsidencia para las condiciones del modelo desarrollado. Haciendo una comparación entre ésta y la Figura 17, se detectan varios puntos de interés que permiten delimitar las zonas de compactación elástica e inelástica; de esta manera, hasta un abatimiento de 10.98 metros aproximadamente se tendrá la zona de compactación elástica con una tasa de compactación por unidad de abatimiento de 0.26 cm/m; la zona de compactación inelástica estaría delimitada hasta el abatimiento de 3.31 metros, con tasas de compactación de 1.14 cm/m.

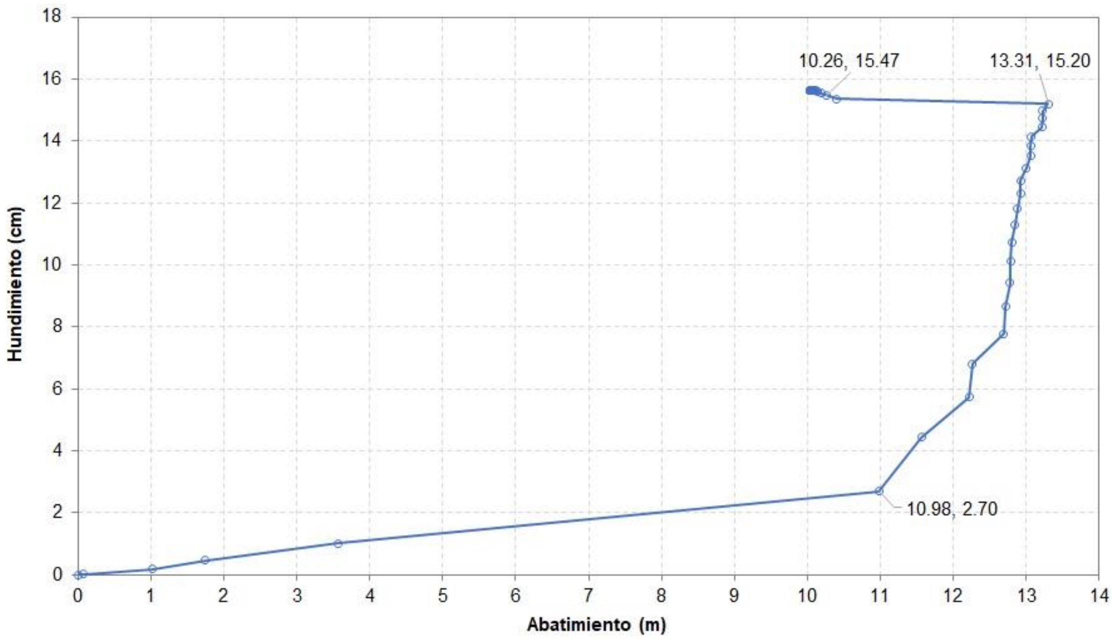


Figura 29. Análisis de las relaciones entre el abatimiento y la subsidencia.

Se estima que el tiempo requerido para que se disipe el 93% del exceso de presión de poro luego de un cambio en la carga hidráulica en la interfase acuífero-acuitardo es de 25 años.

Comparación del inicio de la implementación del bombeo óptimo como medida para controlar el hundimiento en el acuitardo.

Para conocer el impacto de la implementación del bombeo óptimo como medida para controlar el hundimiento en el acuitardo, induciendo abatimientos de 10 metros en el acuífero, se diseñó un escenario donde se evaluó el tiempo de inicio de la misma, considerando los años 6, 8, 10 y 26 del horizonte de planeación. En la Figura 26 se presentó el efecto transitorio en el acuitardo con la implementación del bombeo optimo en el año 26, mientras que en las Figuras 30 – 32 se aprecian los efectos transitorios en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación con los tiempos de implementación de 10, 8 y 6 años respectivamente.

Los hundimientos totales alcanzados en el horizonte de planeación son de 12.9, 13.2, 13.5 y 15.6 centímetros para los tiempos de implementación en los años 6, 8, 10 y 26 respectivamente. El efecto del retardo determinado con el Teorema de Duhamel, puede apreciarse a partir del año 8, cuando el acuífero aún no encuentra el equilibrio durante su funcionamiento. En el año 25, el funcionamiento del acuífero prácticamente ha alcanzado el máximo abatimiento por lo que el hundimiento en el acuitardo tiene el mismo comportamiento, de esta manera el efecto de la implementación de la medida se manifiesta en el año 33, cuando no existe crecimiento en la tasa de hundimiento anual (Figura 34).

En la Figura 33 se muestran los hundimientos en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación determinados en cada tiempo de implementación del bombeo óptimo para controlar el hundimiento. Cuando la medida es implementada en el año 26, el efecto transitorio en el acuitardo se estabiliza en el año 33 y se presenta una tasa de hundimiento anual de cero, por lo que el hundimiento máximo se ha alcanzado dentro del horizonte de planeación. Es conveniente resaltar que adelantar la implementación de la medida antes de que el funcionamiento del acuífero alcance el máximo abatimiento tiene un impacto del 15% en el hundimiento del acuitardo, pero sus efectos se seguirán presentado más allá del horizonte de planeación.

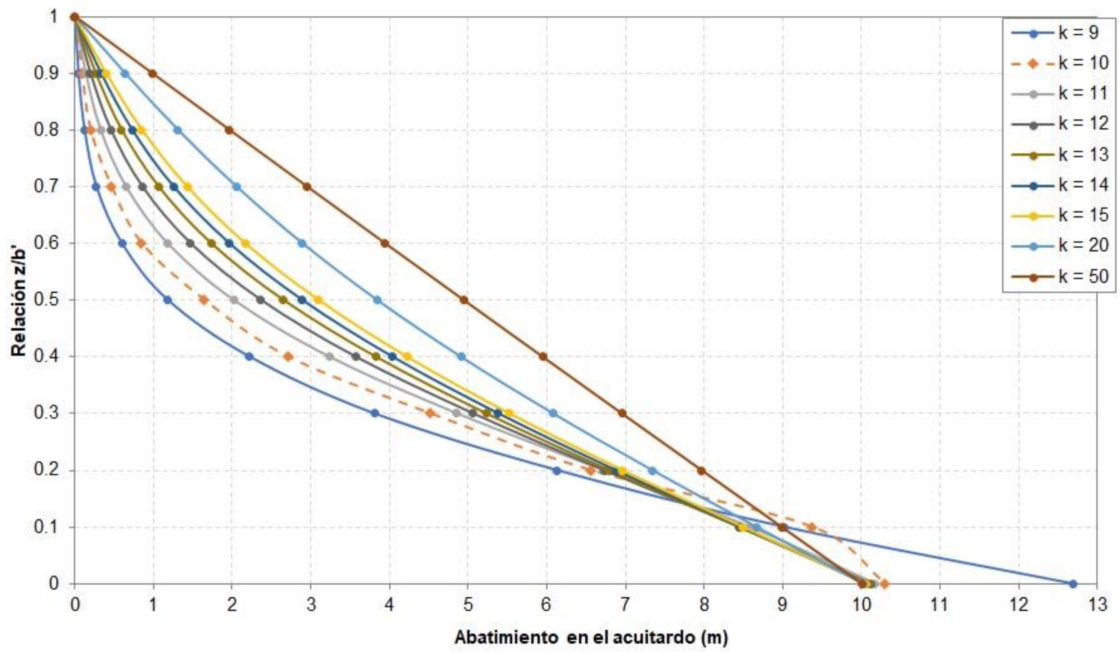


Figura 30. Abatimiento en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación en el escenario óptimo, medido en el punto de control PC-a con la medida implementada en el año 10.

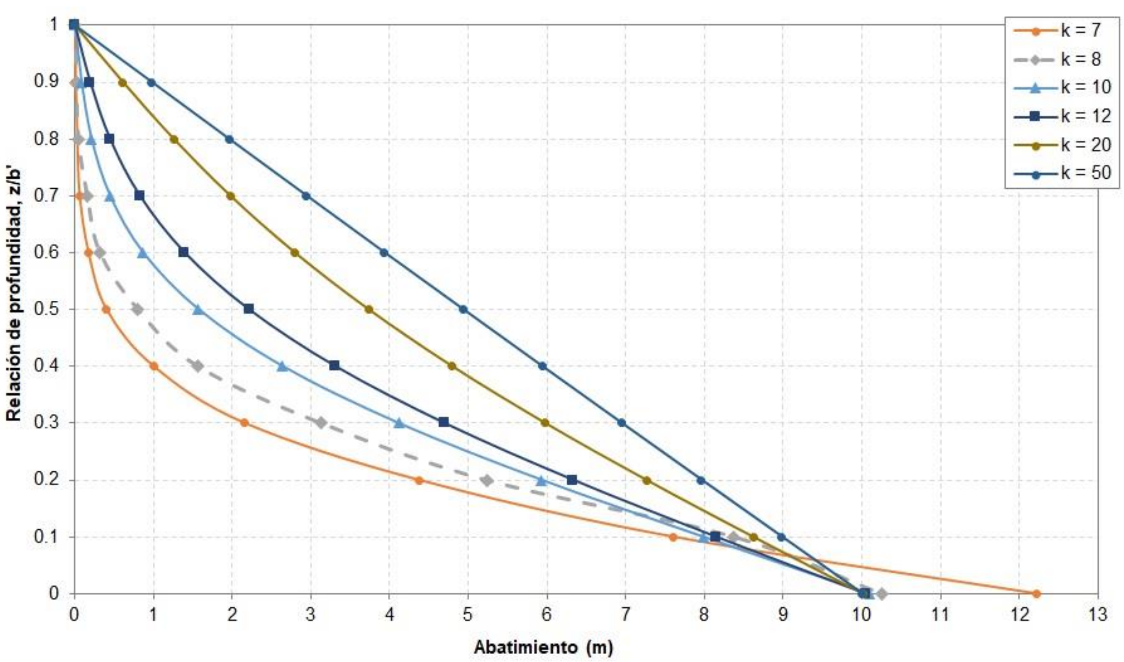


Figura 31. Abatimiento en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación en el escenario óptimo, medido en el punto de control PC-a con la medida implementada en el año 8.

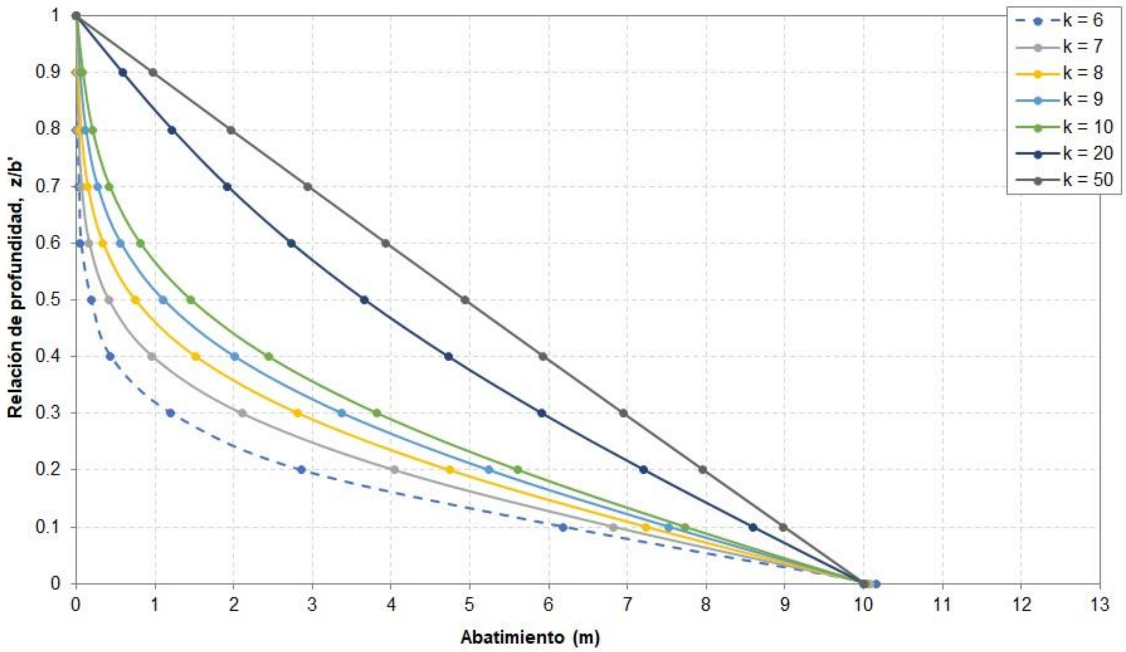


Figura 32. Abatimiento en el acuitardo a lo largo del horizonte de planeación en el escenario óptimo, medido en el punto de control PC-a con la medida implementada en el año 6.

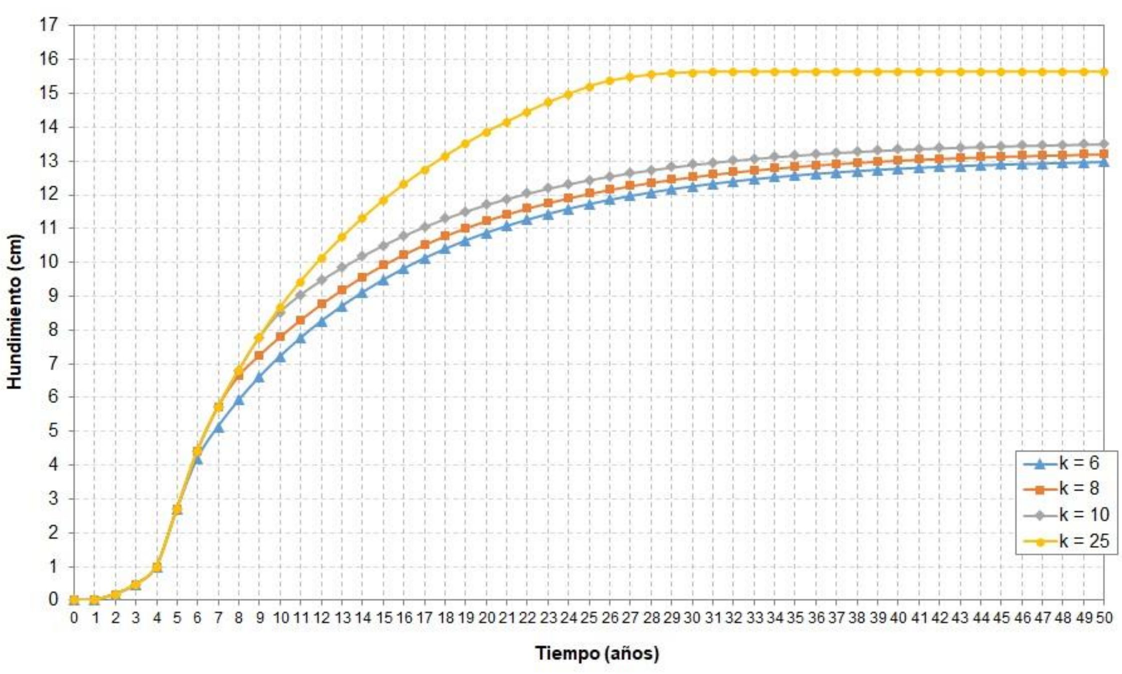


Figura 33. Comparación de los hundimientos en el acuitardo con diferentes tiempos de implementación del bombeo óptimo como medida para controlar el hundimiento.

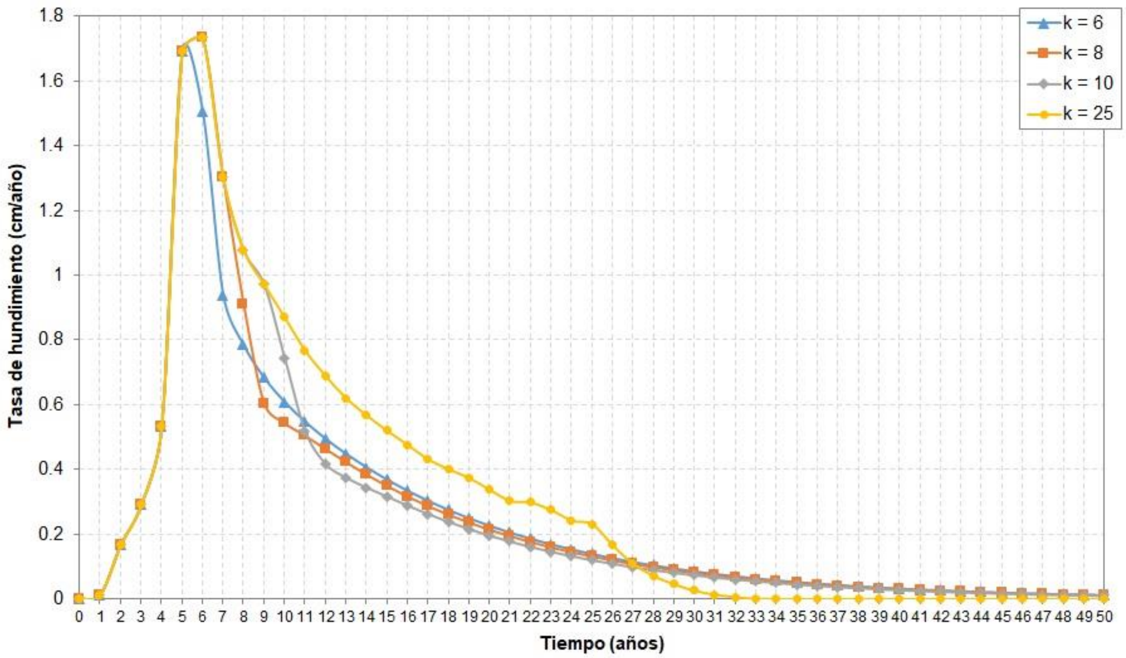


Figura 34. Comparación de las tasas de hundimiento en el acuitardo con diferentes tiempos de implementación del bombeo óptimo como medida para controlar el hundimiento.

4.6. Conclusiones

Tomando un sistema multi-acuífero integrado por un acuífero confinado y un acuitardo, se aplicó la metodología que permitió conocer el efecto transitorio dentro del acuitardo a partir del diseño de dos escenarios, tendencial y óptimo, en un modelo de gestión del agua subterránea; estos escenarios consideraron esquemas de bombeo integrados con información de los volúmenes de extracción del acuífero Chalco-Amecameca. Con la aplicación del tiempo adimensional de Bredehoeft y Pinder (1970) se determinó un horizonte de planeación mínimo de 50 años. Para tratar de evaluar el efecto del “rebote” en el cálculo del hundimiento en el acuitardo se calcularon las áreas bajo la curva de abatimiento en cada tiempo; es necesario ajustar el horizonte de planeación a un tiempo mayor para lograr que el abatimiento se estabilice.

Al aplicar el algoritmo de optimización para el escenario óptimo, se logró determinar un esquema de bombeo que restringe el abatimiento a 10 metros y maximiza el bombeo a 2.6 millones de metros cúbicos por año en promedio.

Los esquemas de bombeo tendencial y óptimo propuestos ocasionan hundimientos en el acuitardo del orden 17 y 15.6 centímetros respectivamente; esta diferencia es consecuencia principalmente por el cálculo de las áreas bajo la curva de abatimientos y su comparación entre el *k-ésimo* y el *t+1-ésimo* periodo de tiempo determinados en el mismo segmento del acuitardo.

El tiempo requerido para que se disipe el 93% del exceso de presión de poro luego de un cambio en la carga hidráulica en la interfase acuífero-acuitardo es de 25 años; en este tiempo, se provocaría un abatimiento de 13.31 metros y se induciría un cambio en el esfuerzo efectivo de ($\Delta\sigma_e$) de 13,310 kg/m^2 (130.5 kN/m^2).

Para evaluar el efecto de la implementación del bombeo óptimo como medida para controlar el hundimiento en el acuitardo se comprobó que el efecto transitorio en el acuitardo se estabiliza en el año 33 y se presenta una tasa de hundimiento anual de cero, por lo que el hundimiento máximo se ha alcanzado dentro del horizonte de planeación; adelantar la implementación de la medida antes de que el funcionamiento del acuífero alcance el máximo abatimiento tiene un impacto del 15% en el hundimiento del acuitardo. Los hundimientos totales alcanzados en el horizonte de planeación son de 12.9, 13.2, 13.5 y 15.6 centímetros para los tiempos de implementación en los años 6, 8, 10 y 26 respectivamente.

El efecto de las fronteras del modelo de simulación numérica a través del tiempo permitió evaluar una respuesta hidrológicamente razonable en el horizonte de planeación, comprobándose que el cambio en la condición de frontera afecta los flujos de agua al interior del sistema, pero los abatimientos provocados se mantienen estadísticamente iguales. Se estimaron tiempos de respuesta para alcanzar el flujo establecido que contrastan en varias órdenes de magnitud entre el acuitardo y el acuífero. Esta diferencia en los tiempos de respuesta dentro del sistema también lleva a determinar diferentes velocidades de propagación de un pulso de presión o abatimiento dentro del sistema. Dentro del acuitardo, esta velocidad de propagación es del orden de 5 m/año, mientras que en el acuífero se estima de 23 *x* 10^6 m/año.

La metodología de cálculo del efecto transitorio en el acuitardo a través del Teorema de Duhamel permitió evaluar de mejor manera el efecto del retraso del abatimiento en el acuífero a través del acuitardo. Aunque el análisis acá presentado considerado un $\tau = 0.5$, sería conveniente analizar para otros valores.

4.7. Datos suplementarios

Este trabajo no presenta datos suplementarios.

4.8. Contribución de los autores

En este trabajo, la contribución es: (1) Conceptualización: Díaz-Nigenda J.J., Morales-Casique E. y Escolero-Fuentes O. A.; (2) Análisis o adquisición de datos: Díaz-Nigenda J.J y Morales-Casique E.; (3) Desarrollo metodológico/técnico: Díaz-Nigenda J.J., Morales-Casique E. y Escolero-Fuentes O. A.; (4) Redacción del manuscrito original: Díaz-Nigenda J.J., Morales-Casique E., Escolero-Fuentes O. A., Carrillo-García M., Vázquez-Peña M.; (5) Redacción del manuscrito corregido y editado: Díaz-Nigenda J.J., Morales-Casique E., Escolero-Fuentes O. A., Carrillo-García M., Vázquez-Peña M.; (6) Diseño gráfico: Díaz-Nigenda J.J.

4.9. Financiamiento

Este trabajo se realizó sin financiamiento.

4.10. Conflicto de interés

En este trabajo, no existe ningún conflicto de interés.

4.11. Referencias bibliográficas

Bagheri R., Nosrati A., Jafari H., Eggenkamp H.G.M., Mozafari M. (2019). Overexploitation hazards and salinization risks in crucial declining aquifers, chemo-isotopic approaches. Journal of Hazardous Materials 369 (2019) 150–163. https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2019.02.024

Bredehoeft J. D. and Pinder G. F. (1970). Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater systems: A quasi three-dimensional model. Water Resources Research, 6(3), 1970, 883- 888.

Chang, Y. L., Huang, C. Y., Tsai, T. L., Chen, H. E., & Yang, J. C. (2011). Optimal groundwater quantity management for land subsidence control. Proceedings of the IASTED International Conference on Environmental Management and Engineering, Calgary AB, Canada, 38–45.

Chang Y. L., Tsai T. L., Yang J. C., and Tung Y. K. (2007). Stochastically optimal groundwater management considering land subsidence. Journal of Water Resources Planning and Management, 133(6), 486–498.

Díaz-Nigenda J.J. (2022). Evaluación de la subsidencia a partir de un modelo de optimización para la gestión del agua subterránea. Tesis doctoral. Posgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua. Universidad Autónoma Chapingo.

Currell M., Gleeson T., Dahlhaus P. (2016). A New Assessment Framework for Transience in Hydrogeological Systems. Ground Water. 2016 Jan;54(1):4-14. doi: 10.1111/gwat.12300.

Galloway D. L., Burbey T. J. (2011) Review: Regional land subsidence accompanying groundwater extraction. Hydrogeol Journal 19(8):1459–1486. https://doi.org/10.1007/s10040-011-0775-5.

Gambolati, G., Ricceri, G., Bertoni, W., Brighenti, G., & Vuillermin, E. (1991). Mathematical simulation of the subsidence of Ravenna. Water Resources Research, 27(11), 2899–2918.

Herrera I., y Rodarte L. (1973). Integrodifferential equations for systems of leaky aquifers and applications, 1. The nature of approximate theories. Water Resources Research, 9(4) 995-1005, 1973.

Herrera I. (1970). Theory of multiple leaky aquifers. Water Resources Research, 6(1), 185-193,1970.

Herrera I., y Figueroa G. A. (1969). A correspondence principle for the theory of leaky aquifers. Water Resources Research, 5(4) 900-904, 1969.

Leake S. A. (1990). Interbed storage changes and compaction in models of regional groundwater flow. Water Resources Research, 26(9), 1939-1950.

Maddock T, III. (1972). Algebraic Technologic Function from a Simulation Model. Water Resources Research, 8(1) 129-134.

Neuman S. P., Preller C., Narasimhan T.N. (1982). Adaptive explicit-implicit quasi three-dimensional finite element model of flow and subsidence in multiaquifer systems. Water Resources Research 18(5):1551-1561.

Ortega-Guerrero A., Rudolph D. L., Cherry J. A. (1999). Analysis of long-term land subsidence near Mexico City: field investigations and predictive modeling.

Water Resources Research. 35(11):3327–3341. https://doi.org/10.1029/1999WR900148.

Psilovikos A. (2006). Response matrix minimization used in groundwater management with mathematical programming: a case study in a transboundary aquifer in Northern Greece. Water Resources Management (2006) 20: 277–290. DOI: 10.1007/s11269-006-0324-5.

Rousseau-Gueutin P., Love A. J., Vasseur G., Robinson N. I., Simmons C. T., de Marsily G. (2013). Time to reach near-steady state in large aquifers. First published: 19 September 2013. https://doi.org/10.1002/wrcr.20534.

Rudolph D. L., Frind E. O. (1991). Hydraulic response of highly compressible aquitards during consolidation. Water Resources Research 27(1):17–30. https://doi.org/10.1029/90WR01700.

Steinbrügge G., Muñoz J. F. y Fernández B. (2005). Análisis probabilístico y optimización de los recursos de agua subterránea: el caso del acuífero Maipo-Mapocho, Chile. Ingeniería Hidráulica en México. Vol. XX, no. 3, 85-97, julio-septiembre.

Tsai, T. L. (2001). The development and application of model of regional land subsidence due to groundwater overpumping. Ph.D. thesis, National Chiao Tung Univ., Hsinchu, Taiwan.

Zapata Norberto B. (2019). Asimilación de datos y modelación estocástica no lineal unidimensional de la subsidencia en acuitardos heterogéneos altamente compresibles. Tesis doctoral. Posgrado en Ciencias de la Tierra. Universidad Nacional Autónoma de México.

Zapata-Norberto B., Morales-Casique E., Herrera G. (2018). Nonlinear consolidation in randomly heterogeneous highly compressible aquitards. Hydrogeology Journal (2018) 26:755–769. https://doi.org/10.1007/s10040-017-1698-6

5. CONCLUSIONES GENERALES

Los modelos de gestión del agua subterránea proporcionan información sobre la respuesta del sistema a las alternativas de explotación planteadas y son una buena herramienta para apoyar el manejo de un sistema de aguas subterráneas.

Las posibilidades de aplicación de estos modelos de gestión en los acuíferos de México son muy grandes, y más aún donde la explotación del agua subterránea se realiza sin ninguna restricción en el uso del agua y en zonas de escasez, donde su disponibilidad se encuentra ya condicionada por los altos niveles de sobreexplotación.

La propuesta metodológica expuesta en esta investigación permitió identificar e incluir el efecto transitorio en el almacenamiento de un acuitardo en un modelo de gestión del agua subterránea y evaluar el hundimiento inducido por el funcionamiento óptimo de un sistema multi-acuífero.

A través del algoritmo de optimización se logró maximizar el caudal de extracción de los pozos de bombeo, y se comprobó la aplicación del método de la matriz de coeficientes de respuesta en la determinación de los abatimientos, que no excedieron de 10 y 15 metros en las etapas de realización de la investigación.

La utilización de la solución analítica propuesta por Bredehoeft y Pinder en el análisis transitorio permitió conocer el efecto en el almacenamiento del acuitardo a través del abatimiento a diferentes profundidades del acuitardo. La implementación del tiempo adimensional definió el horizonte de planeación mínimo de análisis del sistema.

Al dividir el acuitardo en segmentos permitió evaluar que el hundimiento en el acuitardo es del orden de 7 centímetros en los 3 años iniciales de análisis, mismo que puede crecer hasta 17 y 16 centímetros dependiendo del esquema de bombeo que se diseñe

6. RECOMENDACIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

Algunas recomendaciones para apoyar investigaciones futuras son:

a. Enfoque metodológico.

- Analizar la parte económica para la implementación de una alternativa de manejo dentro del modelo de gestión de aguas subterráneas, por lo que se deberá optimizar una función objetivo que minimice los costos de bombeo y costos sociales provocados por el hundimiento.

- Mejorar la teoría inelástica de la consolidación para considerar de mejor manera el efecto de rebote en el análisis de los hundimientos.

- Desarrollar funciones de respuesta que sustituyan los coeficientes de respuesta dentro del modelo de gestión del agua subterránea.

b. Líneas a futuro.

- Diseñar un modelo integrado que permita evaluar simultáneamente el abatimiento producido por los caudales óptimos, el análisis transitorio en el almacenamiento del acuitardo y los hundimientos.

- Vincular la metodología dentro de un modelo estructurado en plataformas como el WEAP (Sistema de Evaluación y Planificación del Agua) para analizar sistemas integrados que incluyan tanto aguas superficiales como subterráneas.

- Impulsar la integración de modelos de gestión de sistemas de aguas subterráneas para el desarrollo de estrategias de manejo.

- Desarrollar herramientas que permitan evaluar el impacto de asignaciones futuras de agua subterránea a partir las extracciones unitarias.

- Integrar criterios diferenciados de hundimiento máximo permitido en función del uso del suelo dentro del acuífero.

7. APÉNDICES

Apéndice 1. Desarrollo para el módulo de optimización.

```
# Inicio
!pip install ortools
from ortools.linear_solver import pywraplp
solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('GLOP')

# Definición de variables
infinity = solver.infinity()
x1_t1 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x1_t1')
x2_t1 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x2_t1')
x3_t1 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x3_t1')

x1_t2 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x1_t2')
x2_t2 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x2_t2')
x3_t2 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x3_t2')

x1_t3 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x1_t3')
x2_t3 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x2_t3')
x3_t3 = solver.IntVar(0.0, infinity, 'x3_t3')

# Planteamiento de restricciones

# Para el periodo de tiempo 1:
solver.Add(CR[0][0]*x1_t1+CR[0][1]*x2_t1+CR[0][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control A
solver.Add(CR[1][0]*x1_t1+CR[1][1]*x2_t1+CR[1][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control B
solver.Add(CR[2][0]*x1_t1+CR[2][1]*x2_t1+CR[2][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control C
solver.Add(CR[3][0]*x1_t1+CR[3][1]*x2_t1+CR[3][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control D
solver.Add(CR[4][0]*x1_t1+CR[4][1]*x2_t1+CR[4][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control E
solver.Add(CR[5][0]*x1_t1+CR[5][1]*x2_t1+CR[5][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control F
solver.Add(CR[6][0]*x1_t1+CR[6][1]*x2_t1+CR[6][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control G
solver.Add(CR[7][0]*x1_t1+CR[7][1]*x2_t1+CR[7][2]*x3_t1 <= 10) # Restricción punto
control H

# Para el periodo de tiempo 2:
solver.Add(CR[8][0]*x1_t1+CR[8][1]*x2_t1+CR[8][2]*x3_t1+CR[8][3]*x1_t2+CR[8][4]*x2
_t2+CR[8][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control A
solver.Add(CR[9][0]*x1_t1+CR[9][1]*x2_t1+CR[9][2]*x3_t1+CR[9][3]*x1_t2+CR[9][4]*x2
_t2+CR[9][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control B
solver.Add(CR[10][0]*x1_t1+CR[10][1]*x2_t1+CR[10][2]*x3_t1+CR[10][3]*x1_t2+CR[10]
[4]*x2_t2+CR[10][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control C
```

```
solver.Add(CR[11][0]*x1_t1+CR[11][1]*x2_t1+CR[11][2]*x3_t1+CR[11][3]*x1_t2+CR[11]
[4]*x2_t2+CR[11][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control D
solver.Add(CR[12][0]*x1_t1+CR[12][1]*x2_t1+CR[12][2]*x3_t1+CR[12][3]*x1_t2+CR[12]
[4]*x2_t2+CR[12][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control E
solver.Add(CR[13][0]*x1_t1+CR[13][1]*x2_t1+CR[13][2]*x3_t1+CR[13][3]*x1_t2+CR[13]
[4]*x2_t2+CR[13][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control F
solver.Add(CR[14][0]*x1_t1+CR[14][1]*x2_t1+CR[14][2]*x3_t1+CR[14][3]*x1_t2+CR[14]
[4]*x2_t2+CR[14][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control G
solver.Add(CR[15][0]*x1_t1+CR[15][1]*x2_t1+CR[15][2]*x3_t1+CR[15][3]*x1_t2+CR[15]
[4]*x2_t2+CR[15][5]*x3_t2 <= 10) # Restricción punto control H

# Para el periodo de tiempo 3:
solver.Add(CR[16][0]*x1_t1+CR[16][1]*x2_t1+CR[16][2]*x3_t1+CR[16][3]*x1_t2+CR[16]
[4]*x2_t2+CR[16][5]*x3_t2+CR[16][6]*x1_t3+CR[16][7]*x2_t3+CR[16][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control A
solver.Add(CR[17][0]*x1_t1+CR[17][1]*x2_t1+CR[17][2]*x3_t1+CR[17][3]*x1_t2+CR[17]
[4]*x2_t2+CR[17][5]*x3_t2+CR[17][6]*x1_t3+CR[17][7]*x2_t3+CR[17][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control B
solver.Add(CR[18][0]*x1_t1+CR[18][1]*x2_t1+CR[18][2]*x3_t1+CR[18][3]*x1_t2+CR[18]
[4]*x2_t2+CR[18][5]*x3_t2+CR[18][6]*x1_t3+CR[18][7]*x2_t3+CR[18][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control C
solver.Add(CR[19][0]*x1_t1+CR[19][1]*x2_t1+CR[19][2]*x3_t1+CR[19][3]*x1_t2+CR[19]
[4]*x2_t2+CR[19][5]*x3_t2+CR[19][6]*x1_t3+CR[19][7]*x2_t3+CR[19][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control D
solver.Add(CR[20][0]*x1_t1+CR[20][1]*x2_t1+CR[20][2]*x3_t1+CR[20][3]*x1_t2+CR[20]
[4]*x2_t2+CR[20][5]*x3_t2+CR[20][6]*x1_t3+CR[20][7]*x2_t3+CR[20][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control E
solver.Add(CR[21][0]*x1_t1+CR[21][1]*x2_t1+CR[21][2]*x3_t1+CR[21][3]*x1_t2+CR[21]
[4]*x2_t2+CR[21][5]*x3_t2+CR[21][6]*x1_t3+CR[21][7]*x2_t3+CR[21][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control F
solver.Add(CR[22][0]*x1_t1+CR[22][1]*x2_t1+CR[22][2]*x3_t1+CR[22][3]*x1_t2+CR[22]
[4]*x2_t2+CR[22][5]*x3_t2+CR[22][6]*x1_t3+CR[22][7]*x2_t3+CR[22][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control G
solver.Add(CR[23][0]*x1_t1+CR[23][1]*x2_t1+CR[23][2]*x3_t1+CR[23][3]*x1_t2+CR[23]
[4]*x2_t2+CR[23][5]*x3_t2+CR[23][6]*x1_t3+CR[23][7]*x2_t3+CR[23][8]*x3_t3 <= 10) #
Restricción punto control H

# Función objetivo
solver.Maximize(x1_t1+x2_t1+x3_t1+x1_t2+x2_t2+x3_t2+x1_t3+x2_t3+x3_t3)

#Solución
status = solver.Solve()
if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL:

    print('SOLUCIÓN:');
    print('Valor función objetivo = ',solver.Objective().Value());
    print('Valor de Q1 = ', x1_t1.solution_value());
    print('Valor de Q2 = ', x2_t1.solution_value());
    print('Valor de Q3 = ', x3_t1.solution_value());

    print('Valor de Q1 = ', x1_t2.solution_value());
```

```
    print('Valor de Q2 = ', x2_t2.solution_value());
    print('Valor de Q3 = ', x3_t2.solution_value());

    print('Valor de Q1 = ', x1_t3.solution_value());
    print('Valor de Q2 = ', x2_t3.solution_value());
    print('Valor de Q3 = ', x3_t3.solution_value());
else:
    print('No existe una solución óptima');

# Verificación de las restricciones con el caudal optimo

# Para el periodo de tiempo 1:
Abat_A_t1 =
CR[0][0]*x1_t1.solution_value()+CR[0][1]*x2_t1.solution_value()+CR[0][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control A
Abat_B_t1 =
CR[1][0]*x1_t1.solution_value()+CR[1][1]*x2_t1.solution_value()+CR[1][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control B
Abat_C_t1 =
CR[2][0]*x1_t1.solution_value()+CR[2][1]*x2_t1.solution_value()+CR[2][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control C
Abat_D_t1 =
CR[3][0]*x1_t1.solution_value()+CR[3][1]*x2_t1.solution_value()+CR[3][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control D
Abat_E_t1 =
CR[4][0]*x1_t1.solution_value()+CR[4][1]*x2_t1.solution_value()+CR[4][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control E
Abat_F_t1 =
CR[5][0]*x1_t1.solution_value()+CR[5][1]*x2_t1.solution_value()+CR[5][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control F
Abat_G_t1 =
CR[6][0]*x1_t1.solution_value()+CR[6][1]*x2_t1.solution_value()+CR[6][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control G
Abat_H_t1 =
CR[7][0]*x1_t1.solution_value()+CR[7][1]*x2_t1.solution_value()+CR[7][2]*x3_t1.solutio
n_value() # Restricción punto control H

# Para el periodo de tiempo 2:
Abat_A_t2 =
CR[8][0]*x1_t1.solution_value()+CR[8][1]*x2_t1.solution_value()+CR[8][2]*x3_t1.solutio
n_value()+CR[8][3]*x1_t2.solution_value()+CR[8][4]*x2_t2.solution_value()+CR[8][5]*x3
_t2.solution_value() # Restricción punto control A
Abat_B_t2 =
CR[9][0]*x1_t1.solution_value()+CR[9][1]*x2_t1.solution_value()+CR[9][2]*x3_t1.solutio
n_value()+CR[9][3]*x1_t2.solution_value()+CR[9][4]*x2_t2.solution_value()+CR[9][5]*x3
_t2.solution_value() # Restricción punto control B
Abat_C_t2 =
CR[10][0]*x1_t1.solution_value()+CR[10][1]*x2_t1.solution_value()+CR[10][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[10][3]*x1_t2.solution_value()+CR[10][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
0][5]*x3_t2.solution_value() # Restricción punto control C
```

```
Abat_D_t2 =
CR[11][0]*x1_t1.solution_value()+CR[11][1]*x2_t1.solution_value()+CR[11][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[11][3]*x1_t2.solution_value()+CR[11][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
1][5]*x3_t2.solution_value() # Restricción punto control D
Abat_E_t2 =
CR[12][0]*x1_t1.solution_value()+CR[12][1]*x2_t1.solution_value()+CR[12][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[12][3]*x1_t2.solution_value()+CR[12][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
2][5]*x3_t2.solution_value() # Restricción punto control E
Abat_F_t2 =
CR[13][0]*x1_t1.solution_value()+CR[13][1]*x2_t1.solution_value()+CR[13][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[13][3]*x1_t2.solution_value()+CR[13][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
3][5]*x3_t2.solution_value() # Restricción punto control F
Abat_G_t2 =
CR[14][0]*x1_t1.solution_value()+CR[14][1]*x2_t1.solution_value()+CR[14][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[14][3]*x1_t2.solution_value()+CR[14][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
4][5]*x3_t2.solution_value() # Restricción punto control G
Abat_H_t2 =
CR[15][0]*x1_t1.solution_value()+CR[15][1]*x2_t1.solution_value()+CR[15][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[15][3]*x1_t2.solution_value()+CR[15][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
5][5]*x3_t2.solution_value() # Restricción punto control H

# Para el periodo de tiempo 3:
Abat_A_t3 =
CR[16][0]*x1_t1.solution_value()+CR[16][1]*x2_t1.solution_value()+CR[16][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[16][3]*x1_t2.solution_value()+CR[16][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
6][5]*x3_t2.solution_value()+CR[16][6]*x1_t3.solution_value()+CR[16][7]*x2_t3.solution
_value()+CR[16][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control A
Abat_B_t3 =
CR[17][0]*x1_t1.solution_value()+CR[17][1]*x2_t1.solution_value()+CR[17][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[17][3]*x1_t2.solution_value()+CR[17][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
7][5]*x3_t2.solution_value()+CR[17][6]*x1_t3.solution_value()+CR[17][7]*x2_t3.solution
_value()+CR[17][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control B
Abat_C_t3 =
CR[18][0]*x1_t1.solution_value()+CR[18][1]*x2_t1.solution_value()+CR[18][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[18][3]*x1_t2.solution_value()+CR[18][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
8][5]*x3_t2.solution_value()+CR[18][6]*x1_t3.solution_value()+CR[18][7]*x2_t3.solution
_value()+CR[18][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control C
Abat_D_t3 =
CR[19][0]*x1_t1.solution_value()+CR[19][1]*x2_t1.solution_value()+CR[19][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[19][3]*x1_t2.solution_value()+CR[19][4]*x2_t2.solution_value()+CR[1
9][5]*x3_t2.solution_value()+CR[19][6]*x1_t3.solution_value()+CR[19][7]*x2_t3.solution
_value()+CR[19][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control D
Abat_E_t3 =
CR[20][0]*x1_t1.solution_value()+CR[20][1]*x2_t1.solution_value()+CR[20][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[20][3]*x1_t2.solution_value()+CR[20][4]*x2_t2.solution_value()+CR[2
0][5]*x3_t2.solution_value()+CR[20][6]*x1_t3.solution_value()+CR[20][7]*x2_t3.solution
_value()+CR[20][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control E
Abat_F_t3 =
CR[21][0]*x1_t1.solution_value()+CR[21][1]*x2_t1.solution_value()+CR[21][2]*x3_t1.sol
ution_value()+CR[21][3]*x1_t2.solution_value()+CR[21][4]*x2_t2.solution_value()+CR[2
```

1][5]*x3_t2.solution_value()+CR[21][6]*x1_t3.solution_value()+CR[21][7]*x2_t3.solution_value()+CR[21][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control F
Abat_G_t3 = CR[22][0]*x1_t1.solution_value()+CR[22][1]*x2_t1.solution_value()+CR[22][2]*x3_t1.solution_value()+CR[22][3]*x1_t2.solution_value()+CR[22][4]*x2_t2.solution_value()+CR[22][5]*x3_t2.solution_value()+CR[22][6]*x1_t3.solution_value()+CR[22][7]*x2_t3.solution_value()+CR[22][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control G
Abat_H_t3 = CR[23][0]*x1_t1.solution_value()+CR[23][1]*x2_t1.solution_value()+CR[23][2]*x3_t1.solution_value()+CR[23][3]*x1_t2.solution_value()+CR[23][4]*x2_t2.solution_value()+CR[23][5]*x3_t2.solution_value()+CR[23][6]*x1_t3.solution_value()+CR[23][7]*x2_t3.solution_value()+CR[23][8]*x3_t3.solution_value() # Restricción punto control H

Apéndice 2. Desarrollo para el cálculo del abatimiento en el acuífero.

```
# Caudales para calcular el abatimiento
import numpy as np
periodosT = 50;
NP = 3;
NC = 8;
suma = 0;
deltaQ2=[ ];
for j in range (NP):
    for k in range (periodosT):
        if k == 0 :
            deltaQ = Qsc[j][k]
            deltaQ2.append(deltaQ)
        elif k > 0 :
            deltaQ = Qsc[j][k]-Qsc[j][k-1]
            deltaQ2.append(deltaQ);
deltaQ2_2 = np.array(deltaQ2).reshape(NP,periodosT);
print(deltaQ2_2)

# Cálculo del abatimiento
import numpy as np
periodosT = 50;
NP = 3;
NC = 8;
suma = 0;
sumaInc = 0;
Abat2 =[];
Abat2_2=[];

for k in range (periodosT):
    suma=0;
    print('k=', k);
    for m in range (NC):
        print('m=', m);
        suma=0;
```

```
        pp = k-1;
        if pp >= 0 :
            for j in range (NP):
                print('j=', j);
                sumaInc=0;
                for p in range (k):
                    Incremento = CR[m + (k * NC)][j + ((p+1) * NP)] * deltaQ2_2[j][p+1];
                    sumaInc = sumaInc + Incremento;
                abat = CR[m + (k * NC)][j] * Qsc[j][0] + sumaInc;
                suma = suma + abat;

        elif pp < 0 :
            for j in range (NP):
                print('ja=', j);
                abat = CR[m + (k * NC)][j] * Qsc[j][0] ;
                suma = suma + abat;
        Abat2.append(suma);
        print(suma);
Abat2_2 = np.array(Abat2).reshape(periodosT,NC);
print(Abat2_2)
```

Apéndice 3. Desarrollo para el efecto transitorio en acuitardo.

```
# Cálculo del tiempo adimensional
tiempoAdimensional = [];
for k in range(1,periodosT+1):
    t_adimensional = (K_prima * deltaT*k)/(Ss_prima * b_prima**2);
    tiempoAdimensional.append(t_adimensional);
tiempoAdimensional_2 = np.array(tiempoAdimensional).reshape(periodosT);
print(tiempoAdimensional_2);

# Efecto transitorio en acuitardo – Bredehoeft Pinder
k2 = [ ];
b2=[ ];
Abat2=[ ];
suma = 0;
suma1 = 0;
deltaBprima = 4;
divAcuitardo = int(b_prima / deltaBprima);
for k in range(periodosT):
    for z in range(divAcuitardo+1):
        suma = 0;
        suma1 = 0;
        for n in range(0,50):
            b = (deltaBprima / b_prima) * z;
            x = (((2 * n) + 1) + (b))/(4 * tiempoAdimensional_2[k])**0.5;
            x1 = (((2 * n) + 1) - (b))/(4 * tiempoAdimensional_2[k])**0.5;
            Res = special.erf(x) - special.erf(x1);
            suma = suma + Res;
```

```
        print ('suma = ', suma);
        Abat = suma * Abat_inicio[k];
        k2.append(k);
        b2.append(b);
        Abat2.append(Abat)
k2_2 = np.array(k2).reshape(periodosT*(divAcuitardo+1),1);
b2_2 = np.array(b2).reshape(periodosT*(divAcuitardo+1),1);
Abat2_2 = np.array(Abat2).reshape(periodosT,divAcuitardo+1);
print(Abat2_2);
```

Apéndice 4. Desarrollo para el cálculo del hundimiento en el acuitardo.

```
# Cálculo de los hundimientos en acuitardo
miuLame = 5.0e6;
gamaLame = 5.0e6;
densidadAgua = 1000;
Gravedad = 9.81;
areaTrapecio = [ ];
areaTiempo = [ ];
DifareaTrapecio = [ ];
hunTrapecio =[ ];
hunTiempo = [ ];
hunAcumTiempo = [ ];
C = (densidadAgua * Gravedad ) / (2*miuLame + gamaLame);# Se sacó deltaBprima
de la ecuación... se considera en el cálculo del área
print(C)
hundimiento = 0;
suma2=0;

for k in range (periodosT):
    hundimiento = 0
    suma2=0;
    for z in range (1,divAcuitardo+1):
        areaTrap = ((Abat2_2[k,z] + Abat2_2[k,z-1])/2) * deltaBprima;
        areaTrapecio.append(areaTrap);
        suma2 = suma2 + areaTrap;
    areaTiempo.append(suma2)
AreaTrapecio_2 = np.array(areaTrapecio).reshape(periodosT,divAcuitardo);
AreaTiempo_2 = np.array(areaTiempo).reshape(1,periodosT);
print(AreaTrapecio_2);
print(AreaTiempo_2);

for z in range (divAcuitardo):
    hundimiento = 0
    suma2=0;
    for k in range (0,periodosT):
        if k == 0 :
            DifareaTrap = AreaTrapecio_2[k,z];
            DifareaTrapecio.append(DifareaTrap);
```

```
        elif k > 0 :
            DifareaTrap = AreaTrapecio_2[k,z] - AreaTrapecio_2[k-1,z];
            DifareaTrapecio.append(DifareaTrap);
DifareaTrapecio_2 = np.array(DifareaTrapecio).reshape(divAcuitardo,periodosT);
print(DifareaTrapecio_2);

for z in range (0,divAcuitardo):
    hundimiento = 0
    suma2=0;
    for k in range (0,periodosT):
        if DifareaTrapecio_2[z,k] > 0 :
            hundimientoTrapecio = (DifareaTrapecio_2[z,k] * C) * 100; #Cálculo en
centrimetros
        elif DifareaTrapecio_2[z,k] < 0:
            hundimientoTrapecio = 0;
        hunTrapecio.append(hundimientoTrapecio);
hundTrapecio_2 = np.array(hunTrapecio).reshape(divAcuitardo,periodosT)
print(hundTrapecio_2);

for k in range (0,periodosT):
    suma2 = 0;
    for z in range (0,divAcuitardo):
        suma2 = hundTrapecio_2[z,k] + suma2;
    hunTiempo.append(suma2);
hundTiempo_2 = np.array(hunTiempo).reshape(1,periodosT);
print(hundTiempo_2);

suma3=0;
for k in range (0,periodosT):
    suma3 = hundTiempo_2[0,k] + suma3;
    hunAcumTiempo.append(suma3);
hundAcumTiempo_2 = np.array(hunAcumTiempo).reshape(1,periodosT);
print(hundAcumTiempo_2);
```

Apéndice 5. Desarrollo para el cálculo del efecto transitorio en el acuitardo con Teorema de Duhamel.

```
# Inicio
from scipy import special
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import exp, pi, sin, ceil
from mpmath import *

# Información inicial del tiempo y características del acuitardo:
K_prima = 1e-8 * 31536000;
tiempo = 50;
deltaT = 1;
periodosT = int(tiempo/deltaT);
```

```
Ss_prima = 0.02;
b_prima = 40;
DeltaTau = 0.5

# Inicio Teorema de Duhamel
Tau1 = [ ];
tmenosTau1 = [ ];
t_D_1 = [ ];
s_prima1 = [ ];
sumaIntTau = 0;
for k in range(1,tiempo+1):
    s_prima1=[ ]
    numIntTau = int(k / DeltaTau);
    sumaIntTau = numIntTau + 1 + sumaIntTau;
    print('************************************************ t = ', k)
    for kk in range(0,numIntTau+1):
        Tau = kk * DeltaTau;
        Tau1.append(Tau);
        tmenosTau = k - Tau;
        tmenosTau1.append(tmenosTau);
        t_D = (K_prima/Ss_prima)*(Tau / b_prima**2);
        t_D_1.append(t_D);
        a = int(ceil(k - Tau + deltaT - 1));
        b = int(ceil(k - Tau - 1));
        if tmenosTau >= 1 :
            deltaAbat = (Abat_inicio2[0,a]-Abat_inicio2[0,b])/deltaT
        elif tmenosTau < 1 :
            deltaAbat = (Abat_inicio2[0,a]-Abat_inicio2[0,0])/deltaT
        for z in range(divAcuitardo + 1):
            suma = 0;
            suma1 = 0;
            for n in range(1,6):
                Coef = exp(-(n**2 * pi**2 * t_D)) * sin(n * pi * b2[z,0])/(n * pi);
                suma = suma + Coef;
            suma1 = suma * 2
            u_zTau = 1 - b2[z,0] - suma1
            s_prima = u_zTau * deltaAbat * DeltaTau
            s_prima1.append(s_prima)
    s_prima2 = np.array(s_prima1).reshape(numIntTau+1,divAcuitardo+1);
    s_prima3 = np.sum(s_prima2, axis = 0)
    print(s_prima3)
    print();
```