

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

POSGRADO EN INGENIERÍA AGRÍCOLA Y USO INTEGRAL DEL AGUA

**SIMULACIÓN NUMÉRICA NO LINEAL ESFUERZO-DEFORMACIÓN
DE LA CUBIERTA PLÁSTICA DE UN INVERNADERO A TRAVÉS DEL
MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO**

TESIS

**QUE COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA AGRÍCOLA Y USO INTEGRAL DEL AGUA**



DIRECCION GENERAL ACADEMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXAMENES PROFESIONALES

PRESENTA:

CASTILLO MÉNDEZ JOSÉ CARLOS

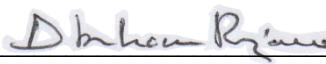
CHAPINGO, MEXICO, DICIEMBRE DE 2016



**SIMULACIÓN NUMÉRICA NO LINEAL ESFUERZO-DEFORMACIÓN DE LA
CUBIERTA PLÁSTICA DE UN INVERNADERO A TRAVÉS DEL MÉTODO
DEL ELEMENTO FINITO**

Tesis realizada por el **Ing. José Carlos Castillo Méndez** bajo la supervisión del Comité Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

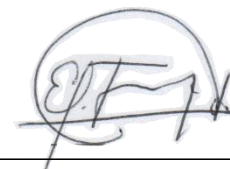
MAESTRO EN INGENIERÍA AGRÍCOLA Y USO INTEGRAL DEL AGUA

DIRECTOR: _____

Dr. Abraham Rojano Aguilar

ASESOR: _____

Dra. Raquel Salazar Moreno

ASESOR: _____

M. I. Esteban Isidro Pioquinto

AGRADECIMIENTOS

A la **Universidad Autónoma Chapingo**, mi alma mater, gracias por permitirme ser parte de tu gloriosa historia.

A profesores, técnicos y administrativos del **Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola** y del **Posgrado de Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua**, gracias por el granito de arena aportado para mi formación profesional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, **CONACYT**, por el apoyo de manutención otorgado para la realización de estudios de posgrado.

Al Consejo Mexiquense de Ciencia y Tecnología, **COMECYT**, por el apoyo financiero otorgado para realizar mi estancia de investigación en el extranjero.

Al **Dr. Abraham Rojano Aguilar**, gracias por apoyo incondicional al realizar este trabajo de investigación, por sus consejos, sus atinadas recomendaciones y la motivación siempre brindada.

Al **Dr. Eduardo Garzón Garzón** del departamento de Ingeniería de Construcción de la Universidad de Almería, España, gracias por la oportunidad, la confianza y las facilidades otorgadas para la realización de la estancia de investigación en dicha universidad.

A la **Dra. Raquel Salazar Moreno**, por la disposición, profesionalismo y el apoyo otorgado en la realización de este trabajo.

Al **M.I. Esteban Isidro Pioquinto**, por la disposición, profesionalismo y el apoyo otorgado en la realización de este trabajo.

A todas y cada una de las personas que me acompañaron y que compartimos juntos esta aventura llamada Chapingo, sin ustedes esto difícilmente hubiera sido posible, gracias totales.

A MI FAMILIA.

DEDICATORIA

“A la persona más importante en mi vida, a mi motor e inspiración para seguir adelante, a quien le debo todo lo que tengo, al mayor tesoro que la vida me pudo dar: **A MI MADRE.**”

José Carlos Castillo Méndez, diciembre de 2016

DATOS BIOGRÁFICOS

Nace en San Cristóbal de las Casa, Chiapas el 24 de febrero de 1991, cursó sus estudios de bachillerato en el Colegio de Bachilleres de Chiapas, plantel 11, en 2009 ingresa a la Universidad Autónoma Chapingo a cursar propedéutico en la sede central, en 2010 ingresa al Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola, obteniendo su título en julio de 2014 por Mérito Académico, en agosto de ese mismo año ingresa al Posgrado de Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua, obteniendo el grado en diciembre de 2016.



**SIMULACIÓN NUMÉRICA NO LINEAL ESFUERZO-DEFORMACIÓN DE LA
CUBIERTA PLÁSTICA DE UN INVERNADERO A TRAVÉS DEL MÉTODO DEL
ELEMENTO FINITO
NONLINEAR NUMERICAL SIMULATION STRESS-STRAIN OF THE PLASTIC
COVER OF A GREENHOUSE USING THE FINITE ELEMENT METHOD**

Castillo Carlos.¹ Rojano Abraham²

RESUMEN

En este trabajo se realizó una simulación numérica a través de método del elemento finito para conocer el comportamiento mecánico no lineal del polietileno de baja densidad, utilizado como cubierta plástica flexible en un invernadero tipo túnel, se consideraron cargas debidas al viento y peso del mismo, para la relación no lineal esfuerzo-deformación se tomó un modelo hiperelástico, también se tomó en cuenta la no linealidad que presenta la geometría al estar sujeta a grandes deformaciones, se dedujo la ecuación de gobierno a partir del equilibrio interno y se obtuvo su forma débil a través del método de Galerkin. Para la geometría se utilizó una malla tetraédrica con 7201 nodos y 20103 elementos, se utilizaron datos del módulo de elasticidad $E = 150$ MPa y el coeficiente de Poisson $\nu = 0.4$ reportados en la literatura para el LDPE, para el cálculo de las cargas debidas al viento se utilizó el manual de diseño por viento de la comisión federal de electricidad, se utilizó el método de Newton-Raphson (N-R) para la solución del sistema de ecuaciones no lineales utilizando como primera aproximación la solución lineal, se logró la convergencia con 200 iteraciones obteniéndose desplazamientos máximos de 0.0349m y 0.0446m en el barlovento y arco superior respectivamente, para los esfuerzos utilizo el criterio de Von Mises y se obtuvieron los valores máximos de 10.616 MPa, 10.591MPa y los valores de máximas deformaciones equivalentes de 4.55% y 8.2049% en las zonas correspondientes anteriormente mencionadas, para la visualización de resultados se simuló un ciclo de carga, se realizaron los programas necesarios en el software MATLAB y el mallado se realizó en el software GMSH.

Palabras claves: simulación; esfuerzo-deformación; desplazamiento; elemento finito; cubierta; invernadero

ABSTRACT

In this work, a numerical simulation was performed using the finite element method to know the nonlinear mechanical behavior of low density polyethylene, used as flexible plastic cover in a greenhouse type tunnel, loads due to wind and weight were considered, for the nonlinear stress-strain relationship a hyperelastic model was taken, the nonlinearity of the geometry was also taken into account when subjected to large deformations, the equation of government was deduced from the internal equilibrium and its weak form through the Galerkin's method. For the geometry a tetrahedral mesh with 7201 nodes and 20103 elements was used, we used data of the modulus of elasticity $E = 150$ MPa, and of Poisson's ratio $\nu = 0.4$ reported in the literature for LDPE, for the calculation of loads due to wind the design manual by wind of the federal electricity commission was used, Newton-Raphson method (N-R) was used to solve the system of nonlinear equations using as a first approximation the linear solution, convergence was achieved with 200 iterations obtaining maximum displacements of 0.0349m and 0.0446m in the windward and upper arch respectively, for the stresses used the Von Mises criterion and obtained the maximum values of 10.616 MPa, 10.591MPa and the values of maximum equivalent deformations of 4.55% and 8.2049% in the corresponding zones mentioned above, for the visualization of results a load cycle was simulated, the necessary programs were realized in the software MATLAB and the meshing was realized in the software GMSH.

Keywords: simulation; Strain-strain; displacement; Finite element; cover; greenhouse

¹ Tesista ² Director

TABLA DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	III
DEDICATORIA.....	IV
DATOS BIBLIOGRÁFICOS.....	V
RESUMEN	VI
ABSTRAC.....	VI
LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE CUADROS.....	X
LISTA DE SÍMBOLOS	XI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Simulación numérica.....	1
1.2 Invernadero y su cubierta.....	1
2. OBJETIVOS	3
2.1 Objetivo general	3
2.2 Objetivos específicos.....	3
3. HIPÓTESIS	3
4. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.	4
4.1 Medio continuo.	4
4.1.2 Desplazamiento.....	5
4.1.1 Deformación	6
4.1.3 Esfuerzo	8
4.1.4 Equilibrio, tensores de tensión y deformación	9
4.1.4 Teoría de fallas (criterio de Von Mises)	10
4.1.5 No linealidad en el análisis de sólidos continuos.....	11
4.1.6 Ecuación de gobierno	13
4.2 Método del elemento finito.	15
4.2.1 Pre-proceso.....	17
4.2.2 Proceso	24
4.2.3 Post proceso	45
4.3 Agricultura protegida	46

4.3.1 Definición agricultura protegida.....	46
4.3.2 Invernadero	46
4.3.3 Tipos de cubiertas	46
5. MATERIALES Y METODOLOGÍA	48
5.1 Materiales	48
5.2 Metodología	48
5.2.1 Propiedades del material	49
5.2.2 Geometría	49
5.2.3 Ecuación de gobierno	50
5.2.4 Condiciones de frontera	51
5.2.5 Condiciones de carga	52
5.2.6. Discretización de la geometría	56
5.2.7 Discretización de la ecuación de gobierno	56
5.2.8 Interpolación.....	56
5.2.9 Ensamble	57
5.2.10 Implementación de las condiciones de frontera	59
5.2.11 Solución al sistema	59
5.2.12 Post Proceso.....	62
6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	64
6.1 Resultados	64
6.2 Discusión	83
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	87
8. REFERENCIAS.....	88
ANEXO A. Teorema de Green.....	93
ANEXO B. Metodología para cálculo de cargas por viento	95
ANEXO C. Código en MATLAB	98
ANEXO D. OTROS EJEMPLOS APLICANDO EL CODIGO	117

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Configuración del medio continuo.	4
Figura 2. Descripción espacial y material de una propiedad.	5
Figura 3. Configuración del desplazamiento.	6
Figura 4. Configuración de la deformación.	7
Figura 5. Fuerzas másicas en el medio continuo.....	8
Figura 6. Fuerzas de superficie en el medio continuo.	9
Figura 7. Esfuerzos en elemento cubico.	9
Figura 8. Metodología del FEM.	17
Figura 9. Elementos de la discretización.	18
Figura 10. Triangulación delaunay.....	19
Figura 11. Formación de una caja rectangular con tetraedros.	19
Figura 12. Triangulación Delaunay en 3D para generar un mallado tetraédrico.....	20
Figura 13. Desplazamientos en elemento tetraédrico	25
Figura 14. Elemento maestro.	28
Figura 15. Proceso de iteración Newton-Raphon.	44
Figura 16. Proceso de iteración Newton-Raphon modificado.	45
Figura 17. Algoritmo FEM.	48
Figura 18. Dimensiones para el invernadero.....	49
Figura 19. Vista isométrica del invernadero tipo túnel.	50
Figura 20. Sección para el análisis.	50
Figura 21. Condiciones de Frontera.	51
Figura 22. Coeficientes de presión en la cubierta.	52
Figura 23. Mallado de la geometría.....	56
Figura 24. Variación de la norma de desplazamiento con las iteraciones.	64
Figura 25. Variación del desplazamiento del nodo: 12451 con las iteraciones.	64
Figura 26. Variación del incremento de fuerza con las iteraciones.	65
Figura 27. Variación del incremento de desplazamiento con las iteraciones.	65
Figura 28. Variación del incremento de la norma de desplazamiento con la fuerza.....	66
Figura 29. Variación del incremento del desplazamiento del nodo 12451 con la fuerza. ...	66
Figura 30. Variación del error durante las iteraciones.	67
Figura 31. Variación del esfuerzo durante las iteraciones.....	67
Figura 32. Variación de la deformación durante las iteraciones.	68
Figura 33. Grafica de la norma de esfuerzo y deformación.	68
Figura 34. Grafica del esfuerzo y deformación para el nodo 11467.	69
Figura 35. Malla de la geometría deformada vista isométrica.	69
Figura 36. Malla de la geometría deformada vista frontal.....	70
Figura 37. Vectores de deformación, vista isométrica.....	71
Figura 38. Vectores de deformación, vista frontal.	71
Figura 39. Vectores acercamiento a los vectores.....	71

Figura 40. Desplazamientos en el cuerpo, vista isométrica.	72
Figura 41. Desplazamientos en el cuerpo, vista superior.	72
Figura 42. Desplazamientos en el cuerpo, vista frontal.....	73
Figura 43. Desplazamientos en el cuerpo, vista lateral.	73
Figura 44. Esfuerzos en el cuerpo vista isométrica.	74
Figura 45. Esfuerzos en el cuerpo vista superior.	74
Figura 46. Esfuerzos en el cuerpo vista frontal.....	75
Figura 47. Esfuerzos en el cuerpo vista lateral.	75
Figura 48. Deformación en el cuerpo vista isométrica.	76
Figura 49. Deformación en el cuerpo vista superior.	76
Figura 50. Deformación en el cuerpo vista frontal.....	77
Figura 51. Deformación en el cuerpo vista lateral.	77
Figura 52. Desplazamiento en la pared barlovento plano medio.....	78
Figura 53. Desplazamiento en el arco superior plano medio.....	78
Figura 54. Esfuerzos en la pared barlovento plano medio..	79
Figura 55. Esfuerzos en la pared barlovento plano lateral.....	79
Figura 56. Esfuerzos en el arco superior plano central.....	80
Figura 57. Esfuerzos en el arco superior plano lateral.....	80
Figura 58. Deformaciones en la pared barlovento plano central.....	81
Figura 59. Deformaciones en la pared barlovento plano lateral.	81
Figura 60. Deformaciones en el arco superior plano medio.	82
Figura 61. Deformaciones en el arco superior plano medio.	82

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Valor de las variables según el terreno	54
Cuadro 2. Valores de la carga en la cubierta.....	55
Cuadro 3. Ensamble matriz global no lineal.....	57
Cuadro 4. Ensamble matriz global lineal.	57
Cuadro 5. Ensamble del vector de cargas global debido a las fuerzas de tracción.	58
Cuadro 6. Ensamble del vector global de carga debido al peso.....	58
Cuadro 7. Implementación de las condiciones de frontera en la matriz de rigidez y vector de fuerzas.	59
Cuadro 8. Solución al sistema lineal.	59
Cuadro 9. Calculo de esfuerzos y deformaciones (lineal).....	60
Cuadro 10. Solución al sistema no lineal.	61
Cuadro 11. Calculo de esfuerzos y deformaciones no lineales.....	61
Cuadro 12. Interpolación de esfuerzo y deformaciones.	62
Cuadro 13. Realización de la geometría diferenciando los valores de variables por medio de interpolación de colores.....	63

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω_0	Configuración de referencia	$\mathbf{n}$	Vector normal a la superficie
R^3	Espacio de referencia	n_x, n_y, n_z	Componentes del vector normal
$\mathbf{X}$	Vector de posición en una configuración de referencia	$\tilde{\mathbf{u}}$	desplazamiento aproximado
t	tiempo	dS	Diferencial de superficie
∇	Operador nabra	a_i	Coefficientes de interpolación
$\nabla \mathbf{F}$	gradiente de deformación	$\mathbf{a}^e$	Desplazamientos en el elemento
$\otimes$	Producto tensorial	$\mathbf{a}$	Desplazamientos calculados
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de esfuerzo	N_i	Funciones de forma
σ_{ij}	Componentes del tensor de esfuerzo	ξ, η, ζ	Coordenadas naturales de las funciones de forma
$\boldsymbol{\epsilon}$	Tensor de deformación	$\mathbf{J}$	Matriz jacobiana
ϵ_{ij}	Componentes del tensor de deformación	$\mathbf{A}$	Matriz inversa del jacobiano
W_D	Función de energía de deformación	A_{ij}	Elementos de la matriz $\mathbf{A}$
μ	Primer coeficiente de Lamé	$\mathbf{B}_L$	Matriz de derivadas parciales lineal
λ	Segundo coeficiente de Lamé	$\mathbf{B}_{NL}$	Matriz de derivadas parciales no lineal
c_{ijkl}	Tensor del material	$\boldsymbol{\epsilon}_L$	Componente lineal de la deformación
J^2	Invariante cuadrado del tensor del material	$\boldsymbol{\epsilon}_{NL}$	Componente no lineal de la deformación
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamiento	$\boldsymbol{\varphi}^T$	Desplazamiento virtual
$u_x \ u_y \ u_z$	Componentes del vector del desplazamientos	$\mathbf{k}_e$	Matriz de rigidez del elemento
$\mathbf{F}$	Vector de fuerzas de cuerpo	$\mathbf{K}_{Tot}$	Matriz de rigidez global
$f_x \ f_y \ f_z$	Componentes del vector de fuerzas de cuerpo	C	Coefficiente de rigidez
Π	Energía potencial	$\mathbf{F}_{Tot}$	Vector de fuerzas global
U	Energía de deformación	$\mathbf{D}$	Matriz del material
WP	Potencial de trabajo	Δa	Incremento de desplazamiento
V	Volumen del cuerpo	$\boldsymbol{\psi}$	función de desplazamiento
$\mathbf{T}$	Vector de fuerzas de tracción	$\mathbf{R}$	Vector de fuerzas residuales
$T_x \ T_y \ T_z$	Componentes del vector de tracción	$\bar{\mathbf{K}}_T$	Matriz tangente constante
$\mathbf{P}_i$	Vector de fuerzas puntuales	$I_1 \ I_2 \ I_3$	Invariantes del tensor de esfuerzos
∇^2	Operador Laplaciano	$\boldsymbol{\sigma}_{VM}$	Esfuerzo de VonMises
E	Módulo de elasticidad	W_i	Función de peso
ν	Coefficiente de Polisión	$\boldsymbol{\phi}$	Función de desplazamiento virtual
(x, y, z)	Coordenadas cartesianas	$[\phi_x, \phi_y, \phi_z]^T$	Componentes del desplazamiento virtual

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Simulación numérica

Muchos fenómenos que son de interés en la física, ingeniería y ciencia en general, se pueden modelar por ecuaciones diferenciales parciales, la solución a estas ecuaciones generalmente nos da el comportamiento del fenómeno en determinado espacio y tiempo, así se puede conocer su evolución y predecir cómo se comportara tal fenómeno en diferentes circunstancias (Millán *et al.*, 2011; Naya *et al.*, 2016). El problema es que estas ecuaciones son por lo general extremadamente complejas que su solución por el método tradicional analítico es prácticamente imposible, se requiere entonces de la aplicar métodos numéricos para llegar a una solución aproximada (Tirupathi & Ashok, 1999), estos métodos combinados a la constante evolución y desarrollo computacional que se viene dando desde la aparición de las primeras computadoras digitales, en la década de los 50's, han introducido a la investigación científica una herramienta muy poderosa conocida como *simulación computacional* (Kaufmann & Smarr, 1992). El objetivo de la simulación computacional es resolver los modelos teóricos con toda su total complejidad, mediante la resolución numérica de las ecuaciones involucradas, haciendo un uso intensivo y extensivo de ordenadores para la realización de operaciones (Gutiérrez, 2001).

Particularmente en el tema de la mecánica, esta se ocupa del estudio de las deformaciones y las fuerzas en la materia, ya sea si se trata de un sólido, líquido, o gas (Reddy, 2013), en el presente trabajo se estudia un material polimérico el cual presenta un comportamiento no lineal debido las propiedades del material y por el tipo de geometría que presenta el invernadero también se presenta la no linealidad geométrica, lo cual hace que su comportamiento sea complejo y se necesiten de sofisticados métodos numéricos para su solución (Nguyen-Van *et al.*, 2014), dada esta necesidad se utilizó el método del elemento finito ya que este método se considera el más adecuado para la solución de este tipo de problemas, ya que es muy versátil en las complicaciones geométricas.

1.2 Invernadero y su cubierta

Actualmente existe una dura competencia en los mercados internacionales que han empujado desde ya varias décadas a una modernización en el sector agrícola, en este contexto surgió el invernadero, pieza fundamental de la agricultura protegida. Siendo este una construcción agrícola que permite crear un entorno óptimo para el desarrollo de la planta. Su importancia

radica en su capacidad de producción en zonas donde las condiciones climáticas externas o épocas del año no son favorables para los cultivos (Von Elsner *et al.*, 2000)

De las partes que integran al invernadero, la cubierta es esencial, ya que es esta la que permite crear el microclima en el interior y por ende los resultados obtenidos en los cultivos dependerán de ella, existen diferentes tipos de cubiertas que se usan en invernaderos (Castilla & Prados, 2007; Serrano, 2002) dan una información detallada al respecto, de ellas la que actualmente tiene más uso es el polietileno de baja densidad (Tidjani, 2000). Los filmes de polietileno de baja densidad se han usado de manera muy amplia como materiales de cubierta ya que poseen varias características que lo hacen adecuado para este fin, entre las más importantes están la buena transmisión de luz al ser transparente, buena resistencia mecánica al ser flexible y su bajo costo (Dilara & Briassoulis, 2000).

Uno de los grandes problemas que enfrentan los plásticos flexibles al ser utilizados como cubierta de invernaderos es su corta vida útil, esto trae como consecuencia que miles de toneladas de residuos de este material se generen al año, tales residuos generalmente son dejados en el campo o quemado de forma deliberada, lo cual tienen una gran repercusión en aspectos ambientales (Briassoulis, 2004) , bajo este panorama surge la necesidad de entender el porqué de la corta vida útil del plástico, tal problema es complejo y esencialmente requiere de entender el comportamiento mecánico del plástico en diversas situaciones de trabajo.

En si existe poca información sobre el comportamiento mecánico del polietileno de baja densidad en condiciones de ser usado como cubierta de invernadero (Briassoulis *et al.*, 1997), se han realizado diversas investigaciones experimentales para medir parámetros importantes para caracterizar dicho comportamiento, pero para entender la falla o rotura se necesita forzosamente de medir las deformaciones y esfuerzos que presenta el material y su localización dentro de la geometría, tal tarea es muy complicada de realizar de forma experimental ya que se necesitan construir maquetas del invernadero, gran cantidad de sensores y túneles de viento para generar las condiciones de carga apropiadas, lo cual lleva a grandes costes de experimentación, ante esto se buscan alternativas a la obtención de los esfuerzos y deformaciones, una de las alternativas más utilizadas es la de la simulación numérica esfuerzo-deformación (Briassoulis & Schettini, 2003; Garzón *et al.*, 2016).

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo general

- Aplicar el método de los elementos finitos para obtener una simulación computacional del comportamiento mecánico no lineal del LDPE utilizado como cubierta plástica en un invernadero tipo túnel y encontrar los valores máximos de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos así como su localización en la geometría.

2.2 Objetivos específicos

- Realizar un modelo 3D de la geometría y el mallado.
- Realizar el cálculo de las condiciones de carga a las que está sujeto el invernadero.
- Realizar los programas necesarios para el cálculo en MATLAB.

3. HIPÓTESIS

A través del método del elemento finito es posible obtener una solución al problema no lineal del comportamiento mecánico de la cubierta plástica utilizada en invernaderos y realizar una simulación computacional.

4. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.

4.1 Medio continuo.

Se entiende por medio continuo un conjunto infinito de partículas que forman parte, por ejemplo, de un sólido, un fluido o un gas, que va a ser estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes en el nivel microscópico (nivel atómico o molecular). En consecuencia se admite que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas (Olivella & de Saracíbar, 2002).

Consideremos ahora el sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) de la Figura (1) y la correspondiente base ortonormal $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. En la configuración de referencia Ω_0 el vector de posición $\mathbf{X}$ de una partícula que ocupa un punto P en el espacio (en el instante de referencia) viene dado por:

$$\mathbf{X} = X_1 \hat{e}_1 + X_2 \hat{e}_2 + X_3 \hat{e}_3 \quad (1)$$

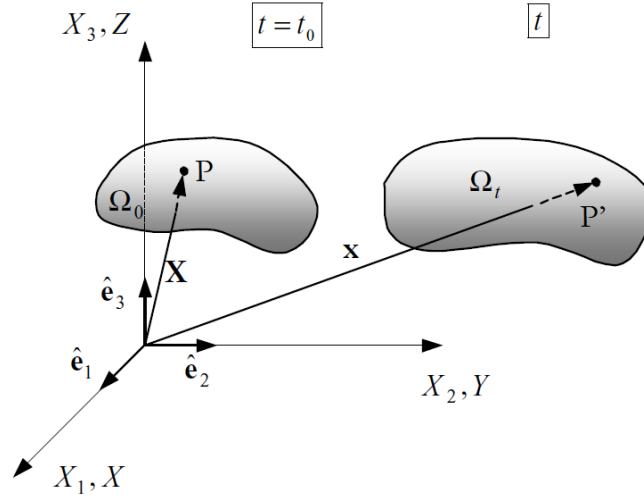


Figura 1. Configuración del medio continuo.

La descripción matemática de las propiedades de las partículas del medio continuo puede hacerse mediante dos formas alternativas: la descripción *material* (generalmente utilizada en Mecánica de Sólidos) y la descripción *espacial* (utilizada generalmente en Mecánica de

Fluidos). Ambas descripciones se diferencian esencialmente por el tipo de argumento coordenadas materiales o coordenadas espaciales (Reddy, 2013)

En la descripción material se describe cierta propiedad γ mediante cierta función $\rho(X, t): R^3 \times R^+ \rightarrow R^+$ donde el argumento X son las coordenadas materiales, es decir

$$\rho = \rho(X, t) = (X_1, X_2, X_3, t) \quad (2)$$

Se puede ver que si se fijan los tres argumentos de la ecuación (2) se está siguiendo una partícula determinada, de ahí proviene la denominación de descripción material.

En la descripción espacial la atención se centra en un punto en el espacio. Se describe la propiedad como una función $\rho(x, t): R^3 \times R^+ \rightarrow R^+$ del punto, del espacio y del tiempo

$$\rho = \rho(x, t) = (x, x_2, x_3, t) \quad (3)$$

De tal forma que al asignar un cierto valor al argumento x en $\rho = \rho(x, t)$ se obtiene la evolución del parámetro para distintas partículas que van pasando por dicho punto del espacio a lo largo del tiempo. Por otro lado, al fijar el argumento tiempo de la ecuación (3) se obtiene una distribución instantánea de la propiedad en el espacio (Olivella & de Saracíbar, 2002). En la figura (2) se muestran ambos procedimientos

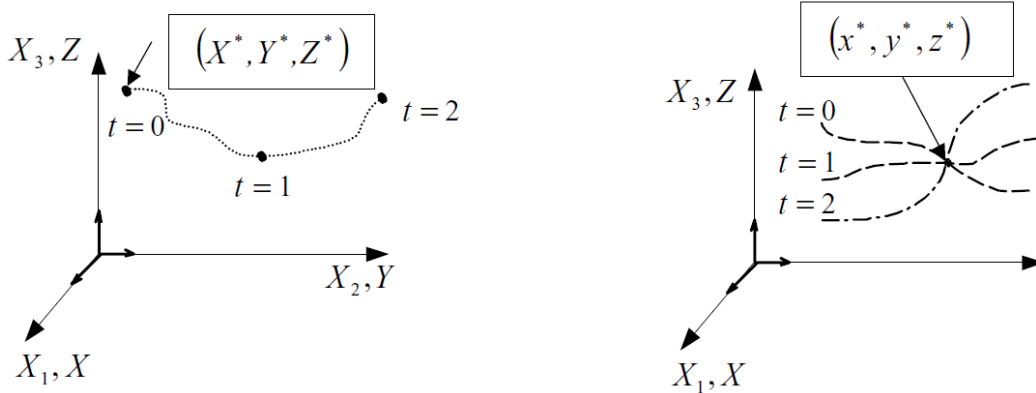


Figura 2. Descripción espacial y material de una propiedad.

4.1.2 Desplazamiento

El desplazamiento es la diferencia entre los vectores de posición de una misma partícula en las configuraciones actual y la de referencia. El desplazamiento de una partícula P en un instante determinado viene definido por el vector $\mathbf{u}$ que une los puntos del espacio P de la posición inicial

y P' que es la posición actual de la partícula. El desplazamiento de todas las partículas del medio continuo define el campo vectorial de desplazamientos.

$$U(X, t) = x(X, t) - X \quad (4)$$

$$U_i(X, t) = x_i(X, t) - X_i \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

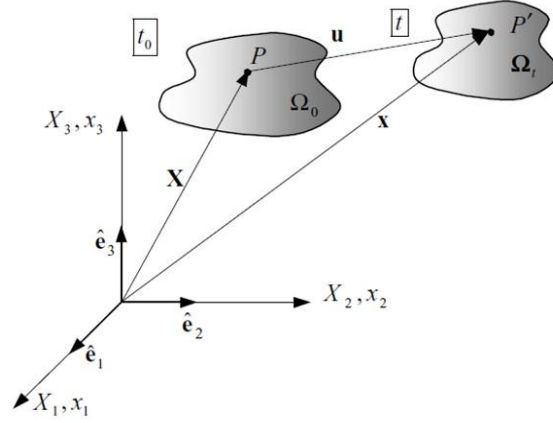


Figura 3. Configuración del desplazamiento.

4.1.1 Deformación

La deformación es el cambio de forma que sufre un continuo, debido al movimiento relativo entre las partículas que lo integran (Levi, 1991), estos movimientos en el continuo pueden ser provocados por una fuerza externa o por efectos térmicos. En el contexto más general, el concepto de deformación se refiere ya no al estudio del movimiento absoluto de partículas, sino del movimiento relativo de una partícula con respecto a otra determinada, situada en el entorno diferenciada de aquella (Olivella & de Saracibar, 2002)

Tensor gradiente de deformación

Consideremos en el medio continuo en movimiento de la figura (3) una partícula P , en la configuración de referencia Ω_0 , y que ocupa un punto en el espacio P' en la configuración actual Ω_t , y una partícula Q situada en un entorno diferencial de P y cuyas posiciones respecto a esta en los instantes de referencia y actual vienen dadas por $d\mathbf{X}$ y $d\mathbf{x}$ respectivamente, como se muestra.

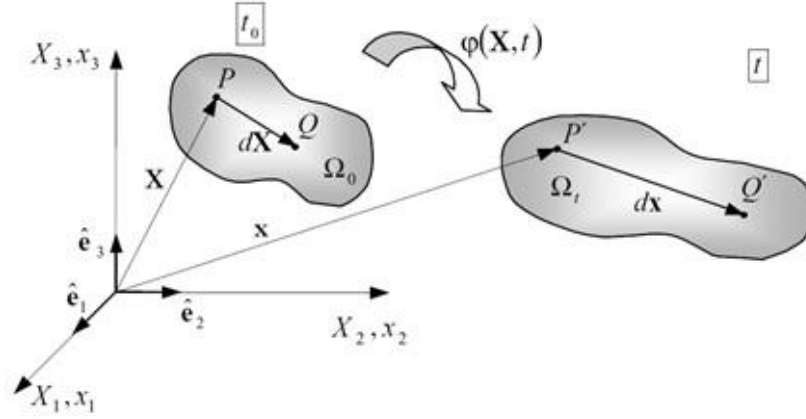


Figura 4. Configuración de la deformación.

Si definimos el movimiento como

$$x = \gamma(X, t) = x(X, t) \quad (5a)$$

$$x_i = \gamma_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (5b)$$

Diferenciando la ecuación (4b) con respecto a las coordenadas materiales X resulta

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (6)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

La ecuación (5), es la llamada ecuación fundamental de la deformación, esta ecuación también define al tensor gradiente de deformación:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \bar{\nabla} \quad (7a)$$

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{x} \otimes \bar{\nabla}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (7b)$$

El tensor gradiente de la deformación contiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo t , de todas las partículas materiales en el entorno diferencial de una configuración dada, identificada por las coordenadas materiales $\mathbf{X}$, la ecuación (6) proporciona del vector de posición relativo $d\mathbf{x}$ en función de la correspondiente posición relativa $d\mathbf{X}$ en el

instante de referencia. En teoría si se conoce el valor de $\mathbf{F}$ se dispone de la información asociada al concepto general de deformación.

4.1.3 Esfuerzo

Antes de definir el concepto de esfuerzo, se define el concepto de fuerza, las fuerzas que pueden actuar sobre un medio continuo pueden ser de dos tipos: fuerzas másicas y fuerzas de superficie

Fuerza

Fuerzas másicas

Las fuerzas másicas son las que se ejercen fuerza a distancia sobre las partículas del interior del medio continuo. Como ejemplo podemos mencionar las fuerzas gravitatorias, las inerciales o las de atracción magnética.

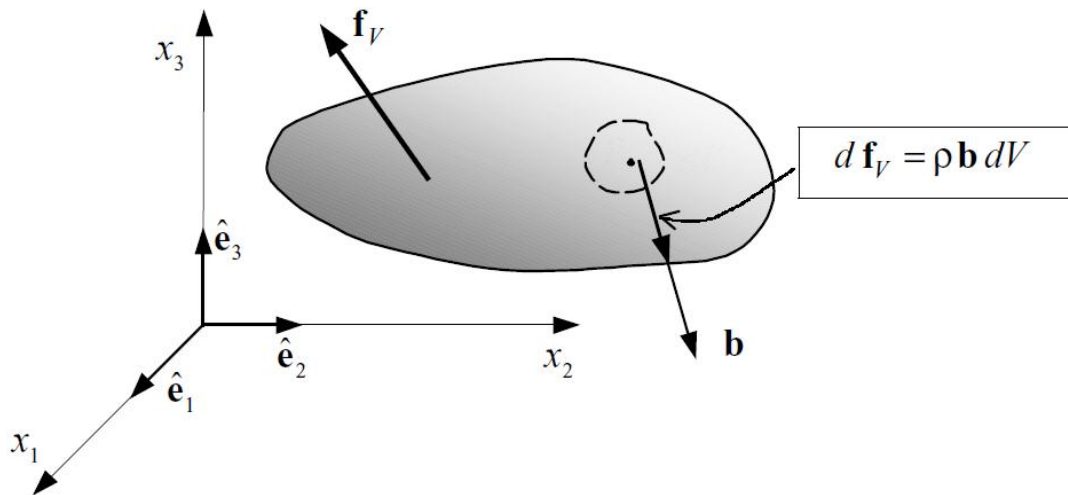


Figura 5. Fuerzas másicas en el medio continuo.

Fuerzas de superficie

Las fuerzas superficiales son las que actúan sobre el contorno del volumen material considerado, pueden considerarse como acciones de contacto de las partículas situadas en el contorno del medio con el exterior del mismo (Kythe & Wei, 2004). Sea $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ la descripción espacial del campo vectorial de las fuerzas superficiales por unidad de superficie, la fuerza resultante sobre un elemento diferencial de la superficie $d\mathbf{S}$ será $\mathbf{t} \cdot d\mathbf{S}$ que se muestra en la figura (6)

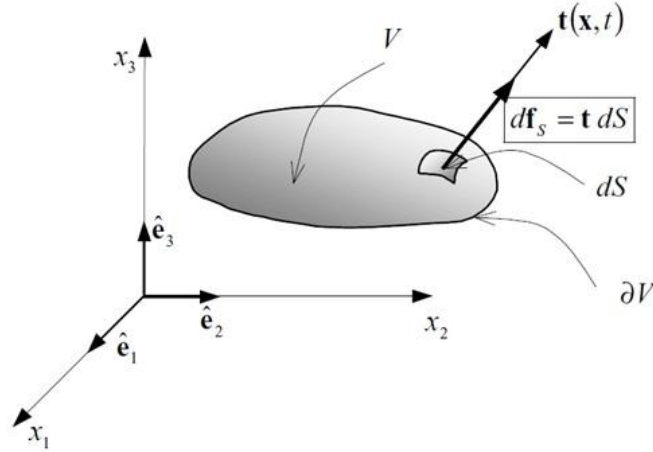


Figura 6. Fuerzas de superficie en el medio continuo.

Podemos definir entonces el esfuerzo como una respuesta interna a las fuerzas externas y describe la intensidad de fuerza interna sobre un plano , tiene magnitudes de fuerza por unidad de área (Gere & Goodno, 2009)

4.1.4 Equilibrio, tensores de tensión y deformación

Nuestro análisis es estático ya que se asume que la condición de equilibrio no se pierde ya que las deformaciones son casi instantáneas y no incluimos como variable tiempo. Por tal motivo podemos extraer un elemento de orden diferencial de nuestro continuo y plantear el equilibrio.

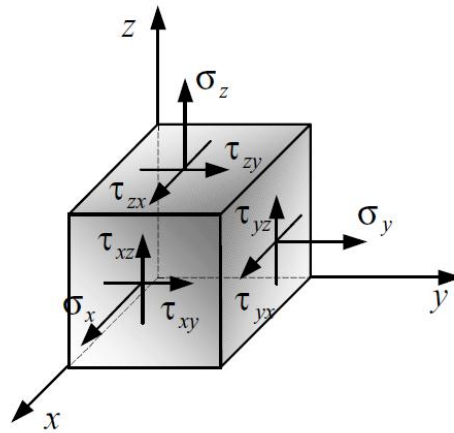


Figura 7. Esfuerzos en elemento cubico.

Nos podemos dar cuenta que el esfuerzo es una magnitud que ya no lo podemos representar con un vector si no con un tensor, a partir de la figura (7), podemos definir el tensor de esfuerzos como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde los elementos en la diagonal principal son conocidos como esfuerzos normales, ya que actúan en dirección normal a la cara en la que están actuando y los demás elemento se le llama esfuerzos cortantes ya que actúan en dirección paralela a la cara donde están actuando, este tensor debido a las condiciones de equilibrio debe de ser simétrico.

Podemos definir el tensor de deformación de la misma manera

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Donde similarmente, los elemento de la diagonal principal son conocidos como deformaciones longitudinales ya que provocan deformaciones en dirección normal y el resto de elemento son conocidos como deformaciones angulares ya que su efecto es de distorsión de cizalla.

Para efectos prácticos de cálculo y tomando en cuenta que los tensores deben de ser simétricos podemos representar tanto el esfuerzo como la deformación como vectores

$$\begin{aligned} \sigma &= [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \\ \epsilon &= [\epsilon_{xx} \quad \sigma\epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \end{aligned} \quad (10)$$

Ahora planteando el equilibrio de fuerzas en un volumen diferencial podemos encontrar las ecuaciones de equilibrio interno también conocida como ecuaciones de Cauchy (Hibbeler, 2006)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

4.1.4 Teoría de fallas (criterio de Von Mises)

Cuando un ingeniero se enfrenta a un problema de diseño usando un material en específico, es importante establecer un límite superior en el estado de esfuerzos que defina la falla del material, si se trata de un material dúctil, como lo es el polímero, la falla suele especificarse mediante el inicio de la cedencia, a este límite suele conocerse como esfuerzo de fluencia y denotado como σ_y (Hibbeler, 2006).

El criterio de Von mises es ampliamente usado en materiales dúctiles y se basa en la densidad de energía de deformación que se define como la energía necesaria para causar un cambio de volumen en el elemento sin cambio en su forma, más la energía necesaria para provocar una distorsión, se calcula a través de los esfuerzos principales del tensor de esfuerzos como se indica

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (12)$$

4.1.5 No linealidad en el análisis de solidos continuos

En el análisis de solidos continuos existen dos principales casos de no linealidad, la no linealidad del material y la no linealidad geométrica (Bonet & Wood, 1997)

Relación desplazamiento-deformación (no linealidad geométrica)

Cuando por la configuración geométrica se producen grandes desplazamientos en alguna dirección específica, surge la llamada no linealidad geométrica, ya que en la relación de desplazamiento-deformación no se pueden despreciar los elementos de alto orden (Kytke & Wei, 2004), en la ecuación (13) se muestra la ecuación que relaciona estas dos magnitudes.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (13)$$

Donde nos podemos dar cuenta que la deformación está compuesta por una parte lineal y otra no lineal, la cual se puede despreciar cuando las deformaciones son pequeñas. Para el análisis no lineal de la geometría, usualmente se utiliza técnicas iterativas en la que cada iteración se va actualizando las coordenadas de la nueva geometría, este análisis se considera muy complejo y se hacen necesario la implementación de potentes métodos numéricos para su solución (Nguyen-Van *et al.*, 2014)

Relación esfuerzo-deformación (No linealidad material)

Cuando la relación entre el esfuerzo y la deformación de un material no es de forma proporcional, entonces hay que utilizar modelos matemáticos más sofisticados que puedan describir su comportamiento (De Borst *et al.*, 2012), generalmente se utilizan modelos no lineales que se derivan partir del gradiente de deformación, tenemos la siguiente relación

$$\sigma = D\epsilon \quad (14)$$

Cuando la matriz D no es constante, entonces esta matriz depende de alguna forma de la historia de desplazamientos, precisamente esta es la llamada no linealidad material en el análisis de sólidos continuos (Kim, 2014)

Hiperelasticidad

Existen muchos materiales en los que se presenta la no linealidad material, de ellos los hiperelásticos son los más comunes, ya que la hiperelasticidad describe de buena forma la no linealidad que se presentan en materiales de uso importante como lo son: cauchos y polímeros (Zdunek *et al.*, 2014)

Dentro de la familia de materiales hiperelásticos existen diferentes modelos matemáticos que describen su comportamiento, de estos modelos el llamado neohookeano es el más utilizado porque presenta menos complicaciones que otros modelos más sofisticados (Wineman, 2005)

Los materiales hiperelásticos se caracterizan por obtener su ecuación constitutiva a partir de una función de energía de deformación (Batra & Ching, 2002), para el caso de materiales neohookeanos la función de energía es:

$$W_D = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 \quad (15a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (15b)$$

Donde las constantes E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de poisson correspondientes al material en cuestión y $J^2 = III_C$ es el tercer invariante del tensor gradiente de deformación. Podemos definir entonces la matriz del material como

$$c_{ijkl} = \lambda' \delta_{kl} + \mu' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (16)$$

Donde los nuevos coeficientes están dados por

$$\lambda' = \frac{\lambda}{J} \quad \mu' = \frac{\mu - \lambda \ln J}{J} \quad (16a)$$

Para el caso del análisis tridimensional esta relación queda

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' - 2\mu' & \lambda' & \lambda' & 0 & 0 & 0 \\ \lambda' & \lambda' - 2\mu' & \lambda' & 0 & 0 & 0 \\ \lambda' & \lambda' & \lambda' - 2\mu' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Podemos darnos cuenta que la matriz D no es constante y depende del gradiente de deformación, que a su vez depende del desplazamiento, lo cual implica que al igual que la no linealidad geométrica, es necesario algún tipo de iteración para resolver este problema.

4.1.6 Ecuación de gobierno

Utilizando las relaciones anteriores, podemos plantear dichas relaciones de tal manera que todo quede en función del desplazamiento, que será nuestra principal incógnita, de esta forma si combinamos la ecuación de equilibrio, las ecuaciones esfuerzo-deformación y las ecuaciones que relacionan los desplazamientos con las deformaciones podemos llegar a la ecuación de gobierno de nuestro problema mecánico el cual en su forma vectorial se presenta en la ecuación (18)

$$\mu'(\nabla^2 \mathbf{u}) + (\lambda' + \mu')[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] + \mu'[(\nabla \mathbf{u}) \cdot (\nabla^2 \mathbf{u})] + \mu'(\lambda' + \mu')\{[\nabla(\nabla \mathbf{u})] \cdot (\nabla \mathbf{u})\} + \mathbf{F} = 0 \quad (18)$$

A manera de ilustrar la complejidad del problema presentamos la ecuación de gobierno en su forma cartesiana, es decir en las componentes de sus vectores

$$\begin{aligned}
& \mu' \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\mu' + \lambda') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu' \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u_y}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right] \\
& (\mu' + \lambda') \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] + \left[\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] + \left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \right\} + F_x = 0 \\
\\
& \mu' \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + (\mu' + \lambda') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu' \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u_y}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right] + \\
& (\mu' + \lambda') \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \frac{\partial u_z}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \right\} + F_y = 0 \quad (19) \\
\\
& \mu' \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + (\mu' + \lambda') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu' \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u_y}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \right] + \\
& (\mu' + \lambda') \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \frac{\partial u_z}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \frac{\partial u_z}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \right\} + F_z = 0
\end{aligned}$$

Podemos darnos cuenta que en efecto la ecuación de gobierno (19) tiene como única incógnita el desplazamiento, $\mathbf{u}$, en el cuerpo, también podemos notar que la complejidad de la ecuación hace imposible una solución analítica y se requiere de métodos numéricos para aproximar la solución.

4.2 Método del elemento finito.

La mente humana posee limitaciones considerables tales que al momento de entender un fenómeno complejo del mundo, no le es posible hacerlo en una sola operación. Por ello una forma usual de proceder de investigadores, científicos e ingenieros es dividir los sistemas en elementos más simples, cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad y después reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes, de estas ideas básicas parte el método del elemento finito (Zienkiewicz & Taylor, 1994).

El método del elemento finito (FEM, por sus siglas en inglés: Finite Element Method) es un método numérico para resolver ecuaciones diferenciales parciales que describen muchos problemas en ingeniería. El FEM se originó en el área de la mecánica estructural y desde entonces se ha extendido su aplicación a otras áreas de mecánica de sólidos, transferencia de calor, electromagnetismo, dinámica de fluidos, entre otras aplicaciones (Kim, 2014).

El principio básico del análisis mediante el método de los elementos finitos, explicado de una forma simplificada consiste en que una región compleja que define un campo continuo se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos finitos. Las propiedades del material y las relaciones gobernantes son consideradas sobre estos elementos finitos y expresadas en términos de valores desconocidos en los bordes de estos. Un proceso de ensamble, una vez consideradas debidamente las cargas que van a actuar y las restricciones, da lugar a un conjunto de ecuaciones, siendo la solución de estas ecuaciones la que da el comportamiento aproximado del continuo (Rao, 2010)

Tirupathi and Ashok (1999) y (De Borst *et al.*, 2012) dan una pequeña reseña histórica sobre el MEF que a continuación se presenta:

- Las ideas básicas del método del elemento finito se originaron gracias a los avances en el análisis estructural de las aeronaves.
- En 1941, Hrenikoff presentó una solución de problemas de elasticidad usando el método de trabajo del marco.
- En un artículo publicado en 1943, Courant usó la interpolación polinomial por partes sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión.
- Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y presentaron sus hallazgos en 1956.

- Clough fue el primero en acuñar y emplear el término de elemento finito en 1960
- Un libro Argyris, publicado en 1955 sobre teoremas de energía y métodos matriciales, cimiento métodos adicionales en los estudios del elemento finito.
- El documento más antiguo en elementos finitos no lineales parece ser que fue de Turner *et al.*, que data de 1960 y, significativamente, se debe también a la industria aeronáutica.
- En los primeros años de la década de 1960, los ingenieros usaron el método para obtener soluciones aproximadas en problemas de análisis de esfuerzos, flujo de fluidos, transferencia de calor y otras áreas.
- Para el comienzo de la no linealidad geométrica, los procedimientos incrementales se adoptaron inicialmente por Turner *et al.* En 1960 y Argyris en 1964 a través de la matriz de rigidez geométrica.
- El primer libro sobre elementos finitos por Zienkiewicz y Chung fue publicado en 1967
- La mayor parte de los otros primeros trabajos sobre la no linealidad geométrica relacionada principalmente con el problema de pandeo lineal y fue llevada a cabo por, entre otros, Holand *et al.* en 1968 y Gallagher *et al.* (1967).
- Los primeros trabajos sobre análisis de material no lineal en placas y láminas en los que se utilizaron métodos simplificados con plastificación súbita fueron de Ang&Lopez en 1968 y Armen *et al.*, en 1970.
- Las bases matemáticas y áreas afines se fijaron en la década de 1970, nuevos desarrollo de elementos, estudios de convergencia y otras áreas afines pertenecen a esta categoría
- El estudio del combinado material y la no linealidad geométrica de placas implicando pandeo perfectamente elastoplástico fue llevado por Harris *et al.*, en 1971.
- El libro de Oden sobre continuos no lineales apareció en 1972
- Actualmente los avances en computadoras mainframe (supercomputadoras) y las disponibilidades de poderosas microcomputadoras han puesto este método al alcance de ingenieros y estudiantes.

El comportamiento de un fenómeno dentro de un sistema depende generalmente de la geometría o dominio del sistema, las propiedades del material o medio, las condiciones de contorno y las condiciones iniciales y de carga a las que está sujeto. En la mayoría de los problemas en ingeniería las geometrías o dominios son muy complejos, así mismo las fronteras y las condiciones iniciales son complicadas por lo tanto es, en general, imposible resolver de forma analítica la ecuación de gobierno. En la práctica, la mayoría de los problemas son resueltos usando métodos numéricos, de estos métodos el FEM es uno de los más populares, ya que cuenta con una sólida base matemática aparte de ser práctico y versátil (G. Liu & Quek, 2003)

Según (Chapra & Canale, 2011) el método del elemento finito sigue una metodología general, independientemente del tipo de problema que se quiera resolver, en la figura (8) se muestra tal metodología



Figura 8. Metodología del FEM.

4.2.1 Pre-proceso

Definición del problema

Para el análisis con elementos finitos es necesario plantear el tipo problema (mecánico estático, mecánico dinámico, mecánica de fluidos, transferencia de calor, etc.) lo cual se realiza definiendo la geometría o dominio, se define la ecuación que gobierna el fenómeno, las condiciones iniciales y las condiciones de cargas y por ultimo las propiedades mecánicas del material (G.-R. Liu & Quek, 2013)

Discretización de la geometría (Mallado).

La discretización de la geometría se realiza a través de la generación de una malla, tal malla tiene como objetivo aproximar el dominio cerrado con elementos simples (triángulos,

cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, etc.). Tal discretización tiene sus principales aplicaciones en ingeniería, por ejemplo, la simulación de piezas mecánicas, piezas estructurales, piezas biomédicas, dinámica de fluidos computacional, análisis electromagnéticos, topografía computacional, animación de gráficos por ordenados, etc. (Guo *et al.*, 2016).

Generación de malla siempre ha sido un proceso lento y propenso a errores (Zienkiewicz *et al.*, 2005), por tal motivo los elementos que se seleccionan para formar tal mallado deben de ser los más simples posibles, triángulo o cuadrilátero en 2D y tetraedro o hexaedro en 3D (Jaśkowiec *et al.*, 2016), aunque actualmente existen elementos más complejos. A continuación se muestran en la figura (9) los elementos mayormente utilizados, en este trabajo se utilizara una malla tetraédrica, por lo cual se profundizara en el tema de la triangulación Delaunay.

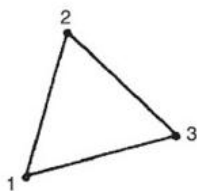
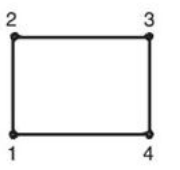
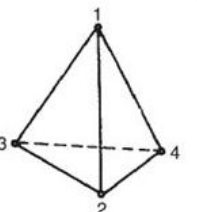
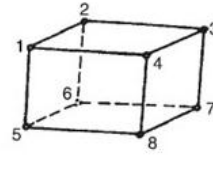
1D	2D		3D	
				
Elemento barra 2 nodos	Triángulo 3 nodos	Cuadrilátero 4 nodos	Tetraedro 4 nodos	Hexaedro 8 nodos

Figura 9. Elementos de la discretización.

Triangulación Delaunay

La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos en un plano o superficie se define como una triangulación de tal manera que la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la triangulación no contiene otro punto del conjunto en su interior(Lo, 2014), en la figura (10) se da una representación de una triangulación Delaunay.

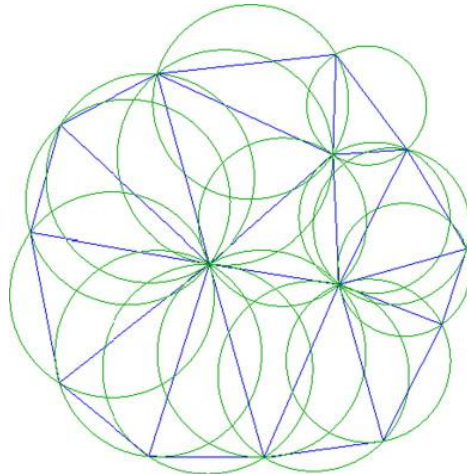


Figura 10. Triangulación delaunay

Para la construcción de una triangulación Delaunay en tres o más dimensiones el algoritmo de inserción es el más popular (Borouchaki & Lo, 1995), en tal algoritmo para un conjunto de puntos 3D, la triangulación inicial es una caja rectangular que consta de cinco o seis tetraedros Delaunay lo suficientemente grande para contener todos los puntos dados, como se muestra en la Figura (11). La triangulación de Delaunay se logra mediante la inserción de puntos de uno en uno en la triangulación inicial (Lo, 2015)

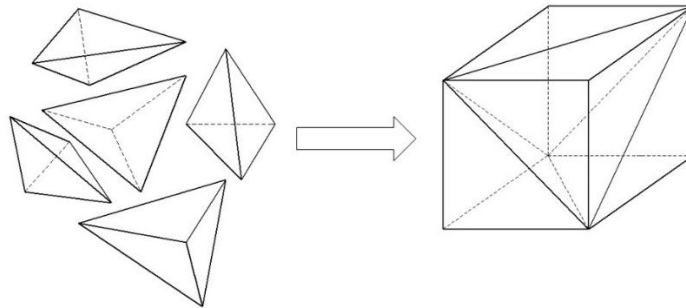


Figura 11. Formación de una caja rectangular con tetraedros.

Cada ciclo de inserción punto se puede dividir en tres pasos (De Berg *et al.*, 2000):

- i) Encontrar el triángulo t de la malla que contiene al punto p que se desea insertar
- ii) Una vez identificado t , realizar la inserción de p de acuerdo a alguno de los siguientes criterios:
 - a) Si el punto p se encuentra al interior del triángulo, unir cada vértice de t a dicho punto, formando así tres nuevos triángulos

- b) Si el punto p se encuentra sobre una de las aristas del triángulo, considerar el triángulo t_2 que comparte esa arista con t y unir los vértices de ambos triángulos a p , formando así cuatro nuevos triángulos.
 - c) Si el punto p se encuentra sobre uno de los vértices del triángulo, el punto no se inserta
- iii) La triangulación resultante tras la inserción del punto p no es necesariamente de Delaunay, por lo que se debe realizar el test del círculo a cada uno de los nuevos triángulos creados en el paso anterior y, en cada caso que falle el test, realizar el intercambio de diagonales correspondiente. Este proceso se repite sobre los triángulos creados por el intercambio de diagonales, y continúa recursivamente hasta obtener nuevamente una triangulación de Delaunay.

En la figura (12), se muestra una triangulación Delaunay en 3D para generar un mallado tetraédrico.

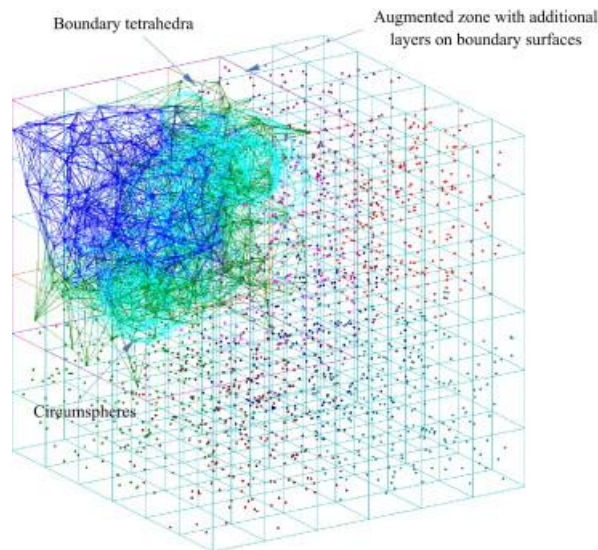


Figura 12. Triangulación Delaunay en 3D para generar un mallado tetraédrico.

Discretización de la ecuación de gobierno.

Una parte importante de la implementación del método del elemento finito implica obtener una forma integral de la ecuación de gobierno (Khennane, 2013), existe para la mecánica de sólidos deformables varias formas de obtenerlo, una de ellas es el enfoque energético en el cual que usa el equilibrio de la energía potencial elástica en el cuerpo.

Energía potencial Π .

La energía potencial total Π de un cuerpo elástico se define como la suma de la energía de deformación unitaria total (U) y el potencial de trabajo:

$$\Pi = \text{Energía de deformación } (U) + \text{Potencial de trabajo } (WP) \quad (20)$$

Para materiales elásticos lineales, la energía de deformación unitaria por unidad de volumen en el cuerpo es $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}$. Para un cuerpo con volumen dado la energía de deformación total U está dada por la ecuación (21)

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (21)$$

El potencial de trabajo está dado por

$$WP = - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \iint_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (22)$$

De esta forma sustituyendo en la ecuación (20) podemos definir que el potencial elástico para un cuerpo viene dado por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV = - \iiint_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \iint_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (23)$$

Al considerarse un cuerpo elástico se genera un sistema conservativo, es decir si el sistema se desplaza desde una configuración dada y se trae de regreso al estado inicial, las fuerzas efectúan un trabajo nulo, independientemente de la trayectoria, de estas aseveraciones surge el principio de la energía potencial mínima que dice: “Para sistemas conservativos, de todos los campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles, aquellos que corresponden a condiciones de equilibrio extremizan la energía potencial total. Si la condición extrema es un mínimo, el estado de equilibrio es estable.” (Tirupathi & Ashok, 1999)

Los desplazamientos cinemáticamente admisibles son aquellos que satisfacen la naturaleza de valor único de los desplazamientos (compatibilidad) y las condiciones de frontera, en el problema donde los desplazamientos son las incógnitas, la compatibilidad se satisface de manera automática.

Método de Rayleigh-Ritz

En medios continuos, puede usarse la energía potencial total Π para encontrar una solución aproximada. El método de Rayleigh-Ritz implica la construcción de un campo de desplazamientos supuestos (Song *et al.*, 2015), y se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}u_x &= \sum a_i \phi_i(x, y, z) \\u_y &= \sum a_j \phi_j(x, y, z) \\u_z &= \sum a_k \phi_k(x, y, z)\end{aligned}\tag{24}$$

Las funciones ϕ_i usualmente son polinomios. Los desplazamientos u_x , u_y y u_z deben de ser cinemáticamente admisibles. Introduciendo relaciones esfuerzo-deformación y deformación-desplazamiento, y sustituyendo en la ecuación (23) resulta:

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n)\tag{25}$$

Donde n es el número de incógnitas independientes. Ahora el extremo con respecto a a_i ($i = 1$ a n) da como resultado un conjunto de n ecuaciones

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n\tag{26}$$

Método de los residuos ponderados

El método de los residuos ponderados es más general ya que usa el conjunto de ecuaciones gobernantes para desarrollar la forma integral, para ilustrar el proceder de este método se considera una representación general de una ecuación gobernante sobre una región V

$$Lu = P\tag{27}$$

Si se introduce una solución aproximada $\tilde{u}$ se produce un error llamado residuo

$$L\tilde{u} - P = e\tag{28}$$

El método consiste en hacer igual a cero el residuo a una función de ponderación W_i

$$\iiint_V W_i (L\tilde{u} - P) dV = 0\tag{29}$$

Si seleccionamos la función de ponderación W_i de la misma forma que las funciones de aproximación, que es lo más usual, entonces se estará usando el método conocido como **Galerkin** (Imai *et al.*, 2016) es decir

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \sum_i^n Q_i G_i \\ W_i &= \phi = \sum_i^n \phi_i G_i\end{aligned}\tag{30}$$

Donde G_i , $i = 1$ a n son funciones base (usualmente polinomios de x, y y z) y los coeficientes ϕ_i son arbitrarios, excepto las que necesiten satisfacer las condiciones de frontera. Las soluciones de estas ecuaciones resultantes para Q_i , da entonces una solución aproximada a $\tilde{u}$.

Método de Galerkin para la elasticidad

La aproximación estándar de Galerkin para el problema variacional puede llevarse a cabo teniendo en cuenta una partición de elementos finitos del dominio (Castillo *et al.*, 2015). Tomando la ecuación de equilibrio en la elasticidad ecuación (11), y aplicando el método de Galerkin queda la ecuación (31)

$$\begin{aligned}\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) \phi_x + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \right) \phi_y \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) \phi_z \right] dV = 0\end{aligned}\tag{31}$$

Donde

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]^T\tag{32}$$

es un desplazamiento arbitrario consistente con las condiciones de frontera de $\mathbf{u}$.

Si $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ es una normal unitaria en un punto de la superficie. Utilizando el teorema de la divergencia también conocido como teorema de Green-Gauss (ver anexo A), e integrando por partes se puede demostrar que de la ecuación (31) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\phi}) dV - \iiint_V \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} dV \\
& - \oint_S [(n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) \phi_x \\
& - (n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz}) \phi_y \\
& - (n_x \tau_{xz} + n_z \tau_{yz} + n_z \sigma_z) \phi_z] dS = 0
\end{aligned} \tag{33}$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\phi})$ es la deformación unitaria correspondiente al campo de desplazamientos arbitrarios $\boldsymbol{\phi}$. Sobre la frontera de la ecuación (33), tenemos $n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = T_x$, etc. En cargas puntuales $(n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) dS$ es equivalente a P_x . Estas son las condiciones de frontera naturales en el problema. Así, la ecuación (34) nos da la *formulación débil* de Galerkin para el análisis tridimensional de esfuerzos:

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\phi}) dV - \iiint_V \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} dV - \oint_S \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T} dS = 0 \tag{34}$$

Donde $\boldsymbol{\phi}$ es un desplazamiento arbitrario consistente con las condiciones de frontera de $\mathbf{u}$ especificadas, ahora se puede usar la ecuación (34) para obtener una solución aproximada.

El método de Galerkin es más general ya que la forma con variación del tipo de la ecuación (11) puede desarrollarse para otras ecuaciones que definan problemas con valor de frontera. El método Galerkin trabaja directamente con la ecuación diferencial y se prefiere sobre el método de Rayleigh-Ritz en problemas donde no se pueda encontrar una función correspondiente a ser minimizada (Okada & Ohata, 2013).

4.2.2 Proceso

Interpolación: funciones de forma

Como se dijo anteriormente, la idea básica del método de elementos finitos es aproximación “a trozos”, es decir, la solución de un problema complicado se obtiene dividiendo la región de interés en regiones pequeñas (elementos finitos) y la aproximación de la solución sobre cada sub-región por una función simple. Por lo tanto, un paso necesario e importante es el de la elección de una función simple de la solución en cada elemento. Las funciones utilizadas para representar el comportamiento de la solución dentro de un elemento se denominan funciones de interpolación o *funciones de forma*. Las funciones de interpolación de tipo

polinomio han sido más ampliamente utilizado en la literatura (Rao, 2010), debido a las siguientes razones:

- I. Es más fácil de formular y computarizar las ecuaciones de elementos finitos con funciones de interpolación de tipo polinómico. En concreto, es más fácil de realizar la diferenciación o integración con polinomios.
- II. Es posible mejorar la exactitud de los resultados mediante el aumento del orden del polinomio. En teoría, un polinomio de orden infinito corresponde a la solución exacta. Pero en la práctica se utiliza polinomios de orden finito sólo como una aproximación.

Aunque las funciones trigonométricas también poseen algunas de estas propiedades, y cada vez se utilizan en el análisis de elementos finitos (Ahmadian & Farughi, 2011).

Para seleccionar las funciones de aproximación se debe tener en cuenta el tipo de elemento que se esté usando, bajo este panorama los elementos finitos se pueden clasificar en tres categorías: simple, complejo y múltiple-elemento, dependiendo de la geometría del elemento y el orden del polinomio usado en la función de interpolación (Oden, 2006). En nuestro caso usaremos los elementos simples que son aquellos para los que el polinomio de aproximación consiste en términos constantes y lineales. En la figura (13), se representa un elemento tetraédrico i, j, k y l en un espacio definido por las coordenadas x y y y z . El desplazamiento de cada nodo queda definido por tres componentes u_x, u_y y u_z en las direcciones x, y y z respectivamente. Por lo tanto definimos el desplazamiento como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (35)$$

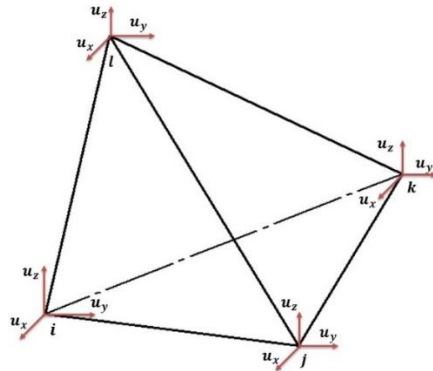


Figura 13. Desplazamientos en elemento tetraédrico

Definimos entonces las funciones de interpolación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\
 u_y(x, y, z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\
 u_z(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z
 \end{aligned}
 \tag{36a}$$

De esta forma, al conjuntar las ecuaciones en los demás nodos, se tiene un sistema de ecuaciones de orden 12x12.

$$\begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{jx} \\ u_{kx} \\ u_{lx} \\ u_{iy} \\ u_{jy} \\ u_{ky} \\ u_{ly} \\ u_{iz} \\ u_{jz} \\ u_{kz} \\ u_{lz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}
 \tag{36b}$$

Se puede encontrar sub matrices igualando los desplazamientos de los nodos en las mismas direcciones. Para la dirección x se tiene:

$$\begin{aligned}
 u_{ix} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \\
 u_{jx} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 z_j \\
 u_{kx} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k + \alpha_4 z_k \\
 u_{lx} &= \alpha_1 + \alpha_2 x_l + \alpha_3 y_l + \alpha_4 z_l
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{jx} \\ u_{kx} \\ u_{lx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}
 \tag{38}$$

Para $i = 1, j = 2, k = 3$ y $l = 4$ correspondientes a los nodos del tetraedro. Se puede invertir la matriz para despejar los valores de los coeficientes, y remplazarlos en las ecuaciones (37), de esta forma podemos escribir el desplazamiento en la dirección como x

$$u_x = \frac{1}{6V} [(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_{xi} + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_{xj} + (a_k + b_k x + c_k y + d_k z)u_{xk} + (a_l + b_l x + c_l y + d_l z)u_{xl}] \quad (39)$$

Donde

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix}$$

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} \quad b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix} \quad d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix} \quad (40)$$

Se puede obtener el resto de constantes mediante permutación cíclica de los subíndices i, j, k, l

Podemos definir el vector de desplazamientos en un elemento como

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix} \quad (41)$$

Siendo

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Se puede escribir el desplazamiento de un nodo cualquiera como

$$\mathbf{u} = [N_i, N_j, N_k, N_l] \mathbf{u}^e \quad (43)$$

Llamaremos a N *funciones de forma* y se definen de la siguiente manera:

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad (44)$$

Las funciones de forma tienen una propiedad importante y es que N_i tiene el valor de 1 en el nodo i y 0 en los demás nodos (j, k, l) , y esto se cumple para las demás funciones de forma. Esto resulta muy útil porque a partir de ello podemos definir un elemento maestro en coordenadas naturales y utilizarlo para el cálculo de un tetraedro cualquiera, en la figura (14) se muestra este elemento maestro

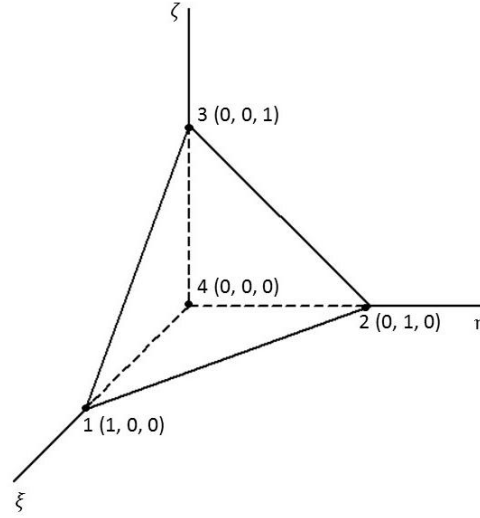


Figura 14. Elemento maestro.

Estas nuevas coordenadas se conocen como *coordenadas naturales* y sirven para simplificar, ya que podemos definir nuevamente las funciones de forma pero esta vez en las nuevas coordenadas quedando:

$$N_1 = \xi \quad N_2 = \eta \quad N_3 = \zeta \quad N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad (45)$$

Estas nuevas funciones de forma cumplen con los mismos requisitos que las funciones en las coordenadas x y y y z ya que vemos que $N_1 = 1$ y cero en los demás nodos y es lo mismo para las demás funciones, y se ve la equivalencia con las funciones anteriormente definidas.

El desplazamiento dentro del elemento se escribe usando las funciones de forma y los valores nodales del campo de desplazamientos desconocido

$$\begin{aligned} u_x &= N_1 u_1 + N_2 u_4 + N_3 u_7 + N_4 u_{10} \\ u_y &= N_1 u_2 + N_2 u_5 + N_3 u_8 + N_4 u_{11} \\ u_z &= N_1 u_3 + N_2 u_6 + N_3 u_9 + N_4 u_{12} \end{aligned} \quad (46)$$

O bien

$$\mathbf{u} = \sum_i^n N_i u = N u \quad N = N(\xi, \eta, \zeta) \quad (47)$$

Sustituyendo los valores de las funciones de forma

$$\begin{aligned} u_x &= \xi u_1 + \eta u_4 + \zeta u_7 + (1 - \xi - \eta - \zeta) u_{10} \\ u_y &= \xi u_2 + \eta u_5 + \zeta u_8 + (1 - \xi - \eta - \zeta) u_{11} \\ u_z &= \xi u_3 + \eta u_6 + \zeta u_9 + (1 - \xi - \eta - \zeta) u_{12} \end{aligned} \quad (48)$$

Usando la notación $a_{ij} = a_i - a_j$, podemos reordenar las ecuaciones (48) para simplificar quedando:

$$\begin{aligned} u_x &= \xi u_{110} + \eta u_{410} + \zeta u_{710} + u_{10} \\ u_y &= \xi u_{211} + \eta u_{511} + \zeta u_{811} + u_{11} \\ u_z &= \xi u_{312} + \eta u_{612} + \zeta u_{912} + u_{12} \end{aligned} \quad (49)$$

Se puede establecer la relación entre ambos sistemas coordenados de una manera muy parecida:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots = \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{x} \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots = \mathbf{N} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{y} \\ z &= N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots = \mathbf{N} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (50)$$

Se puede establecer entonces la relación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (51)$$

Usando las ecuaciones (50) podemos escribir la relación de coordenadas para el tetraedro como

$$\begin{aligned}
x &= \xi x_1 + \eta x_2 + \zeta x_3 + (1 - \xi - \eta - \zeta)x_4 \\
y &= \xi y_1 + \eta y_2 + \zeta y_3 + (1 - \xi - \eta - \zeta)y_4 \\
z &= \xi z_1 + \eta z_2 + \zeta z_3 + (1 - \xi - \eta - \zeta)z_4
\end{aligned} \tag{52}$$

Nuevamente usando la notación $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $z_{ij} = z_i - z_j$ podemos reordenar las ecuaciones (52) para simplificar quedando:

$$\begin{aligned}
x &= \xi x_{14} + \eta x_{24} + \zeta x_{34} + x_4 \\
y &= \xi y_{14} + \eta y_{24} + \zeta y_{34} + y_4 \\
z &= \xi z_{14} + \eta z_{24} + \zeta z_{34} + z_4
\end{aligned} \tag{53}$$

Las ecuaciones (53) son las que nos van a estar relacionando las coordenadas x, y y z con ξ, η y ζ y serán de gran utilidad al definir las derivadas parciales en la relación desplazamiento. Esta es la representación isoperimétrica, este enfoque le da simplicidad al desarrollo y retiene la uniformidad con otros elementos complejos.

Matriz de rigidez del elemento

La relación desplazamiento-deformación está dado por:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right] \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\
\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] \\
\epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \\
\epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{54}$$

O en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Al evaluar las deformaciones, las derivadas parciales de u_x , u_y y u_z vemos por las ecuaciones (53) que u_x , u_y y u_z son funciones de x, y y z , que a su vez son funciones de ξ, η y ζ , es decir

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x(\xi, \eta, \zeta)) \\ u_y &= u_y(y(\xi, \eta, \zeta)) \\ u_z &= u_z(z(\xi, \eta, \zeta)) \end{aligned} \quad (56)$$

Usando la regla de la cadena para las derivadas parciales tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \eta} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \zeta} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (57)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (58)$$

La matriz que contiene las derivadas parciales se le conoce como matriz jacobiana o el jacobiano de la transformación y se le denota como **J**, podemos evaluar esta matriz a partir de las ecuaciones (53)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Podemos entonces encontrar las derivadas parciales respecto a las coordenadas x, y y z invirtiendo la matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u_x}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Donde

$$A = \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24} & y_{34}z_{14} - y_{14}z_{34} & y_{14}z_{24} - y_{24}z_{14} \\ z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24} & z_{34}x_{14} - z_{14}x_{34} & z_{14}x_{24} - z_{24}x_{14} \\ x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24} & x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34} & x_{14}y_{24} - x_{24}y_{14} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Se pueden entonces escribir para las derivadas parciales para u_y y u_z el mismo tipo de relación y se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u_y}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (62)$$

y

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (63)$$

Evaluando las derivadas parciales en las ecuaciones (53) se puede demostrar que se llega al resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= A_{11}u_1 + A_{12}u_4 + A_{13}u_7 - \tilde{A}_1u_{10} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} &= A_{21}u_1 + A_{22}u_4 + A_{23}u_7 - \tilde{A}_2u_{10} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= A_{31}u_1 + A_{32}u_4 + A_{33}u_7 - \tilde{A}_3u_{10} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y}{\partial x} &= A_{11}u_2 + A_{12}u_5 + A_{13}u_8 - \tilde{A}_1u_{11} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} &= A_{21}u_2 + A_{22}u_5 + A_{23}u_8 - \tilde{A}_2u_{11} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} &= A_{31}u_2 + A_{32}u_5 + A_{33}u_8 - \tilde{A}_3u_{11} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial x} &= A_{11}u_3 + A_{12}u_6 + A_{13}u_9 - \tilde{A}_1u_{12} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= A_{21}u_3 + A_{22}u_6 + A_{23}u_9 - \tilde{A}_2u_{12} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_{31}u_3 + A_{32}u_6 + A_{33}u_9 - \tilde{A}_3u_{12} \end{aligned} \quad (66)$$

Donde A_{ij} son elementos de la matriz A y

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} \\ \tilde{A}_2 &= A_{21} + A_{22} + A_{23} \\ \tilde{A}_3 &= A_{31} + A_{32} + A_{33} \end{aligned} \quad (67)$$

Podemos escribir la deformación ϵ como la suma de dos términos, ϵ_L que representa la relación lineal y ϵ_{NL} que representa las relaciones no lineales con los desplazamientos, es decir

$$\epsilon = \epsilon_L + \epsilon_{NL} \quad (68)$$

Donde

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad \epsilon_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad \epsilon_{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Podemos definir el término lineal de la deformación en términos del desplazamiento con la ayuda de las ecuaciones (64 - 66)

$$\epsilon_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}u_1 + A_{12}u_4 + A_{13}u_7 - \tilde{A}_1u_{10} \\ A_{21}u_2 + A_{22}u_5 + A_{23}u_8 - \tilde{A}_2u_{11} \\ A_{31}u_3 + A_{32}u_6 + A_{33}u_9 - \tilde{A}_3u_{12} \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_4 + A_{23}u_7 - \tilde{A}_2u_{10} + A_{11}u_2 + A_{12}u_5 + A_{13}u_8 - \tilde{A}_1u_{11} \\ A_{31}u_1 + A_{32}u_4 + A_{33}u_7 - \tilde{A}_3u_{10} + A_{11}u_3 + A_{12}u_6 + A_{13}u_9 - \tilde{A}_1u_{12} \\ A_{31}u_2 + A_{32}u_5 + A_{33}u_8 - \tilde{A}_3u_{11} + A_{31}u_2 + A_{32}u_5 + A_{33}u_8 - \tilde{A}_3u_{11} \end{bmatrix} \quad (70)$$

u

Reordenando la matriz de con los términos de desplazamientos definir el termino lineal

$$\boldsymbol{\epsilon}_L = \mathbf{B}_L \mathbf{a} \quad (71)$$

Donde $\mathbf{B}_L$ es una matriz (6 X 12) y la relación queda

$$\boldsymbol{\epsilon}_L = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\tilde{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\tilde{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{32} & 0 & A_{33} & A_{21} & 0 & A_{21} & A_{21} & 0 & -\tilde{A}_1 & -\tilde{A}_1 \\ A_{21} & 0 & A_{21} & A_{21} & 0 & A_{21} & A_{21} & 0 & A_{21} & -\tilde{A}_1 & 0 & -\tilde{A}_1 \\ A_{21} & A_{21} & 0 & A_{21} & A_{21} & 0 & A_{21} & A_{21} & 0 & -\tilde{A}_1 & -\tilde{A}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Podemos escribir la ecuación (74) en forma simplificada

$$\boldsymbol{\epsilon}_{NL} = \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (75)$$

Nos damos cuenta que la ecuación (75) nos presenta efectivamente una relación no lineal entre la deformación y el desplazamiento, escribimos entonces la deformación total como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_L + \boldsymbol{\epsilon}_{NL} = \mathbf{B}_L\mathbf{u} + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})\mathbf{u} = [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})]\mathbf{u} \quad (76)$$

La ecuación (76) muestra un resultado importante, ya que permite calcular la deformación que en un principio era un problema de ecuaciones diferenciales parciales y ahora es un problema de algebra lineal.

Considerando el término:

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\phi}) dV \quad (77)$$

Donde los desplazamientos virtuales se interpolan de la misma manera que $\mathbf{u}$, es decir

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{N}\boldsymbol{\varphi} \quad (78)$$

Sustituyendo la relación de esfuerzo-deformación dada por la ecuación (78) podemos reescribir la ecuación como

$$\iiint_V \boldsymbol{\epsilon}^T(\boldsymbol{\phi}) \mathbf{D}(\mathbf{a}) \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (79)$$

Ahora con el resultado obtenido anteriormente en la ecuación (78) podemos definir la matriz de rigidez del elemento como

$$\iiint_V \boldsymbol{\epsilon}^T(\boldsymbol{\phi}) \mathbf{D}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\epsilon} dV = \iiint_V \boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}))^T [\mathbf{D}(\mathbf{u})] (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) \mathbf{u} dV \quad (80)$$

Podemos notar que la matriz de rigidez no es constante y depende de $\mathbf{a}$, nos podemos dar cuenta que si bien no es constante respecto al desplazamiento, respecto a las funciones de forma si lo es, es decir si cambiamos las coordenadas de podemos sacar la matriz de la integral

$$\mathbf{k}_e(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\varphi}^T (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}))^T [\mathbf{D}(\mathbf{u})] [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})] \mathbf{u} \iiint_V \mathbf{v}_e \quad (81)$$

Donde

$$V_e = \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (82)$$

Sabemos que $\det \mathbf{J}$ es constante tenemos que

$$V_e = |\det \mathbf{J}| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\xi d\eta d\zeta \quad (83)$$

Usando la formula polinomial integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi^m \eta^n \zeta^p d\xi d\eta d\zeta = \frac{m! n! p!}{(m+n+p+3)!} = \frac{1}{6} \quad (84)$$

Por lo tanto

$$V_e = \frac{1}{6} |\det \mathbf{J}| \quad (85)$$

Y finalmente tenemos

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{k}_e(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (86)$$

Donde

$$\mathbf{k}_e(\mathbf{a}) = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}))^T [\mathbf{D}(\mathbf{u})] [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})] V_e \quad (87)$$

Términos de fuerza

El término asociado con la fuerza de cuerpo es

$$\iiint_e \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} dV = \boldsymbol{\varphi}^T \int \int \int N^T \mathbf{f} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (88)$$

Usando nuevamente la fórmula de la integración polinomial

$$\iiint_e \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} dV = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}^e \quad (89)$$

Donde

$$\mathbf{f}^e = \frac{V_e}{4} [f_x, f_y, f_z, f_x, f_y, f_z, \dots f_z] \quad (90)$$

En la ecuación anterior el vector fuerza de cuerpo es de dimensión (12 x 1).

Consideremos ahora la tracción distribuida uniformemente sobre la superficie de frontera. La superficie de frontera de un tetraedro es un triángulo. Si A_e es la superficie de la frontera donde se aplica la tracción, formada por los nodos locales 1, 2 y 3, entonces

$$\iint_{A_e} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T} dA = \boldsymbol{\phi}^T \iint_{A_e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dA = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T}^e \quad (91)$$

Donde

$$\mathbf{T}^e = \frac{A_e}{3} [T_x, T_y, T_z, T_x, T_y, T_z, 0, 0, 0] \quad (92)$$

Finalmente podemos escribir la ecuación (34) como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{k}_e(\mathbf{u}) \mathbf{u} - (\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f}^e + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T}^e) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{k}_e(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{f}^e + \mathbf{T}^e) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (93)$$

Podemos eliminar el término $\boldsymbol{\phi}^T$ y quedando ya el sistema formado para el elemento en términos de los desplazamientos nodales

$$\mathbf{k}_e(\mathbf{u}) \mathbf{u} - \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (94)$$

Ensamble de matriz de rigidez global y el vector de fuerzas.

Una de las grandes dificultades del método del elemento finito radica en ensamblar las matrices de cada elemento en una matriz general que represente el continuo completo. Este paso representa uno de los desafíos más grandes para la programación del método ya que se necesita de una rutina eficiente para que no aumente el costo computacional del método (Anjam & Valdman, 2015).

La matriz de rigidez global $\mathbf{K}_T$ se ensambla a partir de las matrices $\mathbf{k}_e$ de los elementos, utilizando la información de conectividad de estos y los grados de libertad que representen, los elementos que se traslapan simplemente se suman (Tirupathi & Ashok, 1999), podemos denotar el ensamble de forma simbólica como

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \leftarrow \sum_e \mathbf{k}_e(\mathbf{u}) \quad (95)$$

El vector de fuerzas global se ensambla de una manera muy parecida, nuevamente usando la conectividad de los elementos, de esta forma podemos denotar de forma simbólicamente el ensamble del vector de fuerzas

$$\mathbf{F}_T \leftarrow \sum_e (\mathbf{f}^e + \mathbf{T}^e) \quad (96)$$

De esta forma se tiene un sistema no lineal para el desplazamiento

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{F}_T = \mathbf{0} \quad (97)$$

Manejo de las condiciones de frontera

Una vez ensamblados tanto la matriz de rigidez global y el vector de cargas, es necesario imponer las condiciones de frontera a tal sistema antes de resolverlos (Zhang & Zhao, 2016), la forma de del sistema ensamblado tiene la forma

$$\begin{bmatrix} K_{11}(\mathbf{u}) & K_{12}(\mathbf{u}) & \dots & K_{1N}(\mathbf{u}) \\ K_{21}(\mathbf{u}) & K_{22}(\mathbf{u}) & \dots & K_{2N}(\mathbf{u}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{N1}(\mathbf{u}) & K_{N2}(\mathbf{u}) & \dots & K_{NN}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (98)$$

Se apreciara que si se impone un desplazamiento cualquiera, tal como $u_1 = \check{a}_1$, la fuerza exterior F_1 no puede ser impuesta y permanecerá como incógnita. Podemos, pues, prescindir de la primera ecuación y sustituir a_1 por un valor conocido en las restantes ecuaciones. Este procedimiento implica un proceso de cálculo engorroso, pudiéndose alcanzar el mismo objetivo añadiendo al coeficiente K_{11} un número muy grande C y agregar $C\check{a}_1$ a F_1 de esta forma se tiene un sistema modificado

$$\begin{bmatrix} (K_{11}(u) + C) & K_{12}(u) & \dots & K_{1N}(u) \\ K_{21}(u) & K_{22}(u) & \dots & K_{23}(u) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{N1}(u) & K_{N2}(u) & \dots & K_{NN}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 + C\check{a}_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (99)$$

Tal procedimiento tiene su fundamento en modelar los desplazamientos conocidos añadiendo un resorte de gran rigidez y es conocido como *penalización* este enfoque es fácil de implementar en un programa de computadora y retiene su simplicidad aun cuando las condiciones de frontera son generales.

La selección de numero C debe de ser grande, los suficiente para que $u_1 \approx \check{a}_1$, Tirupathi and Ashok (1999) sugieren la selección de C de tal manera que

$$C = \max |K_{ij}| \times 10^4 \quad (100)$$

Ya que la elección de 10^4 se ha encontrado satisfactoria en los cálculos.

La implementación de las condiciones de contorno generan un sistema de del tipo

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{F}_T \quad (101)$$

La solución a este sistema nos da los da una aproximación a los desplazamientos dentro del cuerpo.

Una vez obtenidos los desplazamientos podemos calcular las deformaciones en el cuerpo como

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_0)]\mathbf{u} \quad (102)$$

y los esfuerzos como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{u})\boldsymbol{\epsilon} \quad (103)$$

Solución al sistema no lineal

Naturalmente, la solución del problema planteado por las ecuaciones (18) y (93) no puede ser abordada directamente y siempre se requiere alguna forma de iteración. Es preciso, sin embargo, mencionar un punto importante. Mientras que en los problemas lineales la solución siempre es única ya no ocurre lo mismo en muchas situaciones no lineales. Así, si se obtiene

Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es probablemente el proceso de más rápida convergencia para la solución de problemas no lineales, siempre que, naturalmente, la solución inicial este dentro de la zona de atracción y no ocurra divergencia. De hecho es el único proceso en el que la convergencia es cuadrática (Zienkiewicz & Taylor, 2000)

El sistema de ecuaciones no lineales presentado en la ecuación (98) se puede escribir como una función vectorial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi_1(u_1, u_2, \dots, u_n) &= f_1 \\ \psi_2(u_1, u_2, \dots, u_n) &= f_2 \\ &\vdots \\ \psi_n(u_1, u_2, \dots, u_n) &= f_n \end{aligned} \quad (104)$$

O

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad (105)$$

Donde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (106)$$

Desarrollando la ecuación (106) con la serie de Taylor

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_{n+1}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n) + \nabla(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n))(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \frac{1}{2!} \nabla^2(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n))(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \dots \\ + \frac{1}{(n-1)!} \nabla^{n-1}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n))(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) + \frac{1}{n!} \nabla^n(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n))(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) = \mathbf{F}\end{aligned}\quad (107)$$

Donde

$$\nabla \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_T \quad (108)$$

Es la llamada matriz jacobiana tangente. Si tomamos en cuenta solo los términos lineales y definimos un incremento como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\end{aligned}\quad (109)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_{n+1}) &= \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_{n+1}) - \mathbf{F} &= \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} - \mathbf{R}\end{aligned}\quad (110)$$

Donde $\mathbf{K}_T$ es una matriz de rigidez en la dirección tangente, podemos ver que $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{0}$ puesto que se plantea que $\mathbf{u}_{n+1}$ es una solución raíz, de esta forma podemos reescribir la ecuación (110)

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (111)$$

Donde

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}_n) \quad (112)$$

Este proceso se le conoce como linealización, ya que el proceso no lineal se ha reducido a un proceso de iteraciones de un sistema lineal, el vector $\mathbf{R}$ es llamado vector de residuos y gradualmente se va reduciendo a cero si el proceso converge (Reddy, 2004)

En la figura (15) se muestra el proceso de convergencia del método de Newton-Raphson

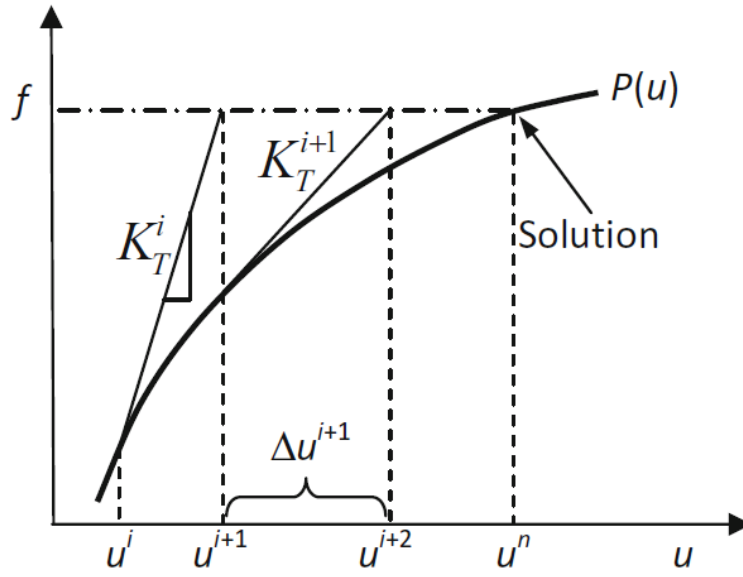


Figura 15. Proceso de iteración Newton-Raphson.

EL proceso de Newton-Raphson, a pesar de su rápida convergencia, puede ser muy caro computacionalmente hablando, ya que:

1. Se tiene que ensamblar una matriz $\mathbf{K}_T$ para cada iteración.
2. Se tiene que resolver un sistema $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{R}$ para cada iteración.
3. En la mayoría de las ocasiones, la matriz $\mathbf{K}_T$, aunque inicialmente es simétrica, se vuelve no simétrica y pierde su estructura de banda y en consecuencia se tiene que utilizar métodos de resolución más costos computacionalmente hablando.

Método de Newton-Raphson modificado

Este método utiliza esencialmente el mismo algoritmo que el proceso de Newton-Raphson, pero reemplaza la matriz de rigidez tangente variable $\mathbf{K}_T$ por una aproximación constante:

$$\mathbf{K}_T^i = \bar{\mathbf{K}}_T \quad (113)$$

Dando lugar a la ecuación

$$\Delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{R} \quad (114)$$

Se abren muchas posibilidades para escoger a $\bar{\mathbf{K}}_T$ se suele escoger la matriz correspondiente a la primera iteración o inclusive la correspondiente a algún paso anterior, en la figura (16) se muestra el proceso del método de Newton-Raphson modificado

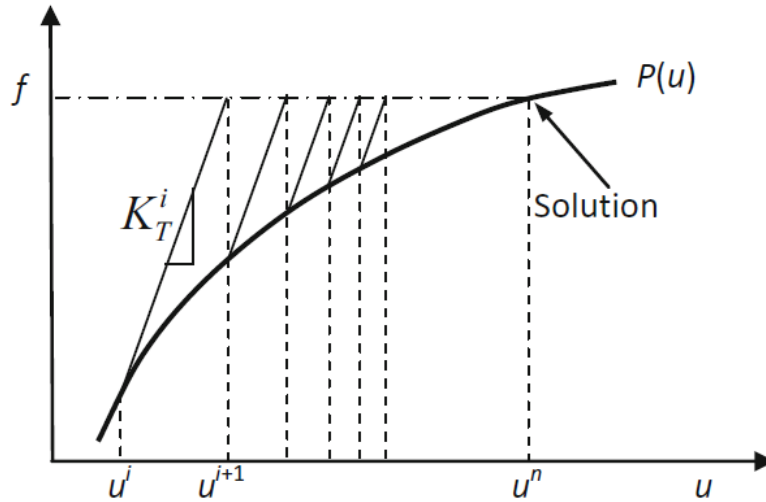


Figura 16. Proceso de iteración Newton-Raphon modificado.

Obviamente el procedimiento convergerá en general a una velocidad más lenta, pero las dificultades mencionadas en el proceso de Newton-Raphson desaparecen. De hecho, frecuentemente la zona de atracción para este proceso es mayor y se puede conseguir convergencia para soluciones previamente divergentes, en la práctica se usan algoritmos de solución simétricos, por ello generalmente se elige una forma simétrica de $\bar{\mathbf{K}}_T$

En resumen para la solución no lineal, cuando la matriz de rigidez del elemento k^e es independiente del desplazamiento dentro del mismo a^e la matriz de coeficientes se puede evaluar para todos los elementos, se puede ensamblar la matriz global y resolver después de imponer las condiciones de frontera y así encontrar los valores de los desplazamientos nodales en el cuerpo. Cuando la matriz de rigidez del elemento depende del vector de solución $\mathbf{u}$, la matriz de coeficientes no puede ser evaluada, por tal motivo necesitamos en primer lugar, una solución conocida de $\mathbf{u}$ para evaluar en la matriz de rigidez del elemento y después ser ensamblada, encontrar una nueva aproximación para la incógnita y repetir el proceso hasta que el valor de la incógnita converja (Reddy, 2004)

4.2.3 Post proceso

Después de obtener el desplazamiento de cada uno de los nodos, se procede a calcular el valor de las deformaciones y los esfuerzos, se debe de generar las geometrías y realizar una interpolación de colores para presentar los resultados, se pueden realizar graficas de zonas de interés.

4.3 Agricultura protegida

4.3.1 Definición agricultura protegida

Se denomina agricultura protegida al sistema de producción agrícola dentro de estructuras con objetivo de proteger los cultivos de fenómenos climáticos adversos al desarrollo de las plantas, la agricultura protegida se realiza bajo estructuras construidas por el hombre con la finalidad de evitar las restricciones que el medio impone al desarrollo de las plantas cultivadas. Así, mediante el empleo de dichas estructuras se reducen al mínimo las condiciones restrictivas del clima sobre los vegetales. Al respecto, en las últimas décadas se han desarrollado varios tipos de elementos protectores que plantean diferentes alternativas para recrear condiciones ambientales óptimas para el desarrollo de los cultivos, de acuerdo a los requerimientos climáticos de cada especie y en concordancia con los factores climáticos de cada región (Bastida & Ramírez, 2002)

4.3.2 Invernadero

Un invernadero es una instalación cubierta y abrigada artificialmente con materiales transparentes para defender las plantas de la acción de los meteoros exteriores. Esta instalación permite el control de determinados parámetros productivos, como: temperatura ambiental y del suelo, humedad relativa, concentración de anhídrido carbónico en el aire, luz, etc., en lo más cercano posible al óptimo para el desarrollo de los cultivos que se establezcan. El volumen interior del recinto permite el desarrollo de los cultivos en todo su ciclo (Serrano, 2002)

Se puede definir de una manera más aplicada a los invernaderos como biosistemas, lo que quiere decir, la integración de componentes físicos (estructuras, equipos y factores ambientales) y biológicos es decir las plantas (ASAE, 2005).

4.3.3 Tipos de cubiertas

La cubierta es el elemento central en el invernadero ya que es el encargado de crear el micro clima en su interior (Papaseit *et al.*, 1997), por tal motivo y según Serrano (2002) las características que debe de cumplir el material de cubierta en un invernadero son las siguientes

- Efecto invernadero.
- Transparencia.
- Opacidad a las radiaciones nocturnas.
- Retención del calor.

- Rendimiento térmico.
- Condensación de la humedad.
- Resistencia a la rotura.
- Ligereza.
- Flexibilidad.
- Estanqueidad.
- Duración o envejecimiento (degradación).

Castilla and Prados (2007) Clasifican los principales materiales utilizados como cubierta y los dividen en tres grupos los cuales se presentan a continuación:

Vidrios.

Plásticos rígidos:

Poli metacrilato de metilo (PMM),
 Policarbonato (PC),
 Poliéster con fibra de vidrio,
 Policloruro de vinilo (PVC).

Plásticos flexibles:

Policloruro de vinilo (PVC),
 Polietileno de baja densidad (PE),
 Etileno vinilo de acetato (EVA)
 Materiales extruidos.

Actualmente el material más utilizado como cubierta de invernadero es el polietileno de baja densidad (LDPE) debido a que presenta propiedades mecánicas, radiométricas, térmicas que lo hacen adecuado para este fin, además, de tener una buena relación costo-beneficio (Díaz *et al.*, 2001).

5. MATERIALES Y METODOLOGÍA

5.1 Materiales

- Se utilizó una THINKSTATION S30 con un procesador Intel® Xeon® que trabaja con 2 núcleos a 2.4 GHz y con una memoria RAM de 24 GB.
- Software MATLAB® en su versión 2015 (a).
- Software GMSH® en su versión 2.11.0.
- Datos experimentales de las constantes mecánicas del plástico.

5.2 Metodología

El proceder del método del elemento finito que se utilizó se puede resumir como lo muestra el siguiente diagrama

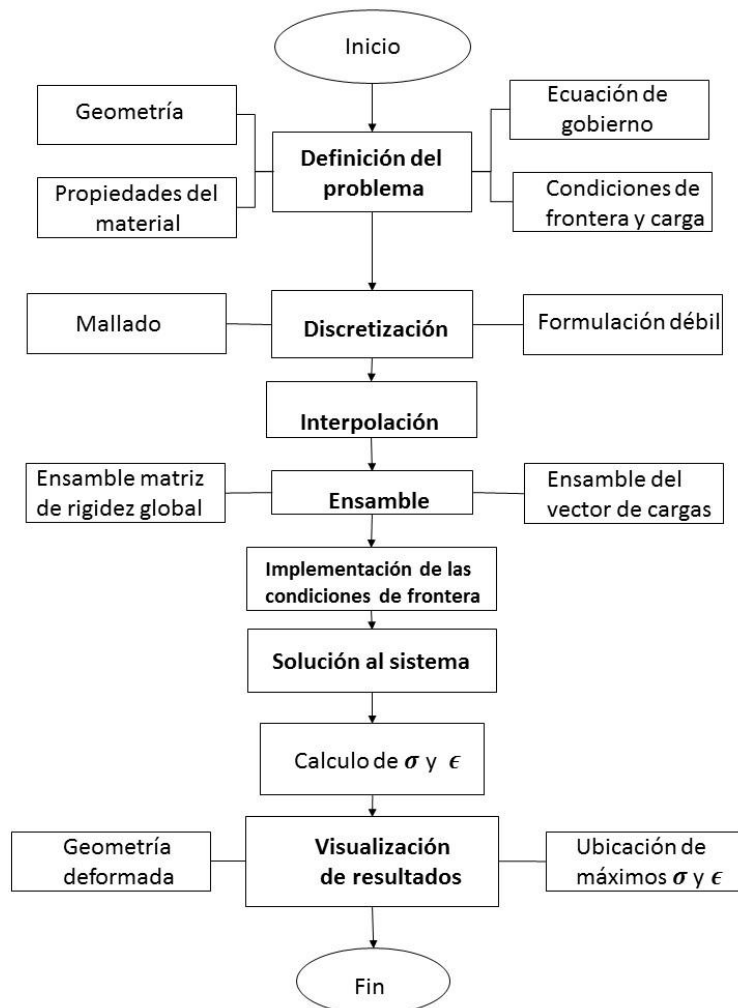


Figura 17. Algoritmo FEM.

5.2.1 Propiedades del material

Las propiedades mecánicas que son necesarias para realizar la simulación con elemento finito es el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson, muchos son los investigadores que han realizado pruebas mecánicas para encontrar el valor de estas dos propiedades, (Briassoulis & Aristopoulou, 2001; Briassoulis & Schettini, 2003), hicieron pruebas de tracción en filmes utilizados en invernaderos utilizando la (ASTM, 1991) o su equivalente (ISO, 1995) y obtuvieron el valor de 106.66 MPa para el módulo de elasticidad, por otro lado el coeficiente de Poisson, (Briassoulis & Schettini, 2002; Courtney, 2005) llegaron a la conclusión de que el valor para los polímeros se encuentra entre 0.4-0.45, siendo 0.4 el valor más utilizado, por esta razón el 0.4 para el coeficiente de Poisson es el valor que se tomó en el presente trabajo.

5.2.2 Geometría

Para definir la geometría se tomó en cuenta un invernadero tipo túnel, que es uno de los más comunes actualmente utilizados (Castilla & Prados, 2007) en la figura (18) se muestra las dimensiones más comunes en las que se puede presentar este invernadero.

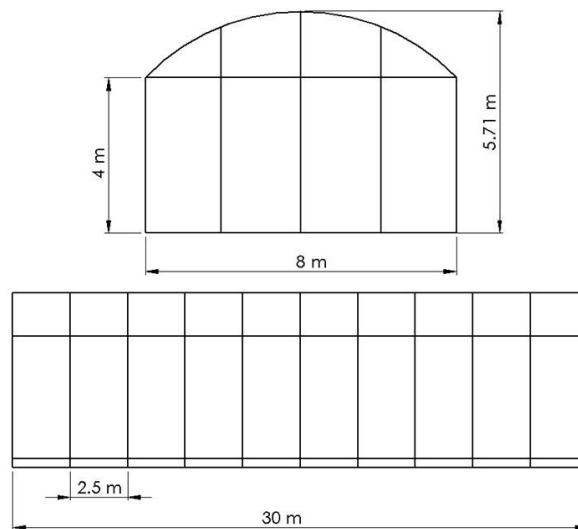


Figura 18. Dimensiones para el invernadero.

Y la vista isométrica

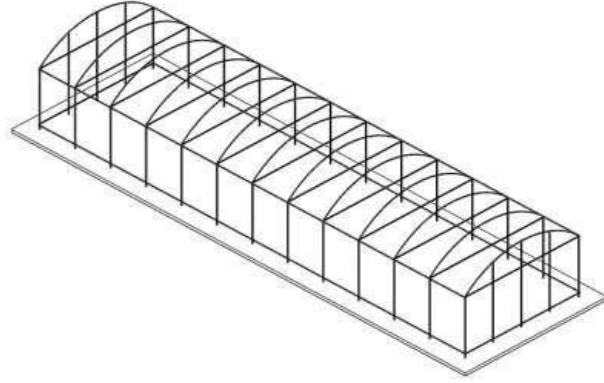


Figura 19. Vista isométrica del invernadero tipo túnel.

Para simplificar el problema y disminuir el costo computacional se realizó la simulación ocupando solamente una sección de la geometría, se tomó esta decisión asumiendo que las demás secciones van a tener el mismo comportamiento. En la figura (20) se muestra la sección utilizada.

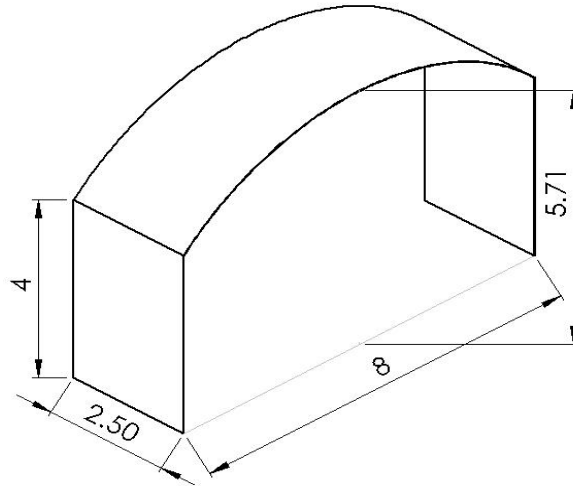


Figura 20. Sección para el análisis.

5.2.3 Ecuación de gobierno

La ecuación de gobierno la obtenemos a partir de las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones que relacionan la deformación con el desplazamiento y las ecuaciones constitutivas del material que relacionan esfuerzo con deformación, estas tres ecuaciones se presentan a continuación:

$$\nabla \sigma - F = 0 \quad (115)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (116)$$

$$c_{ijkl} = \lambda' \delta_{kl} + \mu' (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (117)$$

Utilizando estas ecuaciones podemos deducir la ecuación general de gobierno para nuestro fenómeno el cual se presenta a continuación en su versión vectorial

$$\mu'(\nabla^2 \mathbf{u}) + (\lambda' + G)[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] + \mu'[(\nabla \mathbf{u}) \cdot (\nabla^2 \mathbf{u})] + (\lambda' + \mu')\{[\nabla(\nabla \mathbf{u})] \cdot (\nabla \mathbf{u})\} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (118)$$

Esta ecuación que está en términos del desplazamiento $\mathbf{u}$, es la que se tiene que resolver para encontrar el comportamiento mecánico del continuo.

5.2.4 Condiciones de frontera

Las condiciones en las fronteras de nuestra geometría son de sujeción, es decir en la frontera el desplazamiento es nulo en todas las direcciones ya que en esta zona es la que corresponde la interacción entre la cubierta y la estructura, también la parte superior de las paredes laterales se encuentra otra interacción de la estructura y la cubierta por lo cual también el desplazamiento en esa zona es cero, en la siguiente imagen se presenta las zonas donde el desplazamiento

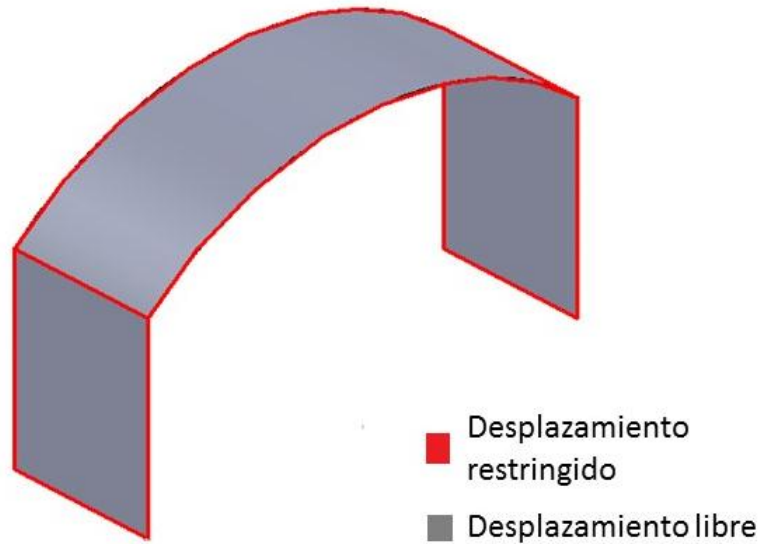


Figura 21. Condiciones de Frontera.

5.2.5 Condiciones de carga

Las condiciones de carga sobre la cubierta se calculan con ayuda de la norma de la (ASAE-EP460, 2004), la cual para calcular las presiones asigna coeficientes de presión a distintas zonas de la cubierta las cuales se muestran a continuación

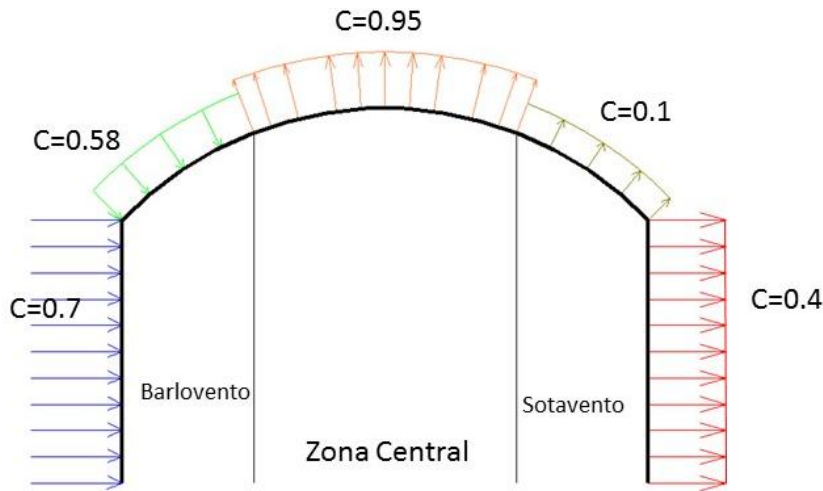


Figura 22. Coeficientes de presión en la cubierta.

Y podemos calcular el valor de la presión en la cubierta utilizando el manual de diseño por viento de la comisión federal de electricidad (CFE, 2008), la nos proporciona la siguiente formula

$$P_e = CK_A K_L q_z \quad (119)$$

Donde

p_e ; es la presión exterior, en Pa.

C; el coeficiente de presión exterior, adimensional.

K_A ; el factor de reducción de presión por tamaño de área, adimensional.

K_L ; el factor de presión local, adimensional

q_z ; la presión dinámica del viento, en Pa.

La metodología general para este cálculo viene descrito en el manual de diseño de viento y se muestra en el anexo B

En nuestro cálculo solo nos interesan los valores de presión exterior, para ello primero se calculó la velocidad de diseño con la siguiente ecuación:

$$V_D = F_T F_{rz} V_R \quad (120)$$

En donde

F_T es el factor que depende de la topografía local, adimensional,

F_{rz} es el factor que toma en cuenta el efecto de las características de exposición, adimensional

V_R es la velocidad regional de ráfaga que le corresponde al sitio donde se construirá la estructura, en km/h.

El factor de topografía F_T , toma en cuenta el efecto topográfico local del sitio donde se plantará la estructura, de acuerdo con las características topográficas del sitio, en el anexo B, se presentan los valores para determinar este factor.

Para nuestro trabajo se tomó el tipo de topografía normal que corresponde a terrenos prácticamente planos, campos abiertos, ausencia de cambios topográficos importantes, con pendientes menores del 5%. El valor para F_T es entonces, $F_T = 1$

El factor de exposición local, F_{rz} establece la variación de la velocidad del viento con la altura, en función de la categoría del terreno, este factor se obtiene de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} F_{rz} &= c & \text{si } z \leq 10 \\ F_{rz} &= c \left(\frac{z}{10} \right)^\alpha & \text{si } z < 10 < \delta \\ F_{rz} &= c \left(\frac{\delta}{10} \right)^\alpha & \text{si } z \geq \delta \end{aligned} \quad (121)$$

Donde

z es la altura por encima del terreno natural, a la cual se desea conocer la velocidad de diseño, en m

α el exponente que determina la forma de la variación de la velocidad del viento con la altura, adimensional

δ la altura medida a partir del nivel del terreno de desplante por encima de la cual la variación de la velocidad del viento no es importante y se puede suponer constante, en m .

c el coeficiente de escala de rigurosidad, adimensional.

Como la altura del invernadero no rebasa los 10 m de altura se considera la ecuación (121), el valor de los parámetros se puede calcular con el siguiente cuadro

Cuadro 1. Valor de las variables según el terreno

Categoría del terreno	α	δ	c
1	0.0999	245	1.137
2	0.128	315	1
3	0.156	390	0.881
4	0.170	455	0.715

Nuestro terreno es tipo 2 por lo cual el valor para $F_{rz} = 1$

La velocidad regional de ráfaga, V_R , es la velocidad máxima que puede ser excedida en un cierto periodo de retorno, en una zona o regio de determinado país. La velocidad de ráfaga regional se determina tomando en consideración tanto la importancia de la estructura como la localización geográfica de su sitio de desplante. En anexo B se muestra el mapa de las isotacas regionales, recomendadas para las estructuras grupo B que es a la que pertenecen los invernaderos.

De esta forma por la zona de estudio y el tipo de estructura el valor para la velocidad de ráfaga regional está entre $90 - 119 \text{ km/h}$, tomando la media como valor de nuestro cálculo, es decir, $V_R = 109 \text{ km/h}$

Con estos valores podemos calcular la velocidad de diseño

$$V_D = F_T F_{rz} V_R = (1)(1) \left(109 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) = 109 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (122)$$

El siguiente paso es el cálculo de la presión dinámica, q_z ya que cuando el viento actúa sobre una construcción, genera presiones sobre sus superficies, que varían según la intensidad de la velocidad y la dirección del viento, la presión que ejerce el flujo del viento sobre una superficie perpendicular a él, se le denomina presión dinámica y se puede calcular con la siguiente ecuación

$$q_z = 0.047 G (V_D)^2 \quad (123)$$

Donde

q_z es la presión dinámica a una altura z sobre el nivel del terreno, en Pa

V_D es la velocidad básica de diseño, en km/h, calculado anteriormente

G es el factor de corrección por temperatura y por altura con respecto al nivel del mar, adimensional

El valor de G se obtiene con la siguiente expresión:

$$G = \frac{0.392\Omega}{273 + t} \quad (124)$$

En donde

Ω es la presión barométrica, en mm de Hg

t es la temperatura ambiental, en °C

Para nuestro estudio se tomó una presión de 600 Hg, que corresponden a 2000 msnm y una temperatura promedio de 20 °C, con estos datos podemos calcular la presión dinámica con la ecuación (122)

$$q_z = 0.047G(V_D)^2 = 0.047 \left[\frac{0.392(600)}{273 + 20} \right] (109)^2 = 448.25 \text{ Pa}$$

Y ahora se puede calcular las presiones en el exterior de la cubierta con el valor de q_z y con la ecuación (119), tomando los valores de los coeficientes $K_A = 0.8$ y $K_L = 1$, (ver anexo B), los valores de las presiones exteriores de la cubierta se muestran en el siguiente cuadro.

Cuadro 2. Valores de la carga en la cubierta

Pared lateral	P_e [Pa]
Barlovento	251.02
Sotavento	143.440
Arco superior	
Barlovento	207.988
Central	340.670
Sotavento	35.860

5.2.6. Discretización de la geometría

La discretización de la geometría se llevó a cabo a través de la generación de un mallado tetraédrico con el algoritmo de Delaunay, se llevó a cabo en el software GMSH® y a continuación se muestra en la figura el resultado

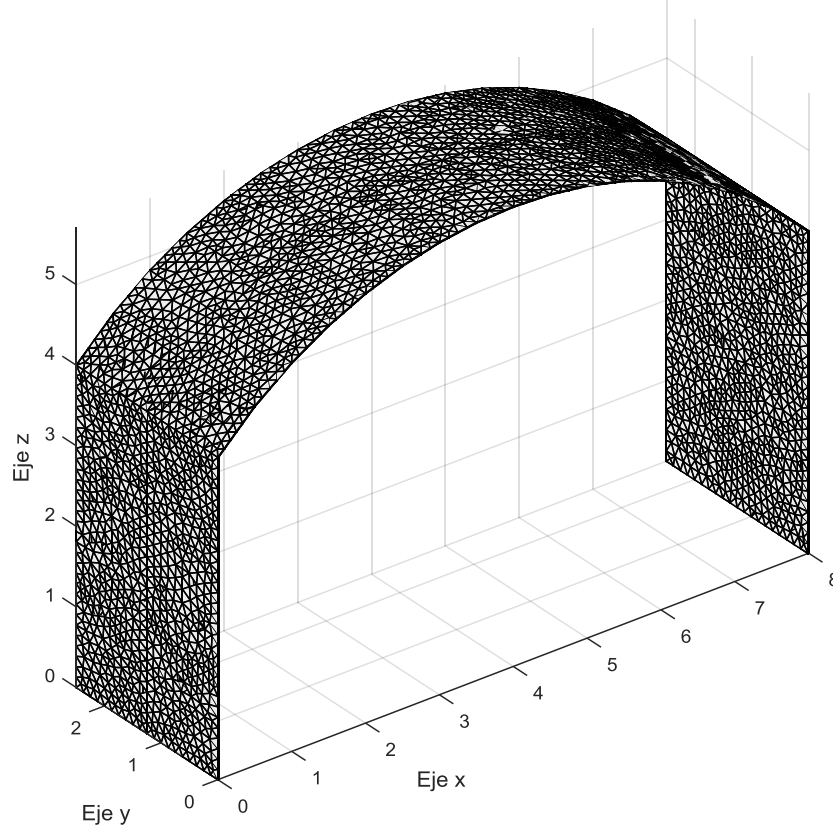


Figura 23. Mallado de la geometría.

5.2.7 Discretización de la ecuación de gobierno

La discretización de gobierno se realizó mediante el método de residuos ponderados y la forma débil generada se presenta a continuación

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon}(\phi) dV - \iiint_V \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{f} dV - \oint_S \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T} dS = 0 \quad (125)$$

5.2.8 Interpolación

Se seleccionaron ecuaciones lineales para la interpolación del desplazamiento dentro del cuerpo

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ u_y(x, y, z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ u_z(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned} \quad (126)$$

5.2.9 Ensamble

Para poder caracterizar los desplazamientos en el cuerpo a partir de los elementos finitos, es necesario realizar un ensamble de las matrices de cada elemento en una global con la información de la conectividad, este representa el primer gran reto de la programación del MEF, ya que se ensamblan matrices del orden de 30000X30000 y se tienen que colocar los elemento en los lugares correctos. Se muestra a continuación el pseudocódigo para la realización del ensamble

Cuadro 3. Ensamble matriz global no lineal.

Entradas: coordenadas de los nodos, matriz de conectividad de elementos, propiedades del material (E, ν), solución previa ($\mathbf{u}_0$) <pre> for i=1→ número de elementos Obtener las coordenadas de tetraedro (i) Obtener los desplazamientos de los nodos del tetraedro (i) Calcular el jacobiano de la transformación (J) y su determinante Calcular las matrices $\mathbf{B}_L$ y $\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_0)$ Calcular $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ Calcular la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{k}_e$ for j=1→numero de elementos de $\mathbf{k}_e$ Calcular la ubicación (h) del elemento (j) de $\mathbf{k}_e$ en la matriz de rigidez global $\mathbf{K}_{glob}$ de acuerdo a la conectividad $\mathbf{K}_{glob}(h)=\mathbf{K}_{glob}(h) + \mathbf{k}_e(j)$ j=j+1 end for i=i+1 end for </pre> Salida: matriz de rigidez global ($\mathbf{K}_{glob}$)

Se realiza también el ensamble de la matriz lineal que es necesaria para la solución

Cuadro 4. Ensamble matriz global lineal.

Entradas: coordenadas de los nodos, matriz de conectividad de elementos, propiedades del material (E, ν) <pre> for i=1→ número de elementos Obtener las coordenadas de tetraedro (i) Calcular el jacobiano de la transformación (J) y su determinante Calcular las matrices $\mathbf{B}_L$ Calcular $\mathbf{D}$ Calcular la matriz de rigidez del elemento $\mathbf{k}_e$ for j=1→numero de elementos de $\mathbf{k}_e$ </pre>
--

```

                                Calcular la ubicación (h) del elemento (j) de  $\mathbf{k}_e$  en la
                                matriz de rigidez global  $\mathbf{K}_{glob}$  de acuerdo a la conectividad
                                 $\mathbf{K}_{glob}(h) = \mathbf{K}_{glob}(h) + \mathbf{k}_e(j)$ 
                                j=j+1
                        end for
                i=i+1
        end for
Salida: matriz de rigidez global ( $\mathbf{K}_{glob}$ )

```

Se realiza el ensamble del vector de fuerzas de tracción, se muestra el pseudocódigo

Cuadro 5. Ensamble del vector de cargas global debido a las fuerzas de tracción.

```

Entradas: coordenadas de los nodos, matriz de conectividad de elementos, tracción
( $T_x, T_y, T_z$ ), superficie en donde se aplica la tracción
        Encontrar los tetraedros correspondientes a la superficie de tracción
        Encontrar las caras (triángulos) de dichos tetraedros que están en la superficie de
        tracción
        for i=1 → número de caras (triángulos) en la superficie de tracción
                Obtener las coordenadas del triángulo (i)
                Calcular el área  $A_e$  del triángulo (i)
                        for j=1 → 3 (nodos en el triángulo)
                                Calcular la ubicación (h) de las tracciones ( $T_x, T_y, T_z$ ), del
                                nodo (j) del triángulo (i) en el vector de cargas global  $\mathbf{F}_{glob}$ 
                                de acuerdo a la conectividad
                                 $\mathbf{T}_{glob}(h) = \mathbf{T}_{glob}(h) + \frac{A_e(i)}{3} [T_x, T_y, T_z]$ 
                                j=j+1
                        end for
                i=i+1
        end for
Salida: vector de cargas global ( $\mathbf{F}_{glob}$ )

```

También se realiza el ensamble debido a las fuerzas de cuerpo, que en nuestro caso se tratan de las fuerzas debidas al peso del material

Cuadro 6. Ensamble del vector global de carga debido al peso.

```

Entradas: coordenadas de los nodos, matriz de conectividad de elementos, densidad del
material ( $\rho$ ), valor de la aceleración de la gravedad  $g$ .
        Calcular el peso volumétrico del material
                                 $P_v = -\rho g$ 
        for i=1 → número de elementos
                Obtener las coordenadas tetraedro (i)
                Calcular el volumen del elemento (i) con la ayuda de la matriz jacobiana
                Calculamos el valor de la fuerza

```

$F_v = P_v * V_e$ Colocamos el valor vector en los grados de libertad correspondientes de la dirección z $F_{vTot} = F_{vTot} + \frac{V_e}{4} * F_v$ i=i+1 end for Salida: vector de cargas global (F_{vTot})
--

5.2 10 Implementación de las condiciones de frontera

Para la implementación de las condiciones de frontera se utilizó el enfoque de penalización y a continuación se muestra el algoritmo

Cuadro 7. Implementación de las condiciones de frontera en la matriz de rigidez y vector de fuerzas.

Entradas: matriz de rigidez global K_{glob}, vector de cargas global F_{glob}, superficie de frontera, valor del desplazamiento en la frontera. Encontrar el valor máximo (max) de la diagonal principal de la matriz de rigidez global K_{glob} Definir $c = max * 10^5$ for i=1 → número de nodos en la frontera Encontrar la posición w de del nodo (i) en la matriz global y sumarle c a los elementos en las direcciones x, y y z $K_{glob}(w_x) = K_{glob}(w_x) + c$ $K_{glob}(w_y) = K_{glob}(w_y) + c$ $K_{glob}(w_z) = K_{glob}(w_z) + c$ Encontrar la posición w de del nodo (i) en el vector de cargas global y sumarle ca a los elementos en las direcciones x, y y z $F_{glob}(w_x) = F_{glob}(w_x) + ca$ $F_{glob}(w_x) = F_{glob}(w_x) + ca$ $F_{glob}(w_x) = F_{glob}(w_x) + ca$ i=i+1 end for Salida: matriz de rigidez global K_{glob} y vector de cargas global (F_{glob}) con las condiciones de frontera aplicados
--

5.2.11 Solución al sistema

La solución del sistema engloba la parte principal del código ya que en ella se realiza la convergencia del resultado a continuación se muestra el algoritmo usado:

Cuadro 8. Solución al sistema lineal.

Entradas: coordenadas de los nodos, conectividad de los elementos, propiedades del material, superficie de fronteras, valor de la variable en la frontera, superficies donde se aplica la tracción, tracción Leer coordenadas.txt Leer conectividad.txt

Llamar ensamble matriz global lineal $\mathbf{K}_{\text{glob}}$ Llamar ensamble vector de fuerzas $\mathbf{F}_{\text{glob}}$ Llamar condiciones de frontera Resolver $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{\text{glob}} \backslash \mathbf{F}_{\text{glob}}$ Salida: vector de desplazamiento $\mathbf{u}$ lineal

Teniendo el vector solución de desplazamientos se puede utilizar este para calcular el esfuerzo y deformaciones.

Cuadro 9. Calculo de esfuerzos y deformaciones (lineal).

Entradas: coordenadas de los nodos, conectividad de los elementos, propiedades del material, vector de desplazamientos. for i=1 → número de tetraedros Obtener las coordenadas de tetraedro (i) Obtener los desplazamientos de los nodos del tetraedro (i) Calcular las matrices $\mathbf{B}_L$ Calcular $\mathbf{D}$ Calcular los esfuerzos del elemento (i) $\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}_e \mathbf{B}_L \mathbf{u}_e$ Calcular los invariantes del tensor de esfuerzos $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ $I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2$ Calcular el esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$ Calcular las deformaciones equivalentes $\boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbf{D}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma}_e$ Calcular los invariantes del tensor de deformación $I_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ $I_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_z - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{xz}^2 - \gamma_{xy}^2$ Calcular la deformación equivalente de VonMises $\epsilon_e = \sqrt{I_1^2 - 3I_2^2}$ $i = i + 1$ End for Salidas: esfuerzo de VonMises y deformación de VonMises
--

Se utiliza la solución al sistema lineal como solución inicial al método iterativo para la solución no lineal.

Cuadro 10. Solución al sistema no lineal.

Entradas: coordenadas de los nodos, conectividad de los elementos, propiedades del material, vector de cargas global, matriz de rigidez global lineal, solución lineal, numero de iteraciones máxima, tolerancia.

```

Leer coordenadas.txt
Leer conectividad.txt
Invertir matriz rigidez lineal  $\text{inv}(\mathbf{K}_{\text{lin}})$ 
Definir  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{Lin}}$ 
Error=100%
i=1
  While error>tolerancia & i<iteraciones máxima
    Llamar ensamble matriz tangente no lineal
    Aplicar condiciones de frontera a matriz tangente no lineal
    Calcular  $\mathbf{F}_r = (\mathbf{K}_{\text{Tnolin}})^{-1} * \mathbf{u}$ 
    Calcular el residuo  $\mathbf{R} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_r$ 
     $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$ 
    Encontrar el incremento
       $\Delta \mathbf{x} = \text{inv}(\mathbf{K}_{\text{lin}}) * \mathbf{R}$ 
    Calcular la nueva solución
       $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{x}$ 
    Calcular  $\text{error} = \frac{|\text{norma } \mathbf{u}_0 - \text{norma } \mathbf{u}|}{\text{norma } \mathbf{u}_0}$ 
    i=i+1
  end while
  if i> iteraciones máxima
    ‘No converge’
  else i≤ iteraciones máxima
    ‘Converge, solución =  $\mathbf{u}$ ’
  end if

```

Salida: vector de solución no lineal $\mathbf{u}$

Se realiza el cálculo de esfuerzos y deformaciones no lineales

Cuadro 11. Calculo de esfuerzos y deformaciones no lineales.

Entradas: coordenadas de los nodos, conectividad de los elementos, propiedades del material, solución anterior, solución actual, esfuerzo equivalente lineal (σ_{Lin}), deformación lineal equivalente (ϵ_{Lin})

```

Leer coordenadas.txt
Leer conectividad.txt
 $\mathbf{a}_0 = \text{Solución anterior}$ 
 $\sigma_0 = \sigma_{\text{Lin}}$ 
 $\sigma_0 = \sigma_{\text{Lin}}$ 

```

```

For j=1→numero de iteraciones solución
  For i→ numero de elementos
    Encontrar las coordenadas del elemento (i)
    Encontrar las soluciones, anteriores y actuales para el elemento (i)
    Calcular las matrices  $\mathbf{B}_{Lin}$ ,  $\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_0)$  y  $\mathbf{D}(\mathbf{u}_0)$ 
    Calcular  $\boldsymbol{\sigma}_{eNL} = \mathbf{D}_e(\mathbf{u}_0)(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}_0))\mathbf{u}_e$ 
    Calcular los invariantes de  $\boldsymbol{\sigma}_{eNL}$ 
    Calcular el esfuerzo de VonMises no lineal para el elemento (i) y
    guardar en  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{eNL}$ 
    Calcular  $\boldsymbol{\epsilon}_{eNL} = \mathbf{D}_{eNL}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{eNL}$  y guardar en  $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{eNL}$ 
    Calcular los invariantes de  $\boldsymbol{\epsilon}_{eNL}$ 
    Calcular la deformación equivalente no lineal del elemento (i) y
    guardar en  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{eNL}$ 
    i=i+1
  end for
  Calcular  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta\boldsymbol{\sigma}$ 
  Calcular  $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \Delta\boldsymbol{\epsilon}$ 
  j=j+1
end for
end
Salida: esfuerzo y deformación no lineal

```

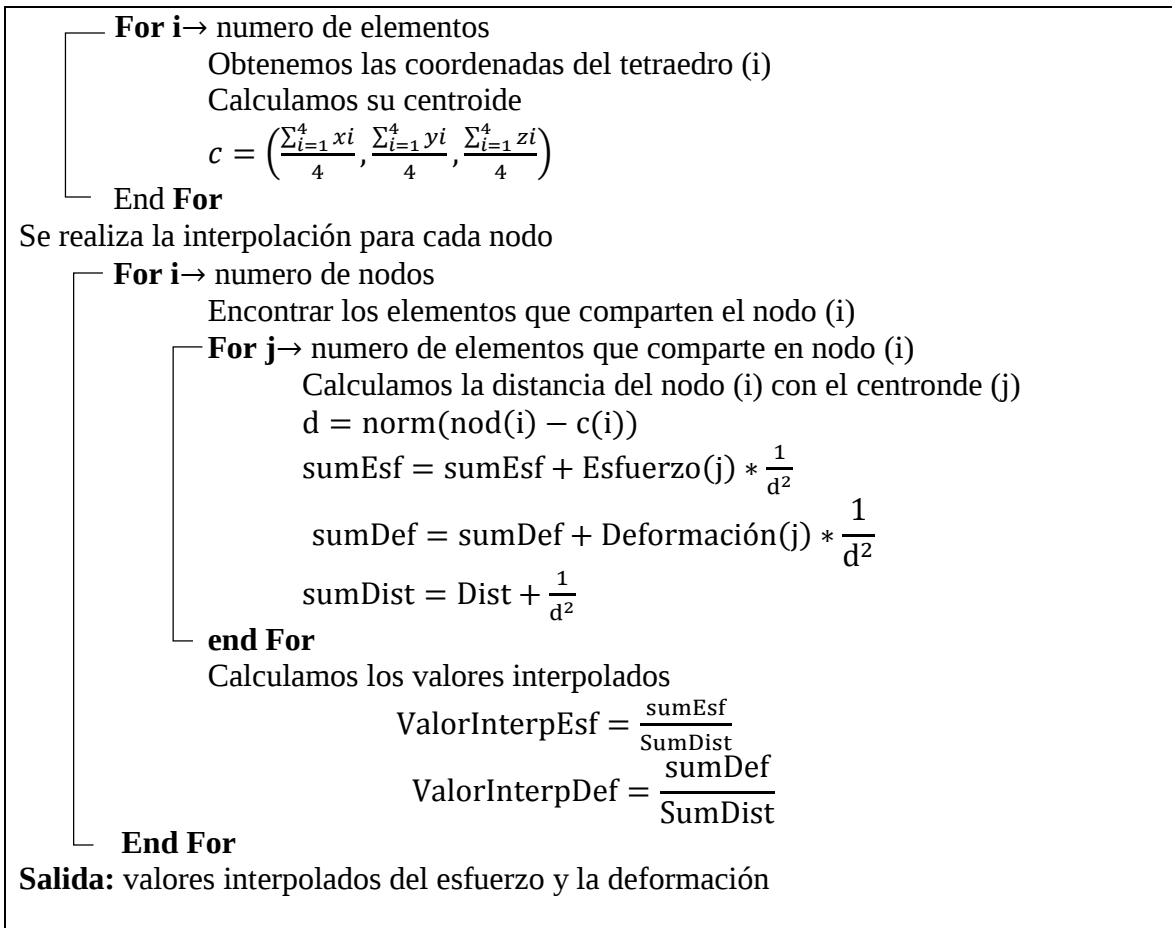
5.2.12 Post Proceso

Para el post-proceso se refiere a la parte de mostrar y analizar los resultados, la mayoría, por no decir todos, los resultados importantes obtenidos a partir del método se presentan en valores vectoriales, los cuales no nos dicen mucho ya que nosotros lo que nos es útil en el análisis es la localización dentro de la geometría de los valores correspondientes, bajo tal perspectiva se ubica el post-proceso.

Los valores obtenidos para el esfuerzo y la deformación son por tetraedro, es decir, su ubicación es el centroide del tetraedro, por lo que es necesario interpolar estos valores a los nodos, ya que de esta forma podremos asignarle un color en el mallado y hacer la distinción, a continuación se muestra el algoritmo de interpolación, cabe mencionar que se usó el método de distancias ponderadas.

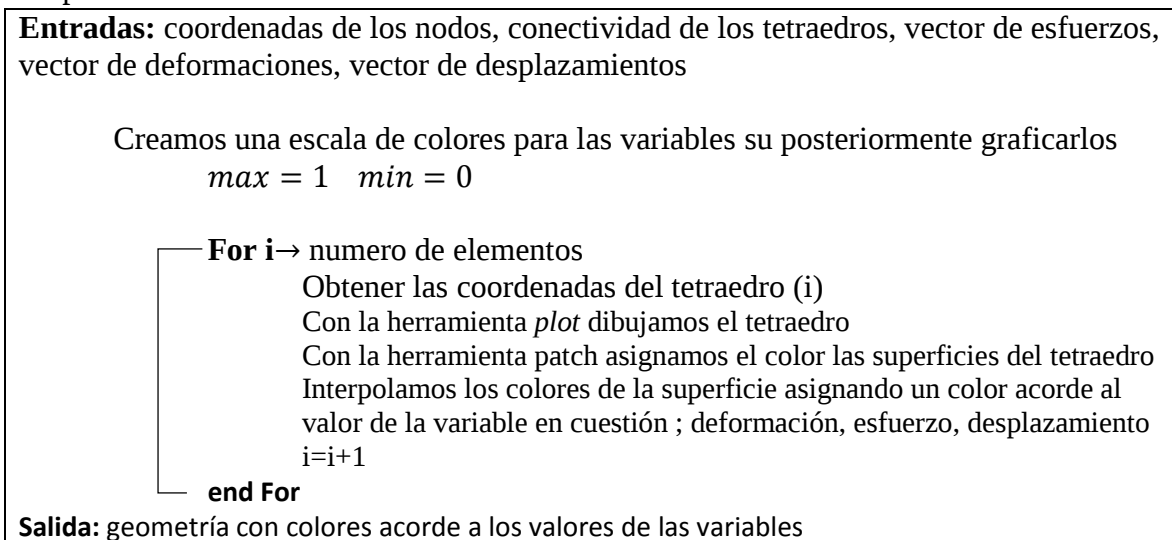
Cuadro 12. Interpolación de esfuerzo y deformaciones.

Entradas: coordenadas de los nodos, conectividad de los tetraedros, vector de esfuerzos, vector de deformaciones
Calculamos el centriode de cada tetraedro



El paso siguiente es identificar dentro de la geometría los valores de cada nodo, para ello procedemos a realizar la geometría e interpolar colores acorde a los valores de las variables de desplazamiento, deformación y esfuerzos que se interpolaron en el paso anterior.

Cuadro 13. Realización de la geometría diferenciando los valores de variables por medio de interpolación de colores.



6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 Resultados

Se alcanzó la convergencia con una tolerancia al error de 0.001 del resultado con 200 iteraciones a continuación se muestra la gráfica del resultado, que se refiere a la norma de todo el vector de desplazamiento a manera de caracterizarlo en un solo valor

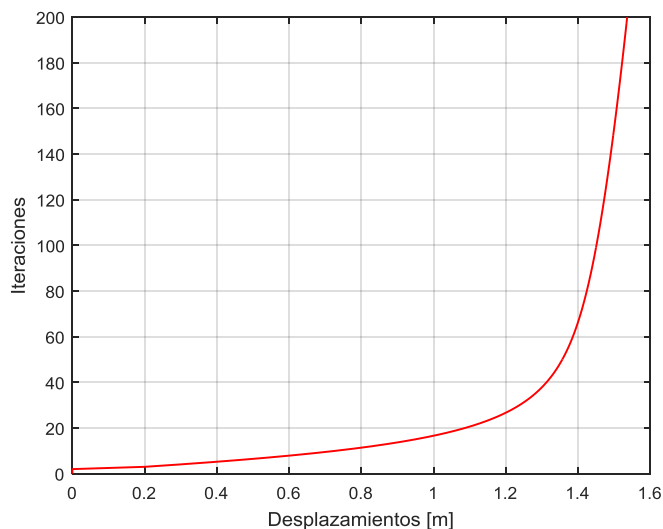


Figura 24. Variación de la norma de desplazamiento con las iteraciones.

En la figura (24) podemos visualizar el desplazamiento conforme avanzan las iteraciones, utilizar la norma de todo el vector nos puede confundir respecto a la magnitud real del desplazamiento, por ello también se muestra la gráfica del nodo de máximo desplazamiento en la geometría que corresponde al nodo: 12451.

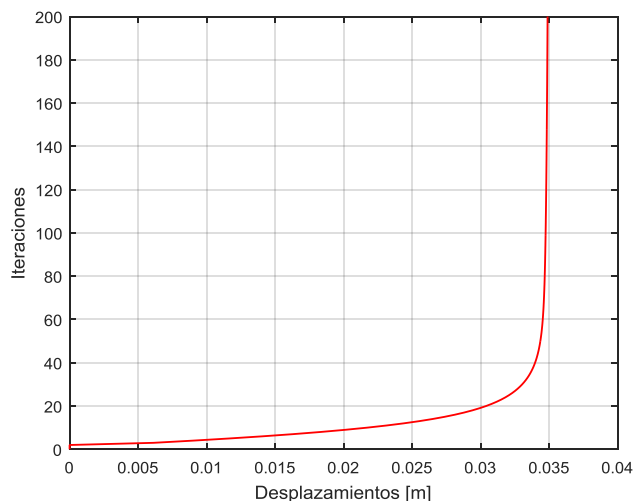


Figura 25. Variación del desplazamiento del nodo: 12451 con las iteraciones.

En método de N-R también se puede manejar la fuerza con incrementos y conforme avanzan las iteraciones la fuerza debe de converger a la fuerza F_0 , la gráfica de la figura (26) muestra la convergencia.

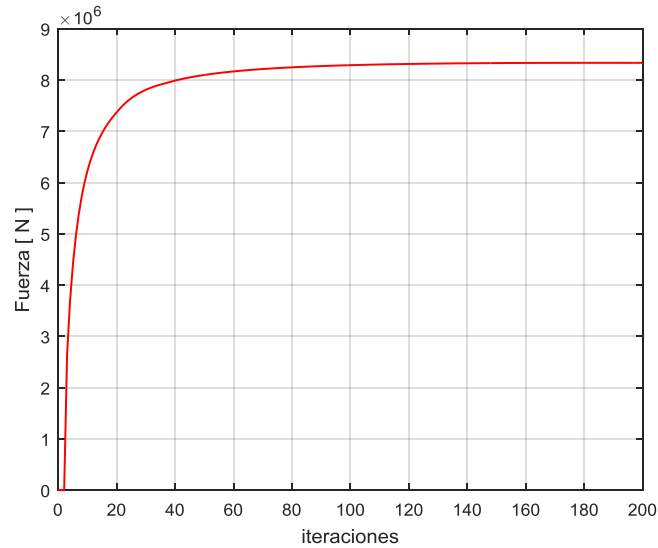


Figura 26. Variación del incremento de fuerza con las iteraciones.

También se graficó la variación del valor del incremento de desplazamiento con forme avanzaban las iteraciones

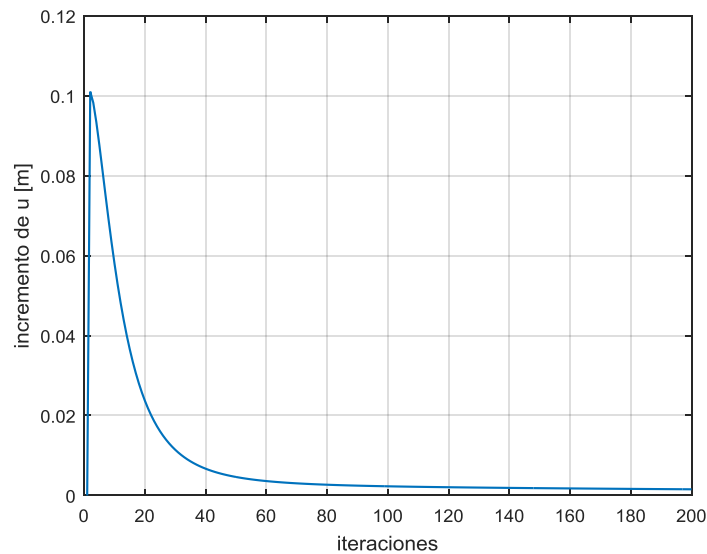


Figura 27. Variación del incremento de desplazamiento con las iteraciones.

Se puede observar en la figura (27) que es en las primeras iteraciones en los que el valor del incremento es mayor y a medida que las iteraciones avanzan este tiene a cero para alcanzar

la convergencia. Se puede entonces presentar la importante relación fuerza-desplazamiento a partir de los incrementos y observar el comportamiento no lineal, se muestra conjuntamente el comportamiento lineal a modo de comparación.

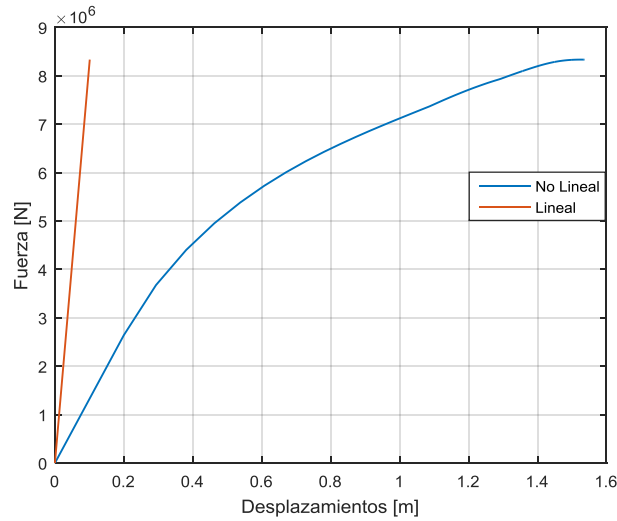


Figura 28. Variación del incremento de la norma de desplazamiento con la fuerza.

Se puede notar en la figura (28) el comportamiento no lineal de la norma del desplazamiento, se muestra a continuación el mismo resultado pero para el nodo 12451

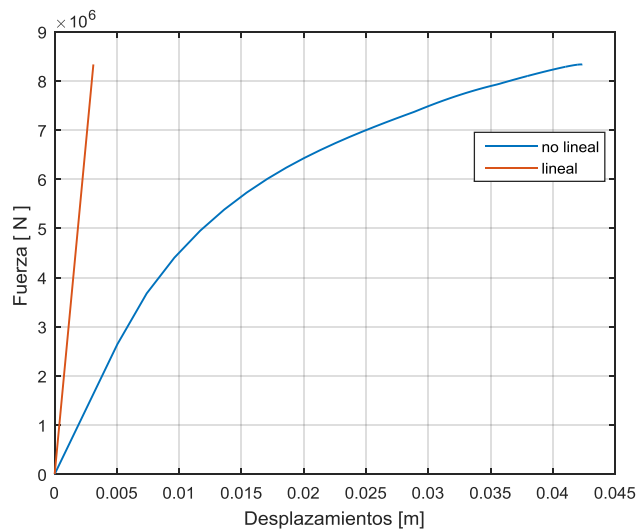


Figura 29. Variación del incremento del desplazamiento del nodo 12451 con la fuerza.

Se graficó la variación del error con forme las iteraciones avanzaban y el resultado se presenta en la figura (30)

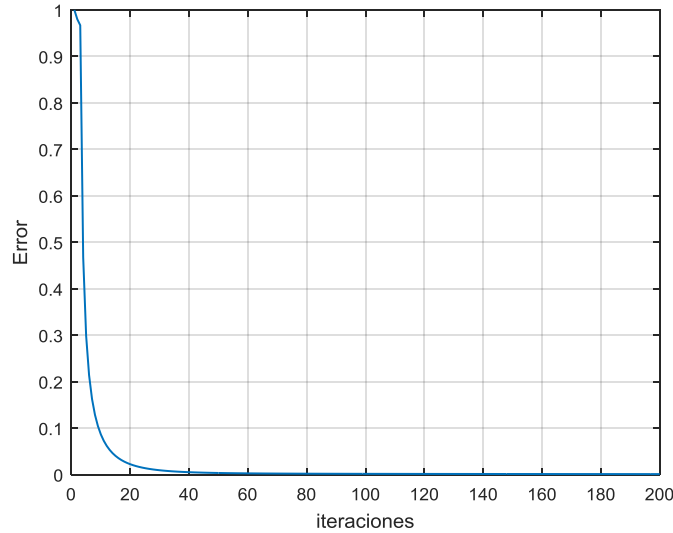


Figura 30. Variación del error durante las iteraciones.

Podemos observar que el error disminuye rápidamente y que aproximadamente en 40 iteraciones el error ya es cercano de cero, se planteó una tolerancia de 0.001 para este trabajo lo cual hizo que las iteraciones necesarias para la convergencia aumentaran. Una vez obtenida la convergencia para el desplazamiento se calculó tanto las deformaciones como los esfuerzos, en las figuras (31) y (32) se presentan los resultados de la variación del esfuerzo y la deformación con las iteraciones.

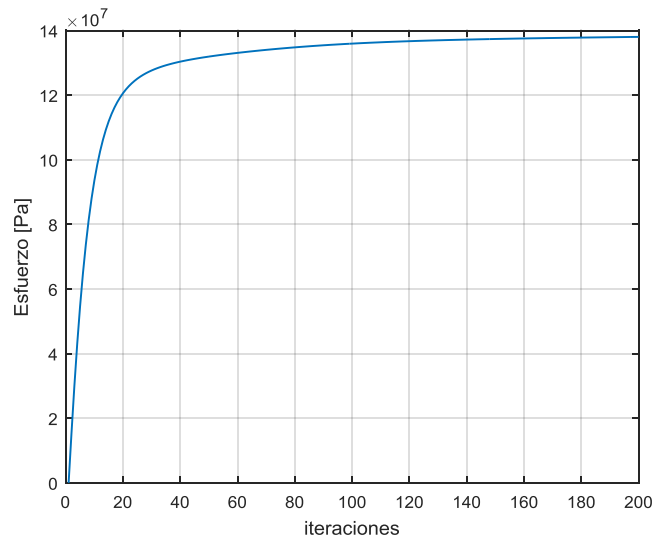


Figura 31. Variación del esfuerzo durante las iteraciones.

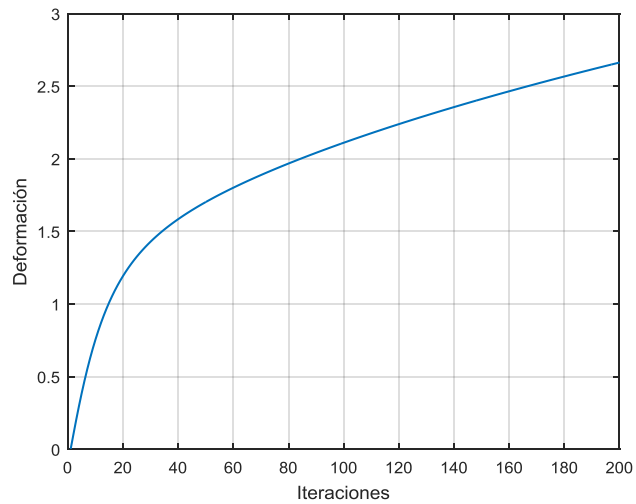


Figura 32. Variación de la deformación durante las iteraciones.

Se realizó la gráfica esfuerzo-deformación, la cual es la que caracteriza el material y a manera de diferenciar el con el comportamiento lineal, se incluyó en la gráfica tal comportamiento.

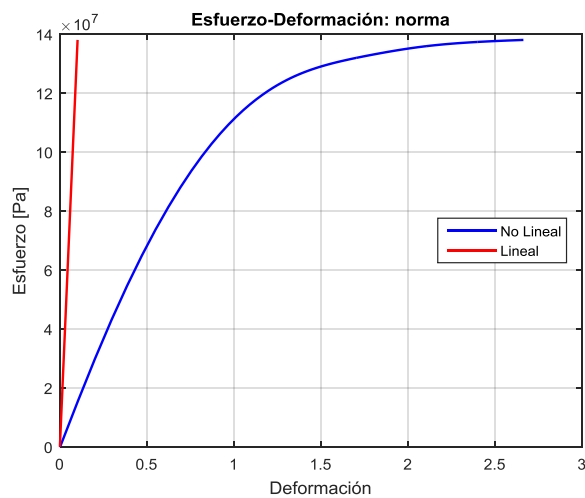


Figura 33. Grafica de la norma de esfuerzo y deformación.

Al igual que con el desplazamientos, se grafican las normas tanto para el esfuerzo como para la deformación, para tener una idea más clara de las magnitudes de estas dos variables se graficaron estas en el nodo 11467 que es donde se encuentra el valor máximo del esfuerzo

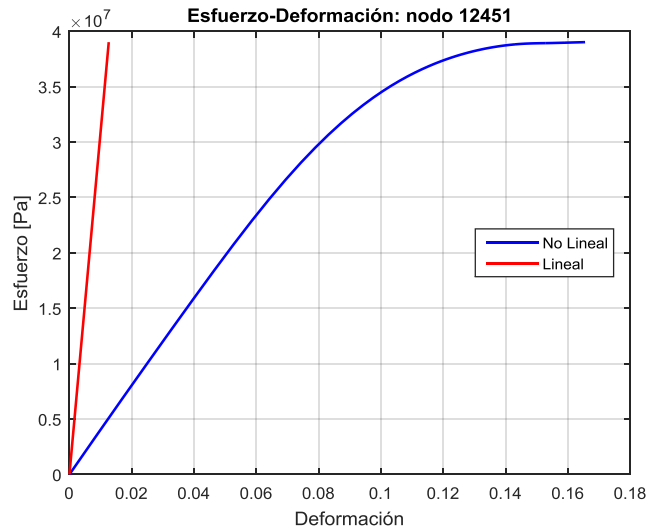


Figura 34. Grafica del esfuerzo y deformación para el nodo 12451.

Se puede notar que la convergencia del valor es más rápido en el valor nodal, pero el valor de la norma refleja el comportamiento de todo el vector y por lo tanto se explica que unos nodos convergen antes que otros y que la convergencia de la norma se da hasta que todos los nodos hayan convergido.

Después de resolver el sistema de ecuaciones y calcular el desplazamiento se puede generar la malla de la geometría deformada, la cual se muestra en la figura (35)

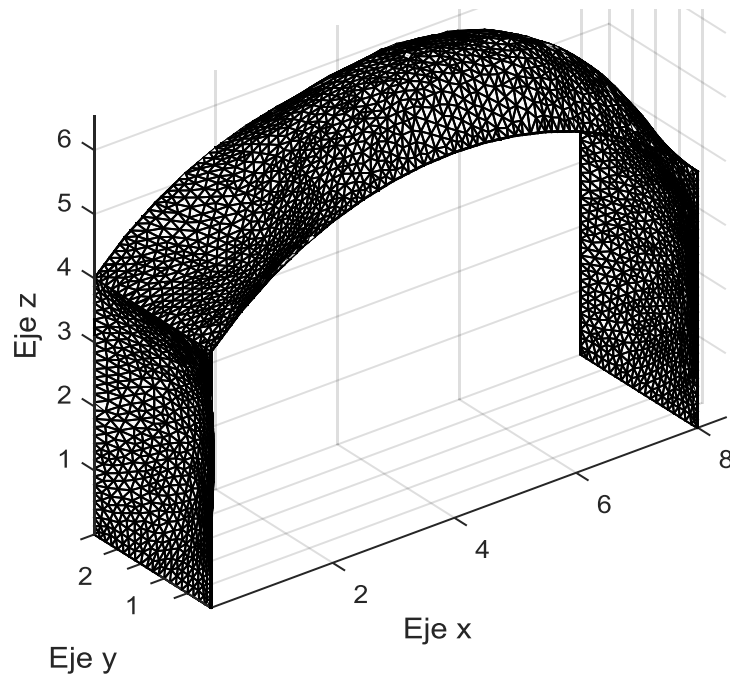


Figura 35. Malla de la geometría deformada vista isométrica.

En la imagen (24) podemos ver como se está deformando la malla debido a las cargas, para una mejor visualización también se muestra la vista frontal

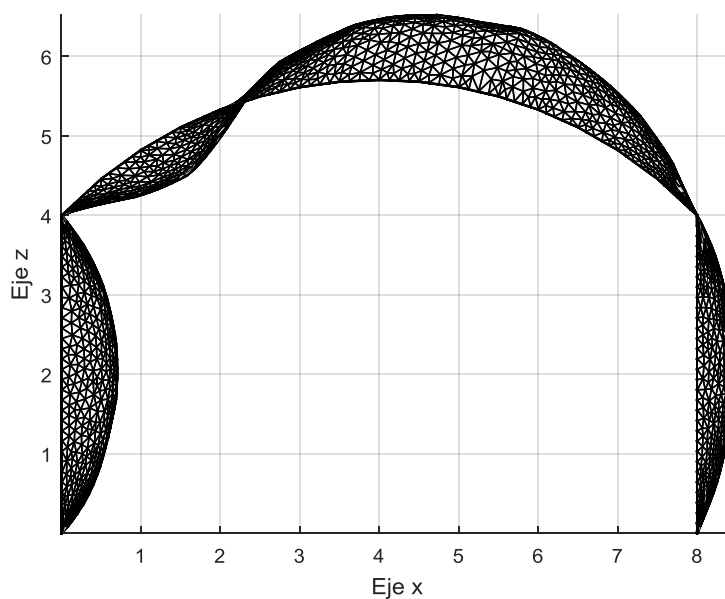


Figura 36. Malla de la geometría deformada vista frontal.

Se graficaron los vectores de desplazamiento en el cuerpo y se presentan en la siguientes imágenes

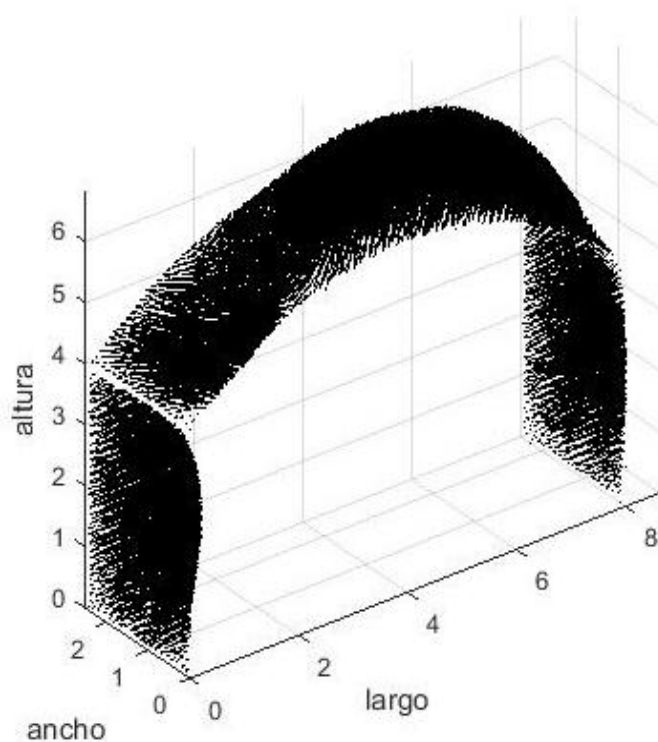


Figura 37. Vectores de deformación, vista isométrica.

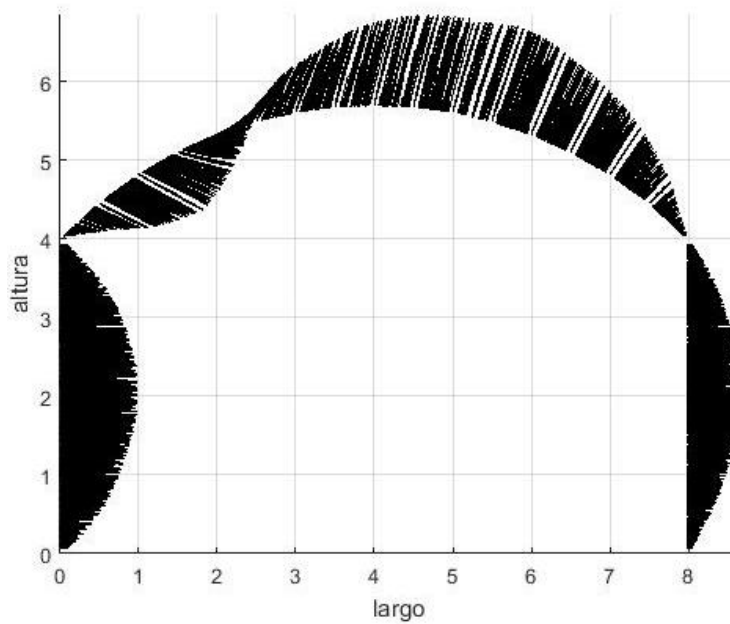


Figura 38. Vectores de deformación, vista frontal.

A manera de ilustrar de mejor manera los vectores de desplazamiento se realiza un acercamiento a la parte superior en el que se puede apreciar de mejor manera la magnitud.

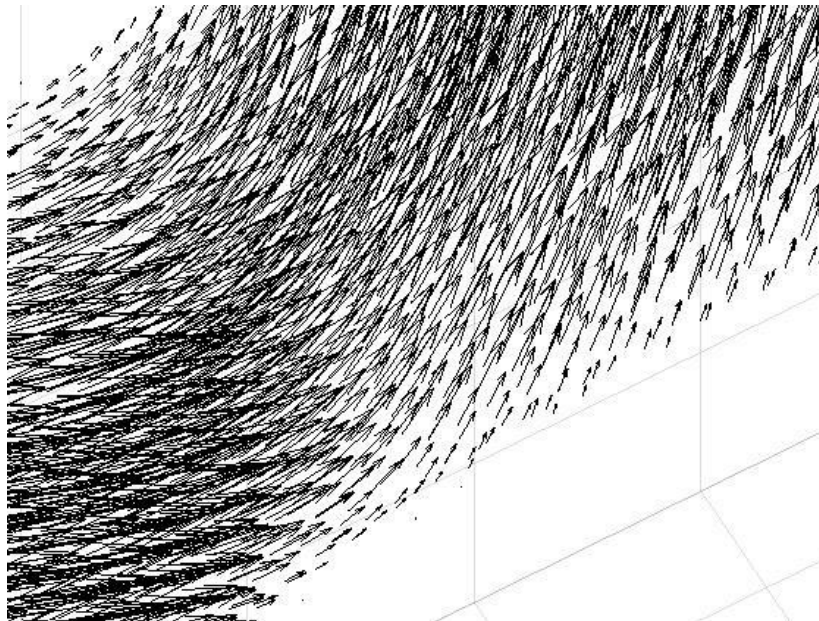


Figura 39. Acercamiento a los vectores.

Con los resultados de desplazamiento, esfuerzo y deformación podemos realizar la simulación y presentar los resultados con la geometría deformada e identificando las posiciones de los máximos valores en el cuerpo, las figuras (40), (41), (42) y (43) nos presentan los desplazamientos el cual se presenta con una escala de 10 para que se logre notar el patrón de desplazamientos

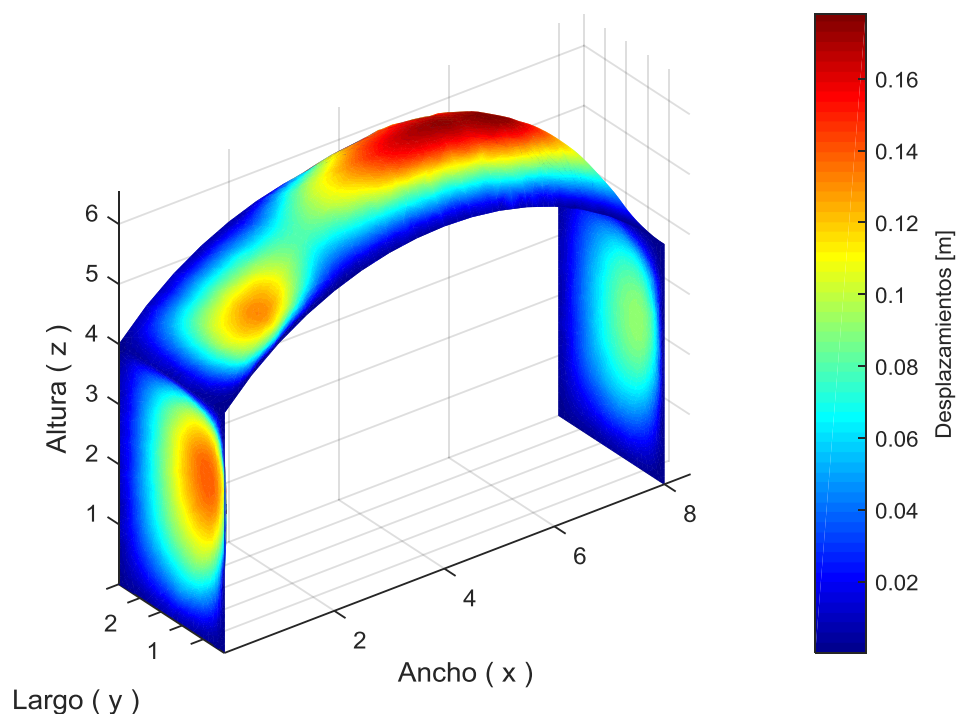


Figura 40. Desplazamientos en el cuerpo, vista isométrica.

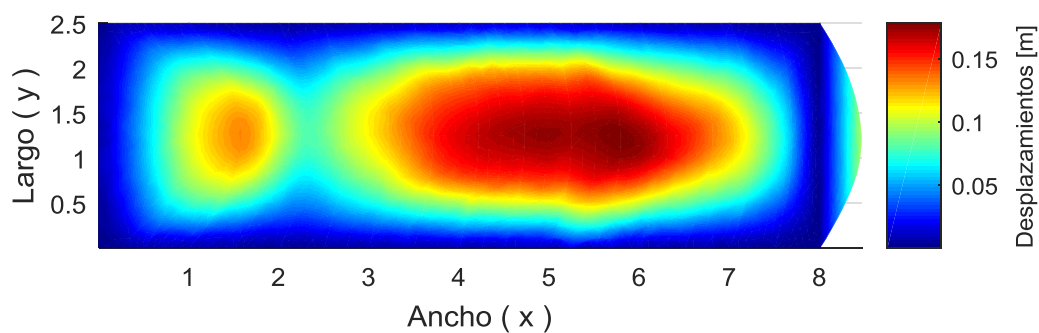


Figura 41. Desplazamientos en el cuerpo, vista superior.

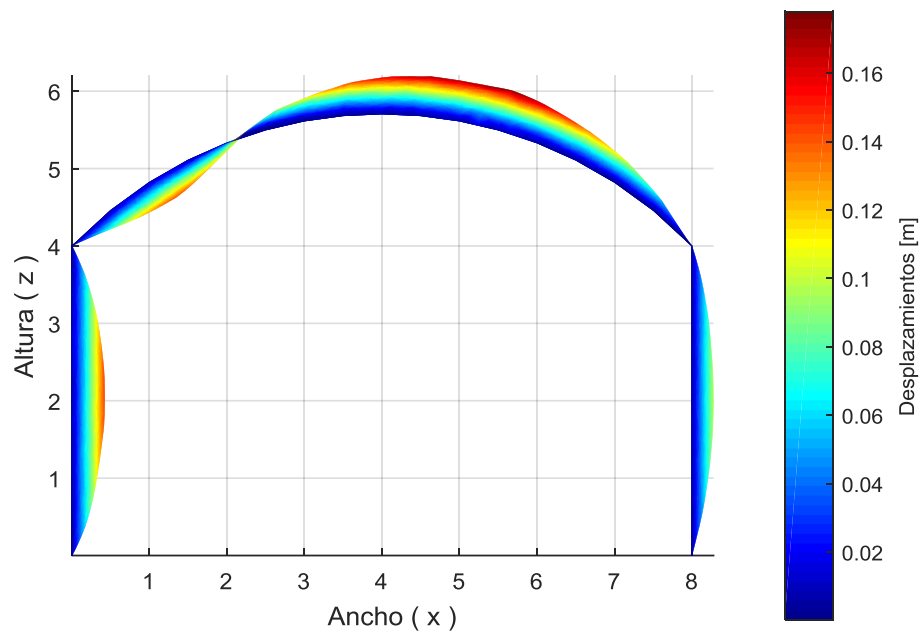


Figura 42. Desplazamientos en el cuerpo, vista frontal

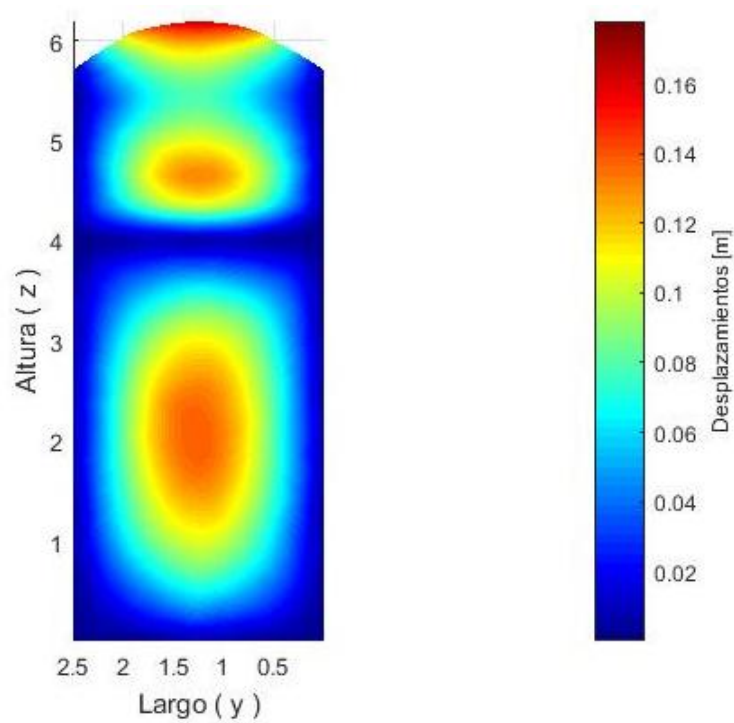


Figura 43. Desplazamientos en el cuerpo, vista lateral.

Las figuras (44), (45), (46) y (47) muestran la magnitud del esfuerzo y su localización dentro de la geometría

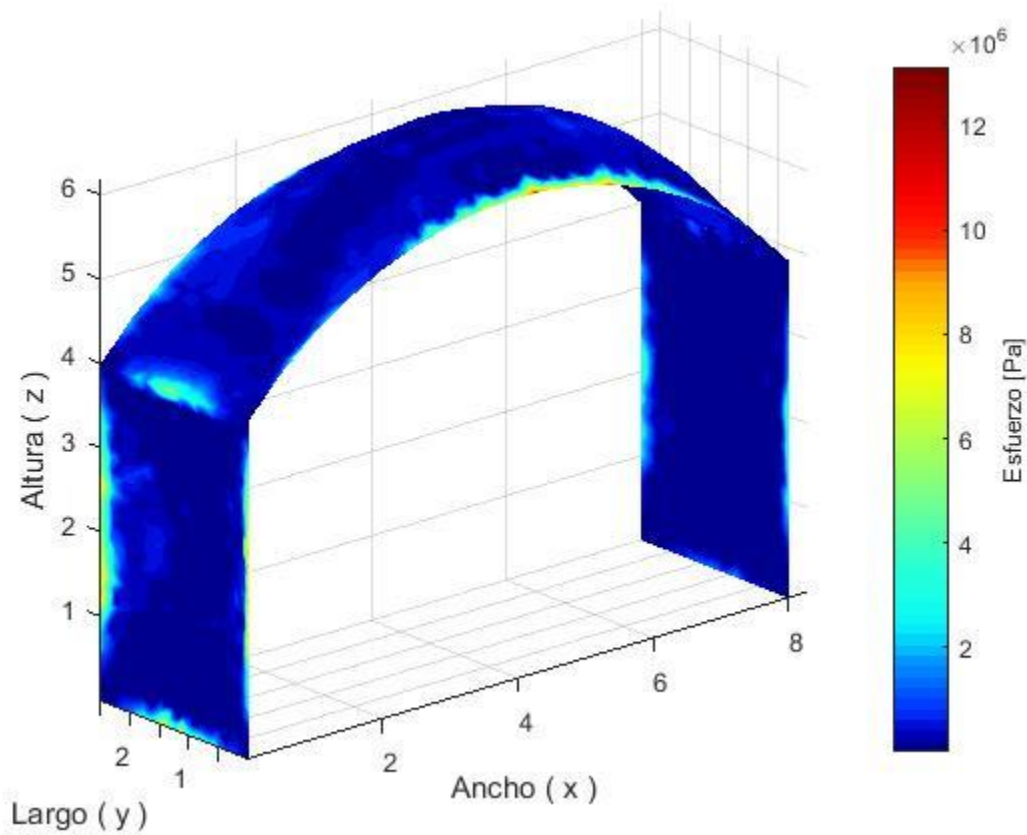


Figura 44. Esfuerzos en el cuerpo vista isométrica.

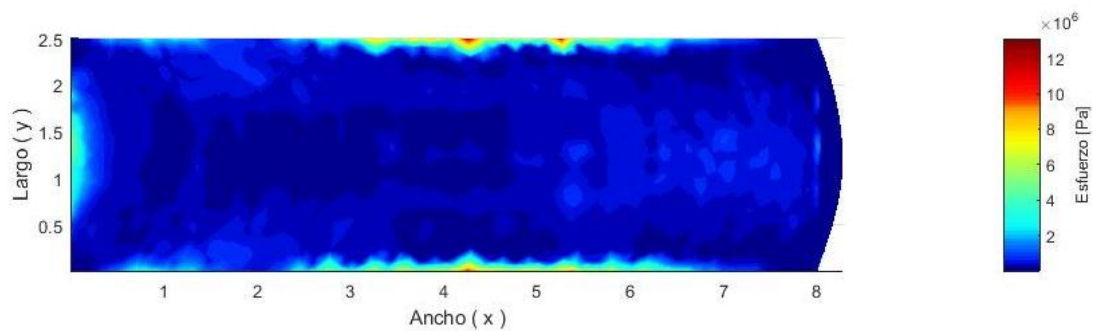


Figura 45. Esfuerzos en el cuerpo vista superior.

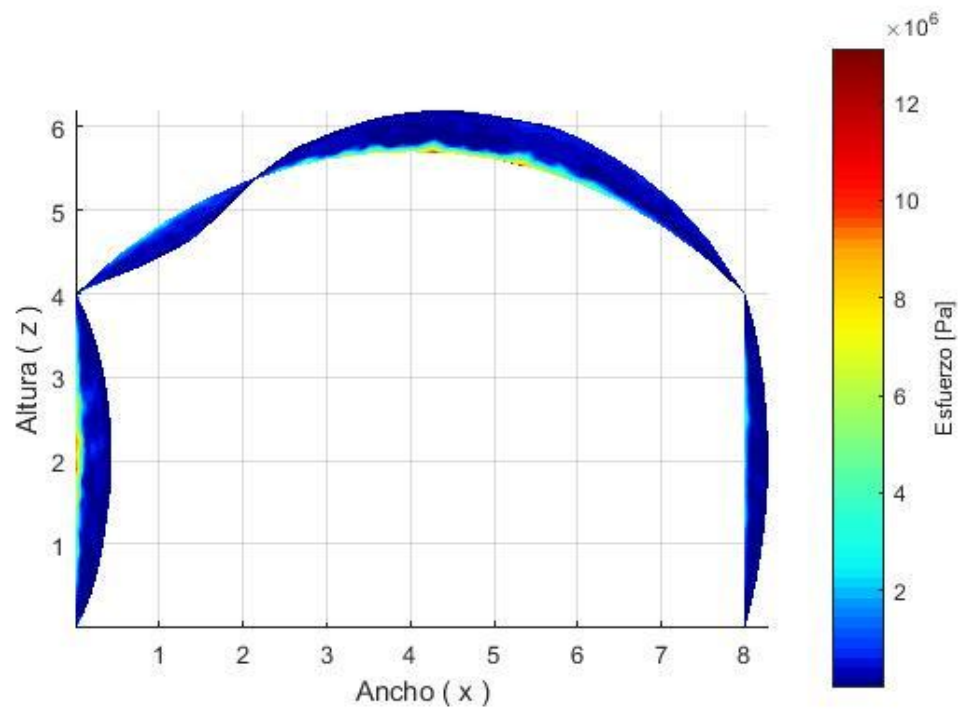


Figura 46. Esfuerzos en el cuerpo vista frontal.

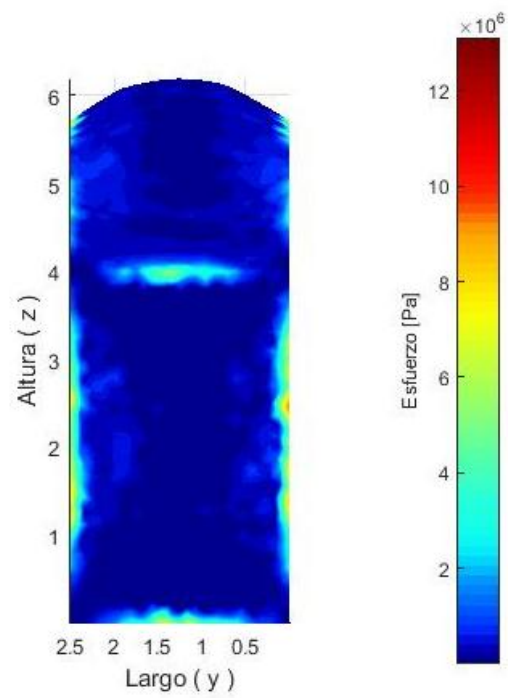


Figura 47. Esfuerzos en el cuerpo vista lateral.

Las figuras (48), (49), (50) y (51) muestran la magnitud de la deformación así como su ubicación en el cuerpo

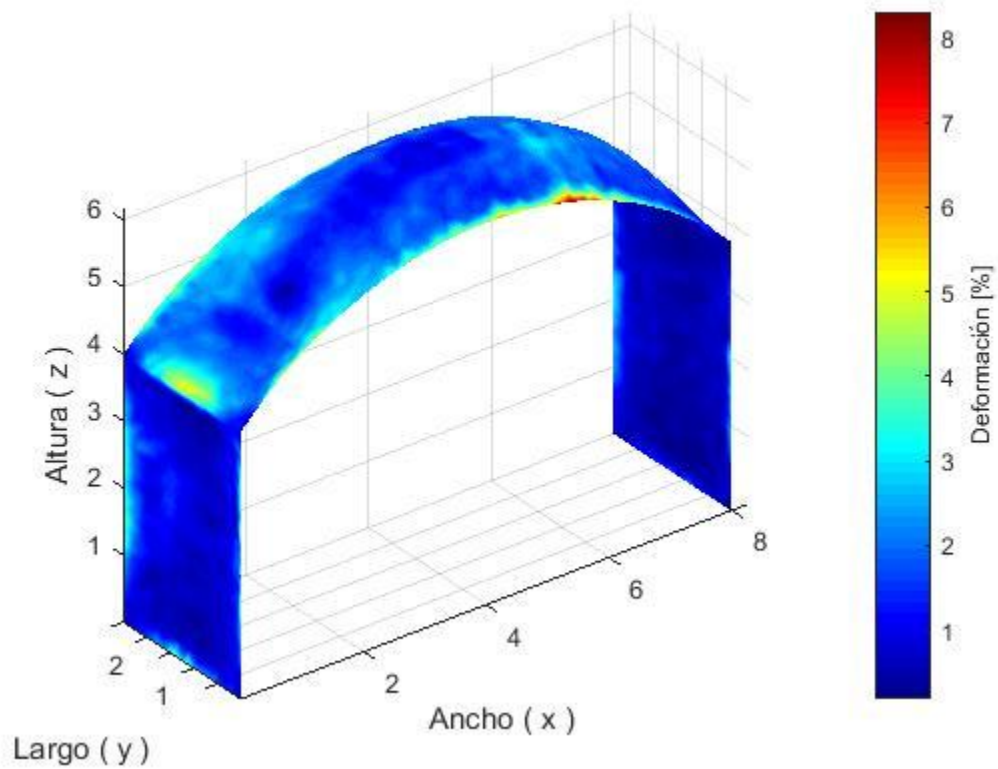


Figura 48. Deformación en el cuerpo vista isométrica.

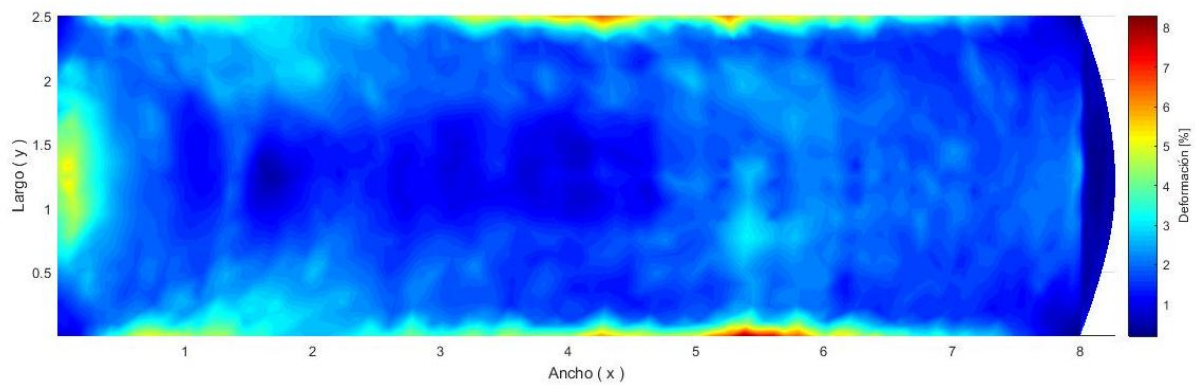


Figura 49. Deformación en el cuerpo vista superior.

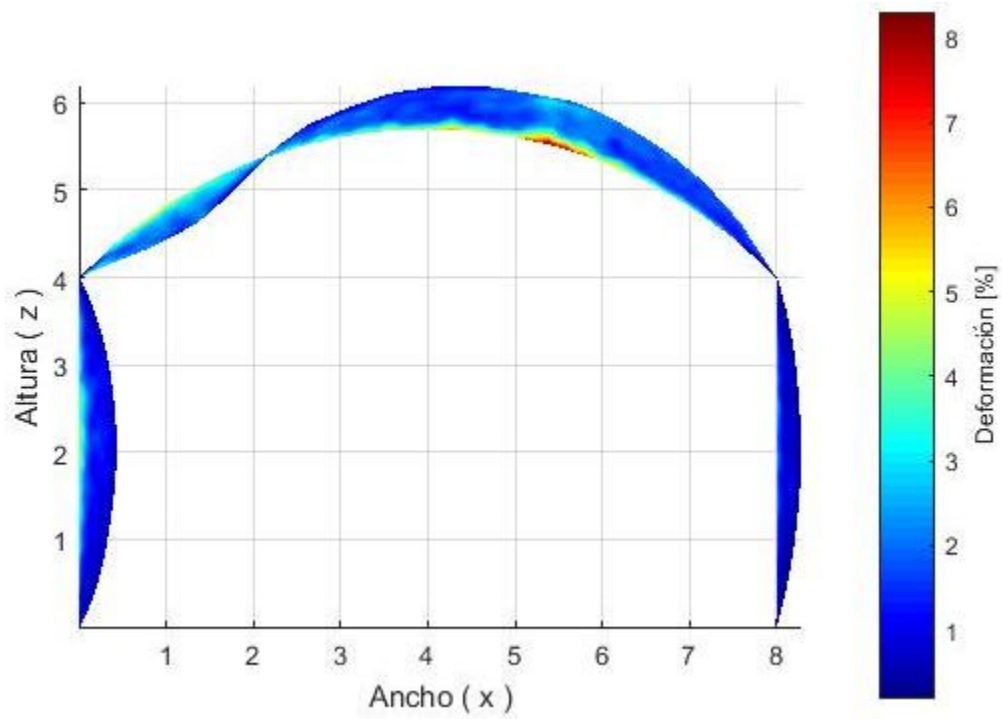


Figura 50. Deformación en el cuerpo vista frontal.

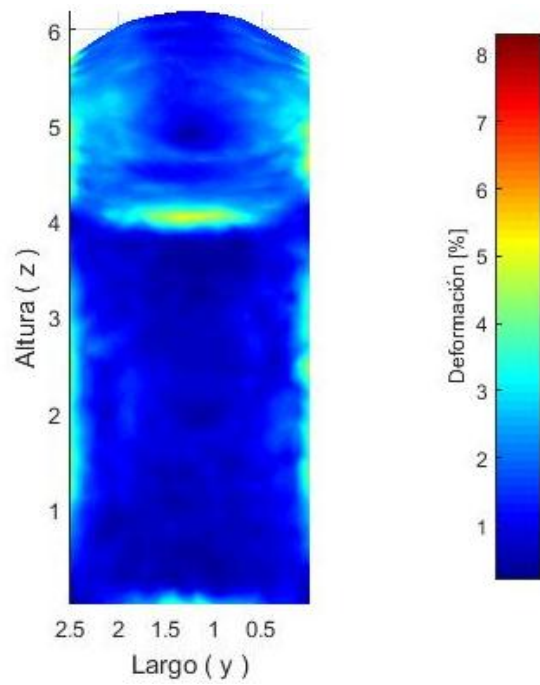


Figura 51. Deformación en el cuerpo vista lateral.

Las figuras anteriores nos permiten como se había mencionado antes la localización, ahora con esta información y para que la visualización de resultados sean aún más clara se realizó la extracción de resultados en zonas específicas y se graficaron en las siguientes figuras. Se presenta el desplazamiento de la pared barlovento en un plano central y se sobrepone el resultado lineal para la comparación.

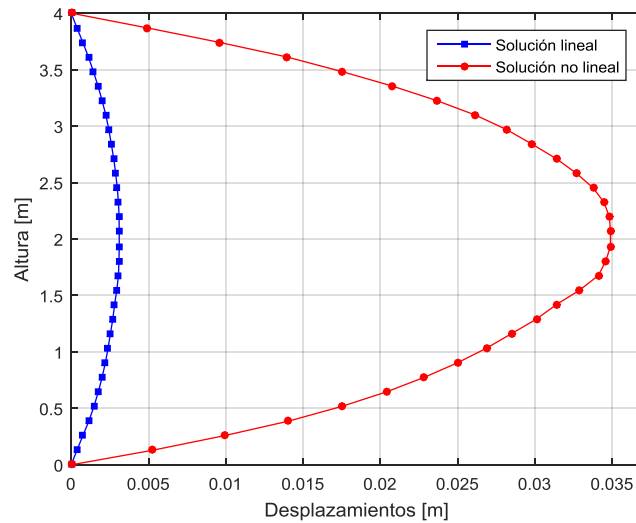


Figura 52. Desplazamiento en la pared barlovento plano medio.

Se extrajeron los datos también de la zona del arco superior y se graficaron del mismo modo

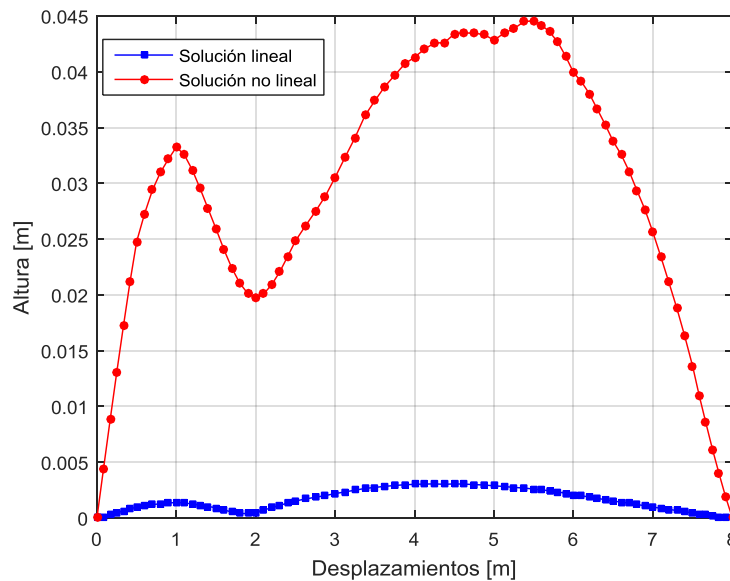


Figura 53. Desplazamiento en el arco superior plano medio.

Para el esfuerzo se extrajeron de igual manera los valores en el plano central de la pared barlovento, el resultado se muestra en la figura (54)

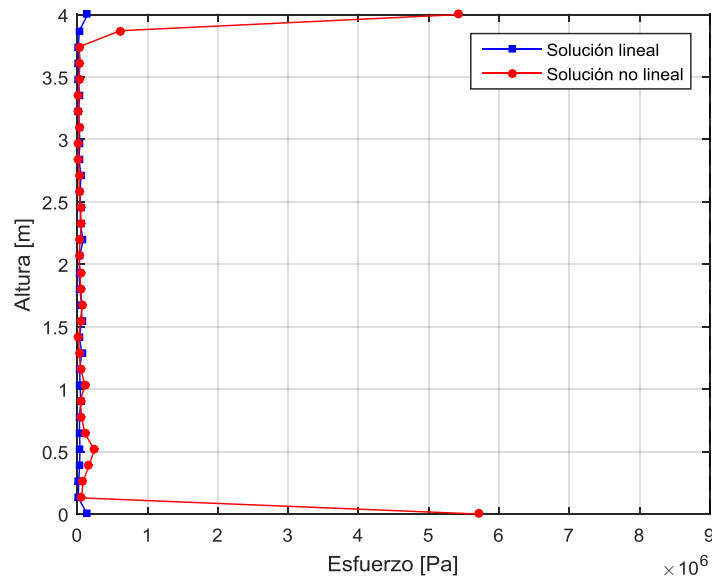


Figura 54. Esfuerzos en la pared barlovento plano medio..

Se muestra también los valores obtenidos ahora en plano lateral fronterizo, en esa grafica se incluye el valor del esfuerzo de fluencia del material con el fin visualizar si se supera este valor

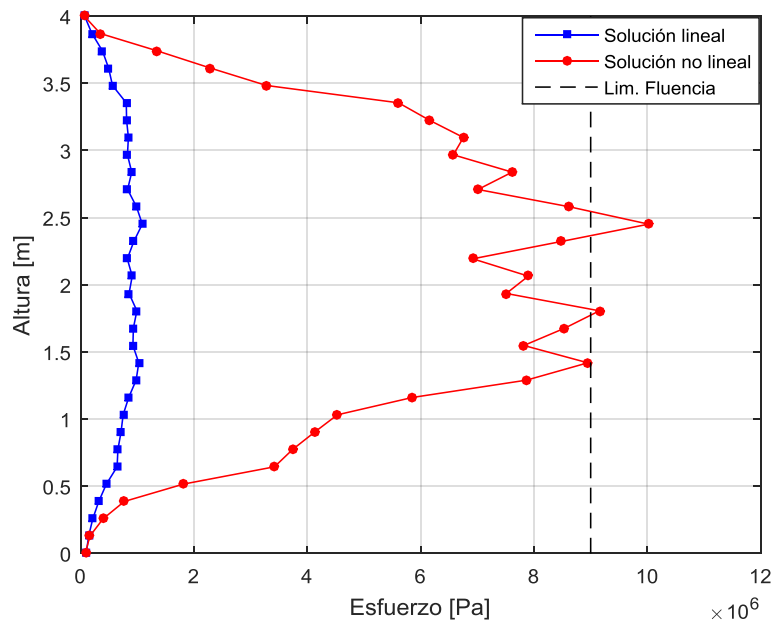


Figura 55. Esfuerzos en la pared barlovento plano lateral.

Se realizó para el arco superior el mismo procedimiento para las gráficas de esa zona

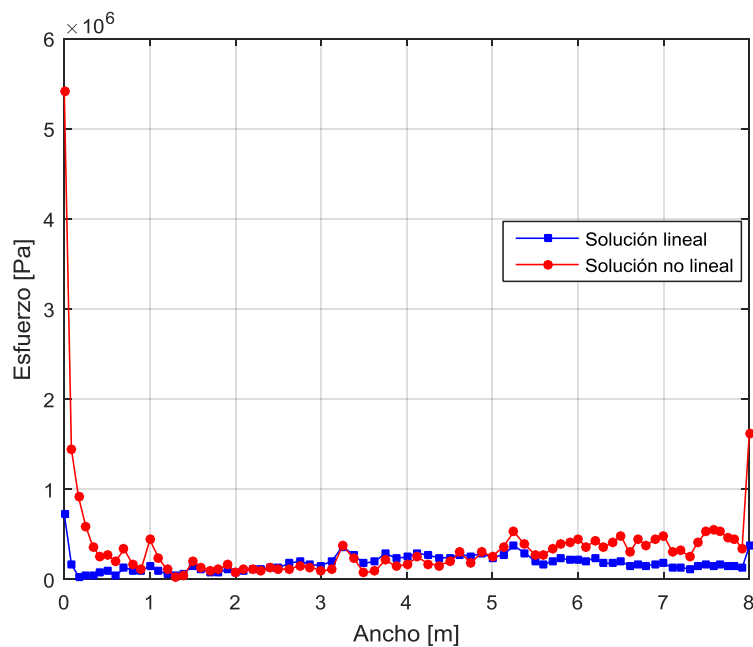


Figura 56. Esfuerzos en el arco superior plano central.

La parte de la superficie en la frontera lateral en esta parte nuevamente se coloca el valor del límite de fluencia para la visualización de posibles lugares en los que el valor del esfuerzo calculado supere este valor

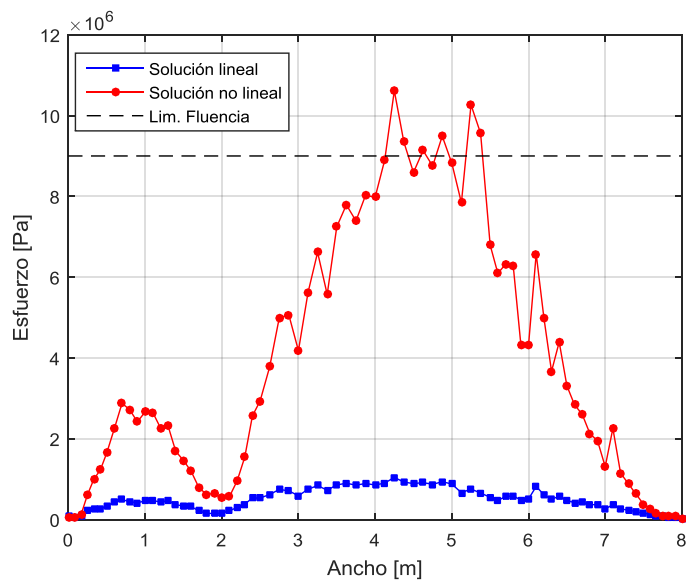


Figura 57. Esfuerzos en el arco superior plano lateral.

Para los valores de la deformación se realizaron las gráficas correspondientes al igual que para el desplazamiento y el esfuerzo

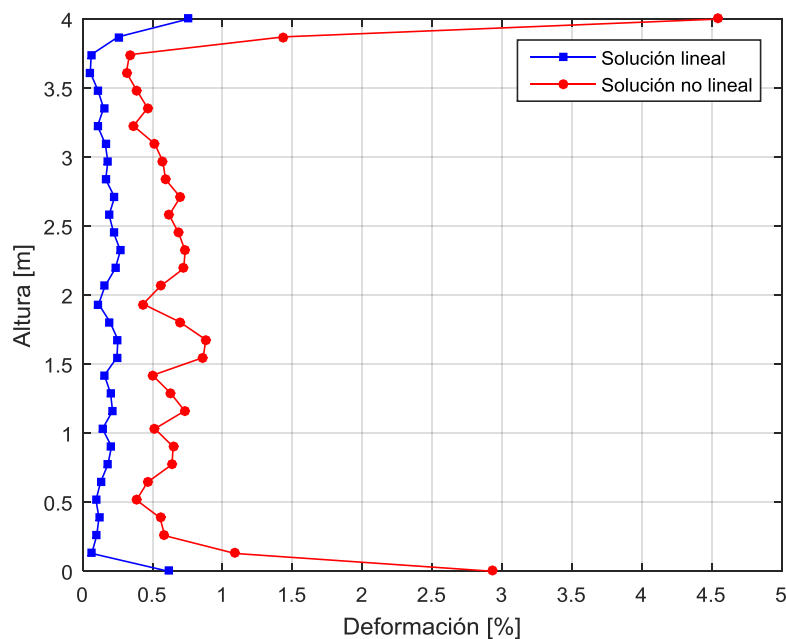


Figura 58. Deformaciones en la pared barlovento plano central.

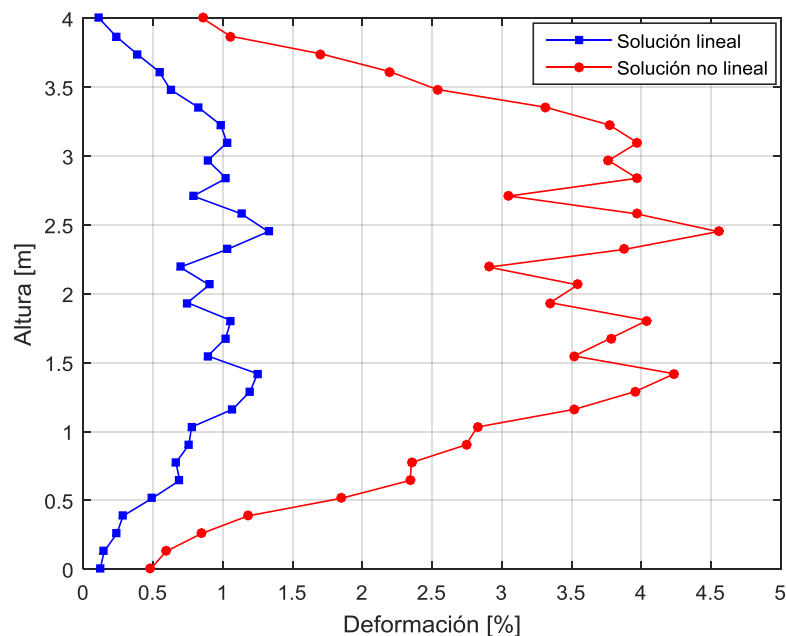


Figura 59. Deformaciones en la pared barlovento plano lateral.

En la parte del arco superior se extrajeron en los mismos planos, ya que también son las zonas donde se presentan los valores máximos.

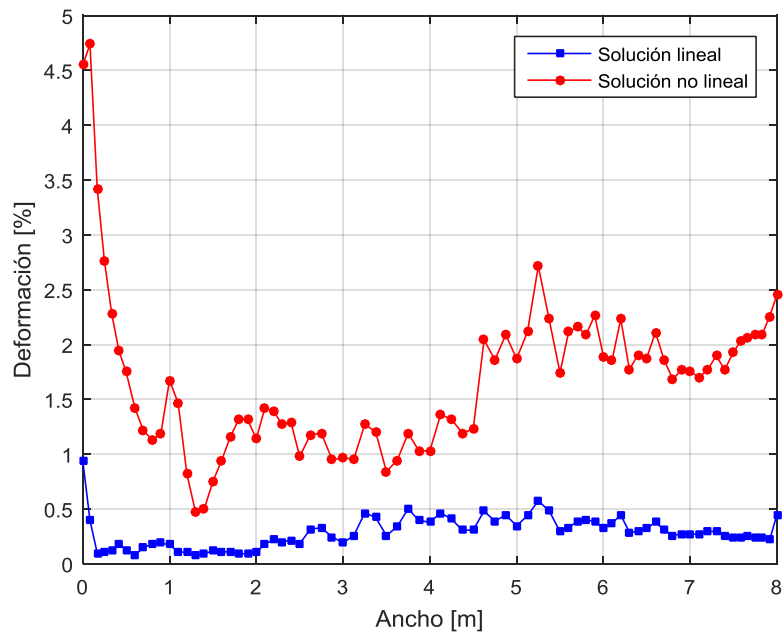


Figura 60. Deformaciones en el arco superior plano medio.

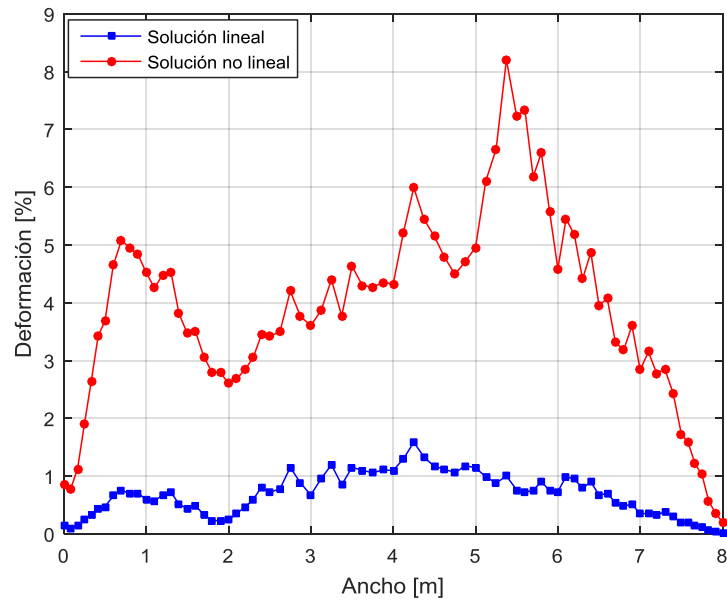


Figura 61. Deformaciones en el arco superior plano medio.

6.2 Discusión

Las figuras 24 y 25 muestran la convergencia del desplazamiento a medida que las iteraciones avanzan, podemos darnos cuenta que los desplazamiento del nodo convergen más rápido que los de la norma del vector, esto porque en la convergencia de la norma todos los nodos tienen que estabilizarse y converger, y unos tardan más que otros y eso se ve reflejado en el que la norma necesite de más iteraciones para converger.

En la figura 26 podemos ver que en efecto los incrementos de fuerza convergen hacia F_0 , lo cual es un indicador de que el método está convergiendo al resultado deseado. La figura 27 nos muestra el valor del incremento de desplazamiento a lo largo de las iteraciones, podemos darnos cuenta que es en las primeras iteraciones en las que su valor es máximo y progresivamente se estabiliza en un valor cercano a cero lo cual indica la convergencia del resultado.

En la figura 28 podemos graficar los incremento de fuerza con el desplazamiento, es en esta grafica donde podemos notar el comportamiento no lineal del resultado, podemos comprar este resultado con la solución que obtendríamos si se resolviera este mismo problema con la teoría lineal, la figura 29 nos muestra este mismo comportamiento pero utilizando el valor del nodo de máximo desplazamiento, se ratifica que en efecto, el comportamiento no lineal es el mismo.

En la figura 30 se muestra el error relativo y su comportamiento a lo largo de las iteraciones, se nota que este disminuye de forma rápida en las primeras iteraciones, se puede notar que a partir de la iteración 40 el error es cercano a cero, pero nuevamente por la tolerancia impuesta y de que este error es calculado por la norma del vector de desplazamiento total se precisan muchas más iteraciones para alcanzar la convergencia.

Las figuras 31 y 32 nos muestran el comportamiento del esfuerzo y de la deformación a lo largo de las iteraciones, se puede notar de igual manera como el desplazamiento, el comportamiento no lineal. La figura 33 nos muestra un resultado importante ya que nos presenta el comportamiento del esfuerzo-deformación no lineal obtenido de los desplazamientos, se puede notar que es una curva típica para la no linealidad material hiperelástico, se sobrepone el resultado lineal a manera de comparación para notar que en

efecto las deformaciones sufridas no pueden considerarse pequeñas. La figura 34 muestra de igual manera este comportamiento no lineal solo que los valores corresponden a los del nodo de mayor esfuerzo, los valores presentados en esta figura son los que se deben de tomar en cuenta en los criterios de falla, ya que los de la norma dan solo un valor representativo de todo el cuerpo.

Las figuras 35 y 36 muestran la malla de la geometría aplicando los desplazamientos obtenido, en la cual se puede ver como el cuerpo cambia de forma, esto tiene especial importancia ya que es una forma de comprobar que el resultado tenga un sentido físico, ya que como se mencionó en un principio, el problema no lineal no posee una sola solución.

Las figuras 37 y 38, muestran los vectores de desplazamientos en cada nodo, es una forma también de corroborar que el resultado tiene un sentido físico correcto, la figura 39 nos muestra un zoom de los vectores, ya que al ser demasiados nodos en la geometría, las figuras 37 y 38 no logran distinguirse en de forma nítida.

Las figuras 40, 41, 42 y 43 ya nos muestra el valor el desplazamiento interpolado en toda la geometría, podemos ver los lugares de máximos desplazamientos así como los lugares donde este es cero, se presentan diferentes vistas para que su visualización sea completa, a la par la geometría muestra su forma deformada la cual tiene concordancia con los colores presentados, la parte del barlovento y del arco superior son las zonas donde se presentan los valores máximos de desplazamiento, esto es obvio al tratarse, el primero, de la zona donde el viento impacta y la parte del arco donde hay mayor área de contacto.

Las figuras 44, 45, 46 y 47 nos muestran el valor del esfuerzo interpolado en la geometría, se presentan diferentes vistas para que la apreciación sea completa, nos podemos dar cuenta que los mayores esfuerzos se localizan justamente en los bordes donde se restringe el desplazamiento, esto es algo que se esperaba, ya que al no haber desplazamiento se genera un concentrador de esfuerzo y se ve reflejado tanto en la zona del barlovento y del arco superior donde se registraron los desplazamientos mayores.

Las figuras 48, 49, 50 y 51 muestran el valor de la deformación interpolada en la geometría, al observar las diferentes vistas se nota que las zonas de mayor deformación coinciden

relativamente con las zonas de máximo esfuerzo, esto es natural ya que el esfuerzo está relacionado directamente con la deformación.

Las figuras anteriores, referentes los valores del desplazamiento, esfuerzo y deformación, interpolados en la geometría nos mostraron las zonas de interés al encontrarse valores máximos de estas variables, es por eso que se extrajeron la información de estas zonas y se graficaron para poder visualizar el comportamiento de estas variables en dichas zonas de interés. La figura 52 nos muestra el desplazamiento en la pared barlovento, en un plano central, se graficó la solución lineal conjuntamente para poder ver que se cumple la teoría de grandes desplazamientos en relación a la lineal, los valores obtenidos se acercan más a la realidad ya que el pastico sufre por lo general de grandes desplazamientos. La figura 53 nos muestra también los desplazamientos pero en la parte del arco superior, acá podemos notar una mayor diferencia con respecto a la solución lineal, se puede notar tambien un desplazamiento máximo de 46 mm contra 5 mm de la solución lineal.

La figuras 54 y 55 nos muestran las gráficas del esfuerzo en la pared barlovento en un plano central y en un plano lateral respectivamente, en ambas se sobrepone el resultado lineal a manera de comparación, en el plano central podemos darnos cuenta que los valores máximos corresponden a las partes superior e inferior y que en el resto el esfuerzo es casi nulo, esto se corrobora con las figuras de la geometría, el plano lateral es de especial interés ya que según las figuras anteriores en él se encuentran los esfuerzos máximos, por tal motivo hemos incluido en la gráfica una línea con el valor del esfuerzo de fluencia, observando la gráfica podemos ver que en efecto los valores que se presentan son superiores a los del plano medio y también podemos ver un resultado muy importante que es que los valores de esfuerzo superan el límite de fluencia por lo cual esta parte sufre de deformaciones plásticas.

Las figuras 56 y 57 los valores del esfuerzo similarmente a las mostradas anteriormente, solo que en este caso son en la zona del arco superior, podemos ver que en la zona central los valores máximos se encuentran en las fronteras, donde se supone el desplazamiento es restringido, en la zonas centrales los esfuerzos disminuyen notablemente, la figura 57 toma los valores en el plano lateral y al igual que paso en la pared barlovento, es en esta zona donde se encuentran los esfuerzos mayores, se colocó nuevamente una marca en el valor del límite de fluencia para observar si es superado, los resultados demuestran que también en

esta zona los esfuerzos superan el límite de fluencia y que indica nuevamente que en esta zona el plástico sufre deformaciones permanentes.

La figura 58 muestra el valor de la deformación en la pared barlovento, en un plano central, podemos darnos cuenta que los valores son máximos en las fronteras, al igual que los esfuerzos como se había mencionado antes, los valores son pequeños al tratarse de un estudio elástico. La figura 59 nos muestra igualmente la deformación pero en un plano lateral y vemos que las deformaciones aumentan considerablemente aunque no sobrepasan el 5% lo cual sigue siendo muy poco al tratarse de un material polimérico.

Las figuras 60 y 61 nos muestran la deformación en la zona del arco superior, podemos notar que en el plano central los valores máximos se localizan en los bordes, en un plano lateral los valores máximos se encuentran centrados, vemos que el valor de la deformación máximo es casi del 10% lo cual implica una deformación considerable.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A través del método del elemento finito podemos realizar una simulación del comportamiento mecánico de la cubierta plástica de un invernadero con geometría túnel.

Se encontró que los desplazamientos máximos se localizan en las partes de la geometría que se encuentran más alejados de las sujeciones, por el contrario de los valores máximos de esfuerzos y deformaciones que se encuentran precisamente en dichos empotramientos.

Analizando los valores obtenidos podemos decir que para las cargas calculadas, el material supera el esfuerzo de fluencia en algunas zonas, por lo tanto las deformaciones correspondientes son irreversibles, con lo cual la geometría se ve deformada de forma permanente, esta situación nos indica que nuestra simulación está limitada y que si se quiere tener una perspectiva completa del comportamiento mecánico, se tiene que hacer también un análisis plástico conjuntamente con el elástico.

Se recomienda realizar códigos numéricos en lenguajes donde se pueda tener un uso más eficiente de la memoria ya que el costo computacional es muy alto en este aspecto, así como tratar de que las subrutinas sean lo más eficientes para evitar ciclos largos de computación.

Se recomienda tener en cuenta la degradación mecánica que sufre el plástico debido a la exposición a los agentes ambientales, ya que en este trabajo se consideraron constantes los valores mecánicos cuando en realidad no lo son.

8. REFERENCIAS

- Ahmadian, H., & Farughi, S. (2011). Shape functions of superconvergent finite element models. *Thin-Walled Structures*, 49(9), 1178-1183. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2011.05.004>
- Anjam, I., & Valdman, J. (2015). Fast MATLAB assembly of FEM matrices in 2D and 3D: Edge elements. *Applied Mathematics and Computation*, 267, 252-263. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.03.105>
- ASAE-EP460. (2004). American Society for Agricultural Engineers. *Commercial greenhouse design and layout*. Michigan. USA. .
- ASAE. (2005). . American Society for Agricultural Engineers *Commercial greenhouse design and layout*. Michigan. USA. .
- ASTM, D. (1991). 882-91. Standard Test Method for Tensile Properties of Thin Plastic Sheeting. *American Society for Testing and Materials, Philadelphia, Pa*, 2.
- Bastida , A., & Ramírez, J. A. (2002). Invernaderos en México: diseño, construcción y manejo. México: Universidad Autónoma Chapingo.
- Batra, R. C., & Ching, H. K. (2002). Energy release rates in a constrained epoxy disc with Hookean and Mooney–Rivlin materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 38(2), 165-175. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8442\(02\)00085-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8442(02)00085-X)
- Bonet, J., & Wood, R. D. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*: Cambridge university press.
- Borouchaki, H., & Lo, S. H. (1995). Fast Delaunay triangulation in three dimensions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128(1), 153-167. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00854-1](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(95)00854-1)
- Briassoulis, D. (2004). Mechanical Design Requirements for Low Tunnel Biodegradable and Conventional Films. *Biosystems Engineering*, 87(2), 209-223. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2003.10.013>
- Briassoulis, D., & Aristopoulou, A. (2001). Adaptation and harmonisation of standard testing methods for mechanical properties of low-density polyethylene (LDPE) films. *Polymer testing*, 20(6), 615-634. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-9418\(00\)00083-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-9418(00)00083-0)
- Briassoulis, D., & Schettini, E. (2002). Measuring strains of LDPE films: the strain gauge problems. *Polymer testing*, 21(5), 507-512. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-9418\(01\)00116-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-9418(01)00116-7)
- Briassoulis, D., & Schettini, E. (2003). Analysis and Design of Low-density Polyethylene Greenhouse Films. *Biosystems Engineering*, 84(3), 303-314. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S1537-5110\(02\)00241-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1537-5110(02)00241-6)

- Briassoulis, D., Waaijenberg, D., Gratraud, J., & von Esner, B. (1997). Mechanical Properties of Covering Materials for Greenhouses: Part 1, General Overview. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 67(2), 81-96. doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jaer.1997.0154>
- Castilla, N., & Prados, N. C. (2007). *Invernaderos de plástico: tecnología y manejo*: Mundi-Prensa Libros.
- Castillo, E., Baiges, J., & Codina, R. (2015). Approximation of the two-fluid flow problem for viscoelastic fluids using the level set method and pressure enriched finite element shape functions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 225, 37-53. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.09.004>
- CFE. (2008). Instituto de Investigaciones Eléctricas *Manual de Diseño de Obras Civiles, Diseño por viento*. México.
- Courtney, T. H. (2005). *Mechanical behavior of materials*: Waveland Press.
- Chapra, S., & Canale, R. (2011). *Métodos Numéricos para ingenieros*. México: McGraw-Hill.
- De Berg, M., Van Kreveld, M., Overmars, M., & Schwarzkopf, O. C. (2000). Computational geometry *Computational geometry* (pp. 1-17): Springer.
- De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J., & Verhoosel, C. V. (2012). *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*: John Wiley & Sons.
- Díaz, T., Espí, E., FONTECHA, A., Jiménez, C., López, J., & Salmeron, A. (2001). *Los Filmes Plásticos en la Producción Agrícola*. Madrid: Mundi-Prensa.
- Dilara, P. A., & Briassoulis, D. (2000). Degradation and Stabilization of Low-density Polyethylene Films used as Greenhouse Covering Materials. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 76(4), 309-321. doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jaer.1999.0513>
- Garzón, E., Ortiz, I. M., Castillo, J. C., Rojano, A., & Sánchez-Soto, P. J. (2016). MODELIZACIÓN DEL PROCESO DE ENVEJECIMIENTO NATURAL DE UN MATERIAL POLIMÉRICO UTILIZABLE COMO CUBIERTA DE INVERNADEROS (MODELLIZATION OF THE PROCESS OF NATURAL AGING OF A POLYMER MATERIAL APPLIED FOR GREENHOUSE COVERS). *Revista Latinoamericana De Metalurgia Y Materiales*.
- Gere, J. M., & Goodno, B. J. (2009). *Mecánica de Materiales* (7ª ed.). Cengage Learning.
- Guo, J., Yan, D.-M., Chen, L., Zhang, X., Deussen, O., & Wonka, P. (2016). Tetrahedral meshing via maximal Poisson-disk sampling. *Computer Aided Geometric Design*, 43, 186-199. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cagd.2016.02.004>
- Gutiérrez, G. (2001). Elementos de Simulación computacional: Dinámica molecular y método de Monte Carlo. *Notas de clase con motivo del curso "Simulación en Materia Condensada", Departamento de Física Universidad de Santiago de Chile*.
- Hibbeler, R. C. (2006). *Mecánica de materiales* (8va ed.). México: Prentice Hall.

- Imai, J., Noso, K., Takahashi, A., & Funabiki, S. (2016). A State-Space Modeling via the Galerkin Approximation for a Boundary Control System. *IFAC-PapersOnLine*, 49(8), 7-12. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.410>
- ISO, E. (1995). 527–3. Plastics–Determination of Tensile Properties–Part 3: Test Conditions for Films and Sheets. *International Organization for Standardization (ISO): Geneva, Switzerland*.
- Jaśkowiec, J., Pluciński, P., & Stankiewicz, A. (2016). Discontinuous Galerkin method with arbitrary polygonal finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 120, 1-17. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2016.06.004>
- Kaufmann, W. J., & Smarr, L. L. (1992). *Supercomputing and the Transformation of Science*: WH Freeman & Co.
- Khennane, A. (2013). *Introduction to finite element analysis using MATLAB® and Abaqus*: CRC Press.
- Kim, N.-H. (2014). *Introduction to nonlinear finite element analysis*: Springer Science & Business Media.
- Krismadinata, Rahim, N. A., Ping, H. W., & Selvaraj, J. (2013). Elimination of Harmonics in Photovoltaic Seven-level Inverter with Newton-raphson Optimization. *Procedia Environmental Sciences*, 17, 519-528. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proenv.2013.02.067>
- Kythe, P. K., & Wei, D. (2004). An introduction to linear and nonlinear finite element analysis: A computational approach
- Levi, E. (1991). *Elementos de mecánica del medio continuo*. México: Limusa.
- Liu, G.-R., & Quek, S. S. (2013). *The finite element method: a practical course*: Butterworth-Heinemann.
- Liu, G., & Quek, S. (2003). *Finite Element Method A Practical Course*. Singapore: Elseiver Science.
- Lo, S. H. (2014). 3D Delaunay triangulation of non-uniform point distributions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 90, 113-130. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2014.07.002>
- Lo, S. H. (2015). 3D Delaunay triangulation of 1 billion points on a PC. *Finite Elements in Analysis and Design*, 102–103, 65-73. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2015.05.003>
- Millán, Z., Torre, L. d. I., Oliva, L., & Berenguer, M. d. C. (2011). Simulación numérica: ecuación de difusión. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica.* , Vol. 15, N.º 2, pp. 29-38.
- Naya, F., González, C., Lopes, C. S., Van der Veen, S., & Pons, F. (2016). Computational micromechanics of the transverse and shear behavior of unidirectional fiber reinforced polymers including environmental effects. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.06.018>
- Nguyen-Van, H., Nguyen-Hoai, N., Chau-Dinh, T., & Nguyen-Thoi, T. (2014). Geometrically nonlinear analysis of composite plates and shells via a quadrilateral element with good coarse-mesh

- accuracy. *Composite Structures*, 112, 327-338. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.02.024>
- Oden, J. T. (2006). *Finite elements of nonlinear continua*: Courier Corporation.
- Okada, H., & Ohata, S. (2013). Three-dimensional J-integral evaluation for cracks with arbitrary curvatures and kinks based on domain integral method for quadratic tetrahedral finite element. *Engineering Fracture Mechanics*, 109, 58-77. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.06.009>
- Olivella, X. O., & de Saracíbar, C. A. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros* (Vol. 92): Univ. Politèc. de Catalunya.
- Papaseit, P. B., Armengol, J., Papaseit, E. P., & Jordi Badiola, E. A. (1997). *Los plásticos y la agricultura= Plastics and agriculture*.
- Rao, S. S. (2010). *The finite element method in engineering*: Elsevier.
- Reddy, J. N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Texas: Oxford.
- Reddy, J. N. (2013). *An introduction to continuum mechanics*: Cambridge university press.
- Serrano, Z. (2002). *Construcción de invernaderos*. Madrid: Ediciones Mundi-prensa.
- Song, X., Han, Q., & Zhai, J. (2015). Vibration analyses of symmetrically laminated composite cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh–Ritz method. *Composite Structures*, 134, 820-830. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.134>
- Tidjani, A. (2000). Comparison of formation of oxidation products during photo-oxidation of linear low density polyethylene under different natural and accelerated weathering conditions. *Polymer Degradation and Stability*, 68(3), 465-469. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0141-3910\(00\)00039-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0141-3910(00)00039-2)
- Tirupathi, C., & Ashok, B. (1999). *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. México: Pearson Educación.
- Von Elsner, B., Briassoulis, D., Waaijenberg, D., Mistriotis, A., von Zabeltitz, C., Gratraud, J., . . . Suay-Cortes, R. (2000). Review of Structural and Functional Characteristics of Greenhouses in European Union Countries: Part I, Design Requirements. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 75(1), 1-16. doi: <http://dx.doi.org/10.1006/jaer.1999.0502>
- Wineman, A. (2005). Some results for generalized neo-Hookean elastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(2–3), 271-279. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.007>
- Zdunek, A., Rachowicz, W., & Eriksson, T. (2014). A novel computational formulation for nearly incompressible and nearly inextensible finite hyperelasticity. *Computer Methods in Applied*

Mechanics and Engineering, 281, 220-249. doi:
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2014.08.008>

Zhang, W., & Zhao, L. (2016). Exact imposition of inhomogeneous Dirichlet boundary conditions based on weighted finite cell method and level-set function. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 307, 316-338. doi:
<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2016.04.036>

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (1994). El método de los elementos finitos. Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales: CIMNE, Barcelona.

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (1999). *El método de los elementos finitos—Mecánica de Sólidos y Fluidos, Dinámica y No Linealidad* (Vol. 2). Barcelona: McGraw-Hill CIMNE.

Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (2000). Finite Element Method , Vol. 2—Solid Mechanics. *Butterworth—Heinemann, Oxford*), 622, 423-424.

Zienkiewicz, O., Taylor, R., & Zhu, J. (2005). The finite element method: its basis and fundamentals. *Butterworth-Heinemann, Oxford, UK*.

ANEXO A. Teorema de Green

Consideremos la integración por partes de la expresión bidimensional siguiente

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dx dy \quad A1$$

Integrando primero respecto a x y según la conocida regla de integración por partes

$$\int_{xL}^{xR} u dv = - \int_{xL}^{xR} v du + (uv)_{x=xR} - (uv)_{x=xL} \quad A2$$

Se tiene, usando los símbolos de la figura (A1)

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \phi dx dy + \int_{y=yB}^{y=yT} [(\phi \phi)_{x=xR} - (\phi \phi)_{x=xL}] dy \quad A3$$

Si ahora se considera una porción del contorno $d\Gamma$ pertenece al contorno de la derecha vemos que

$$dy = d\Gamma_{nx} \quad A4$$

Donde nx es el coseno director del ángulo que forma la normal y la dirección x. similarmente en la parte izquierda

$$dy = -d\Gamma_{nx} \quad A5$$

El término final de la ecuación (A3) puede, por lo tanto, expresarse como la integral sobre el contorno en dirección contraria a las agujas del reloj

$$\oint_{\Gamma} \phi \phi n_x d\Gamma \quad A6$$

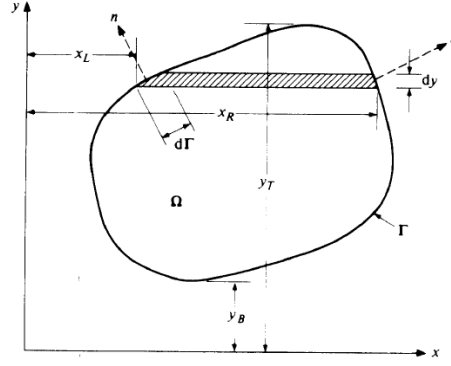


Figura A1. Geometría del cuerpo.

Si hay varios contornos cerrados esta integración ha de efectuarse sobre cada contorno. Para todos los casos, la expresión general es

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \phi dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \phi n_x d\Gamma \quad A7$$

Similarmemente, si aparecen derivadas parciales con respecto a y, se puede escribir

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \phi dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \phi n_y d\Gamma \quad A8$$

Donde n_y es el coseno director del ángulo que forma la normal exterior y el eje y

Análogamente, en tres dimensiones se puede escribir

$$\iiint_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \phi dx dy dz + \oint\!\!\!\oint_{\Gamma} \phi \phi n_x d\Gamma \quad A9$$

Donde Γ es el elemento de área y la última integral se efectúa sobre toda la superficie.

ANEXO B. Metodología para cálculo de cargas por viento

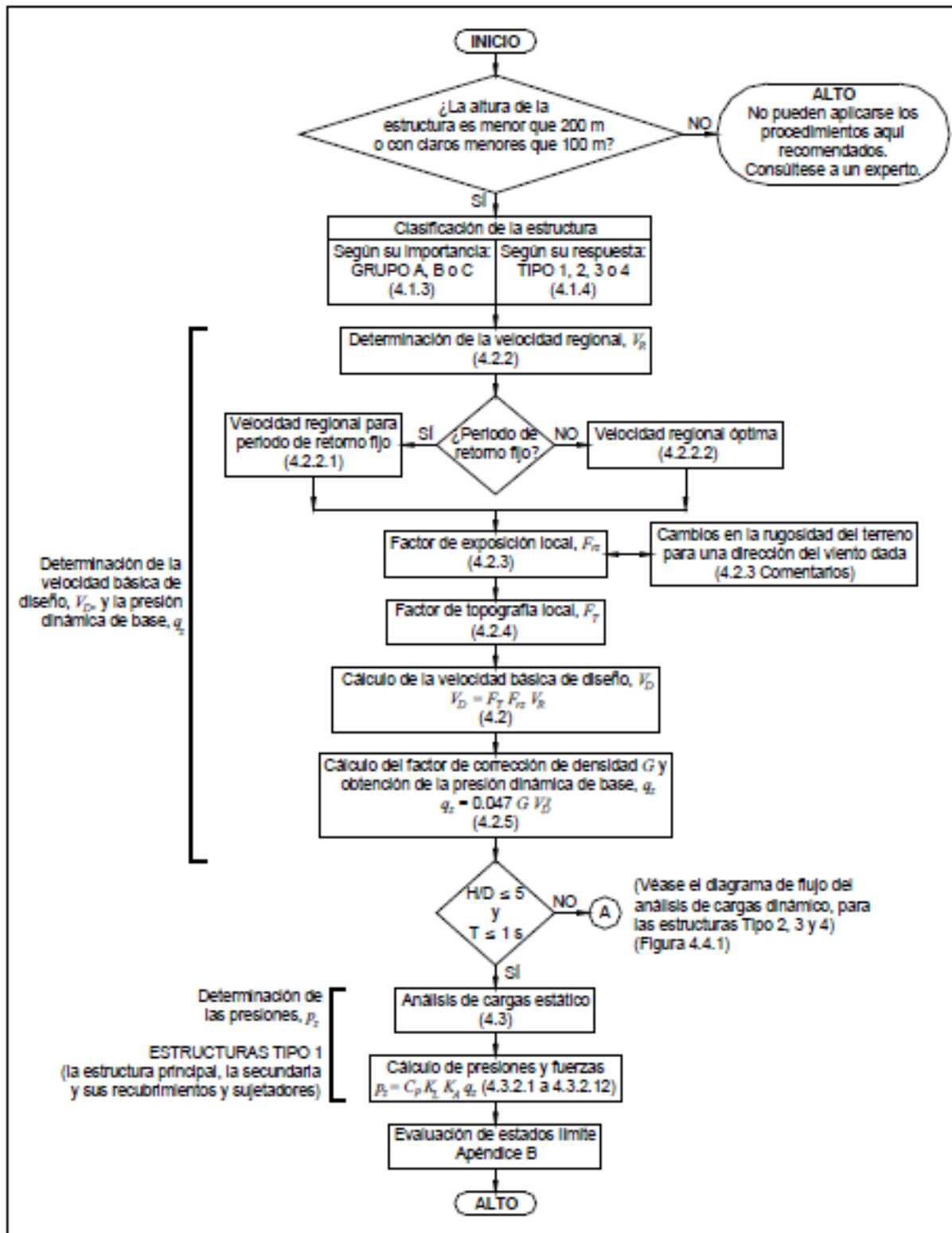


Figura B1. Metodología del cálculo de fuerza de presión.

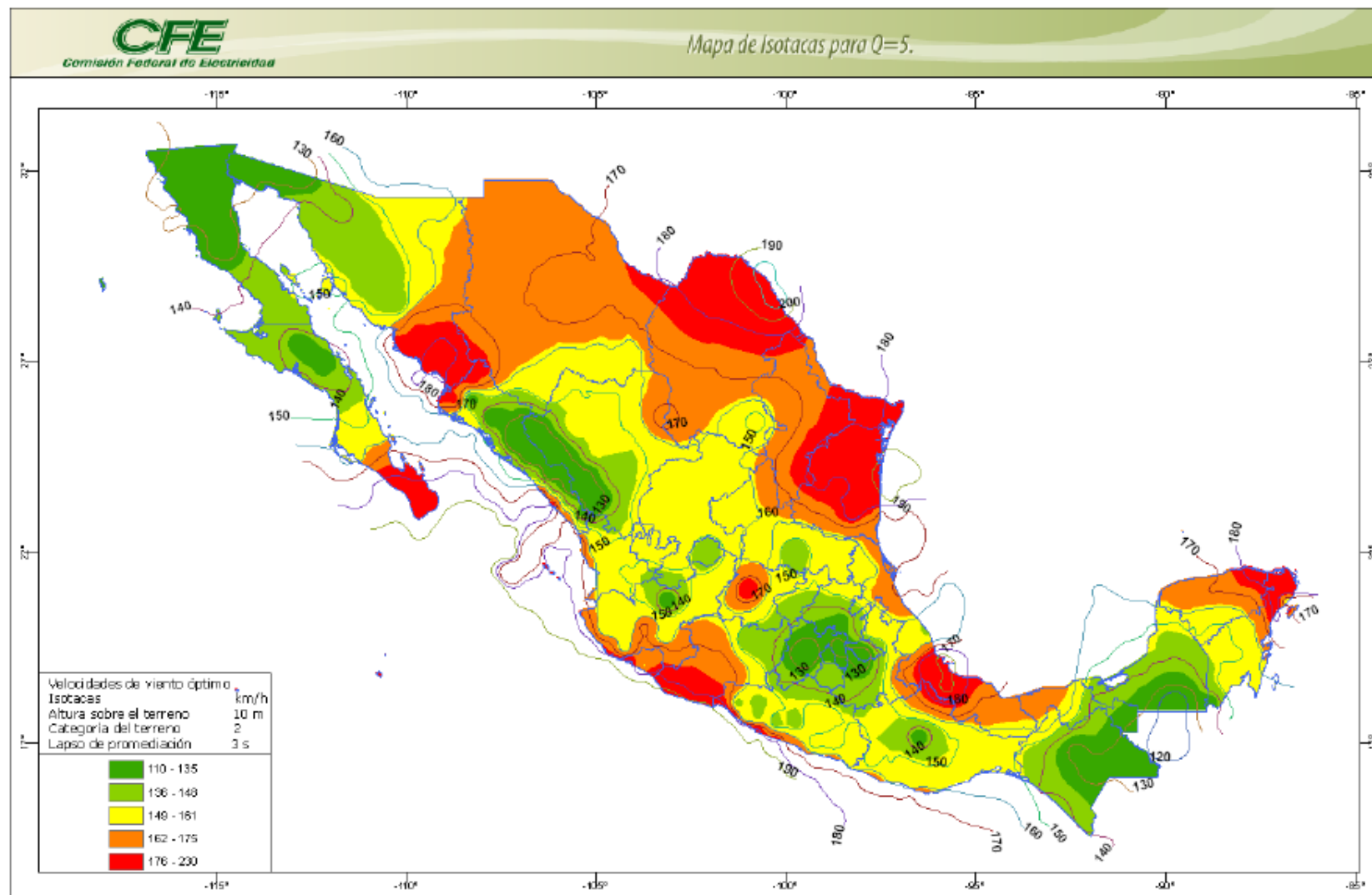


Figura B2. Mapa de isotacas para la república mexicana.

Cuadro B1 Para los parámetros, según la categoría del terreno.

Categoría del terreno	α	δ	c
1	0.099	245	1.137
2	0.128	315	1.000
3	0.156	390	0.881
4	0.170	455	0.815

CuadroB2. Valores de Fr para diferentes sitios.

Sitios	Ejemplos de topografía local	Fr
Protegidos	Valles cerrados	0.9
Normales	Terreno prácticamente plano: Campo abierto, ausencia de cambios topográficos importantes con pendientes menores de 5%	1.0
Expuestos	Promontorios: Montes, cerrados, lomas, colinas y montañas Terraplenes: Peñascos, acantilados, precipicios, diques, presas.	0-1

ANEXO C. Código en MATLAB

```
%Programa principal solución no lineal
N=load('nodos23.txt'); %cargar las coordenadas de los nodos
Ctetra=load('conectividadTetra23.txt'); %cargar la conectividad de los
tetraedros
Ctri=load('conectividadSup23.txt'); %cargar conectividad de tetraedros
%coordenadas de los nodos
x=N(:,2);
y=N(:,3);
z=N(:,4);
%conectividad de tetraedros
c1=Ctetra(:,6);
c2=Ctetra(:,7);
c3=Ctetra(:,8);
c4=Ctetra(:,9);
%conectividad de superficie
cs1=Ctri(:,6);
cs2=Ctri(:,7);
cs3=Ctri(:,8);
Tri=[cs1(:) cs2(:) cs3(:)];
X=[x(:) y(:) z(:)];
Tes=[c1(:) c2(:) c3(:) c4(:)];
clear N cs1 cs2 cs3 c1 c2 c3 c4
%geometria del cuerpo
figure
surf3D(Tri,x,y,z,zeros(1,length(x)))
axis equal
title('')
shading flat
fprintf(' geometria realizada\n');
%mallado tetraedrico del cuerpo
figure
mesh3D(Tes,X,zeros(1,length(Tes)));
fprintf('mallado de la geometria reliazado\n');
% propiedades del material
p=X';
t=Tes';
E=1.05e8;
v=0.4;
% ensamble lineal de la matriz de rigidez
kg=MRT3D(p,t,E,v );
fprintf(' ensamble de la matriz de rigidez global realizado\n');
%condiciones de frontera
cf=find(y==0| y==2.5| z==0 |z==4);
fprintf(' condiciones de contorno aplicados\n');
%aplicacion de la condiociones de frontera
kgcf=MRTcf3D( kg,cf );
fprintf('aplicacion de las condiciones de frontera\n');
%ensable del vector de cargas global
%f9-----
No2=[190 192];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
```

```

Fx=392.4;
Fx=270.02;
Fy=0;
Fz=0;
f9 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[210 208 212 214];
% No2=[355 357];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(50.43769368))*161.865;
Fx=cos(deg2rad(50.43769368))*170.988;
Fy=0;
Fz=sin(deg2rad(50.43769368))*-161.865;
Fz=sin(deg2rad(50.43769368))*-170.988;
f1 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[218 216 220 222];
%No2=[359 361];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(62.98995366))*161.865;
Fx=cos(deg2rad(62.98995366))*170.988;
Fy=0;
Fz=sin(deg2rad(62.98995366))*-161.865;
Fz=sin(deg2rad(62.98995366))*-170.998;
f2 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[226 224 228 230];
%No2=[363 365];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(74.19964545))*-186.39;
Fx=cos(deg2rad(74.19964545))*-201.670;
Fy=0;
Fz=sin(deg2rad(74.19964545))*186.39;
Fz=sin(deg2rad(74.19964545))*201.670;
f3 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[234 232 236 238];
%No2=[367 369];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(84.79409331))*-186.39;
Fx=cos(deg2rad(84.79409331))*-201.670;

```

```

Fy=0;
Fz=sin(deg2rad(84.7909331))*186.391;
Fz=sin(deg2rad(84.7909331))*201.670;
f4 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[242 240 244 246];
%No2=[371 373];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(84.79409331))*186.39;
Fx=cos(deg2rad(84.79409331))*201.670;
Fy=0;
Fz=sin(deg2rad(84.7909331))*186.391;
Fz=sin(deg2rad(84.7909331))*201.670;
f5 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[250 248 252 254];
%No2=[375 377];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(74.19964545))*186.39;
Fx=cos(deg2rad(74.19964545))*201.670;
Fy=0;
Fz=sin(deg2rad(74.19964545))*186.39;
Fz=sin(deg2rad(74.19964545))*201.670;
f6 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[258 256 260 262];
%No2=[379 381];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(62.98995366))*152.055;
Fx=cos(deg2rad(62.98995366))*63.86;
Fy=0;
Fz=sin(deg2rad(62.98995366))*152.055;
Fz=sin(deg2rad(62.98995366))*63.86;
f7= VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[266 264 268 270];
%No2=[383 385];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=cos(deg2rad(50.43769368))*152.055;
Fx=cos(deg2rad(50.43769368))*63.86;
Fy=0;

```

```

Fz=sin(deg2rad(50.43769368))*152.055;
Fz=sin(deg2rad(50.43769368))*63.86;
f8 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
%-----
No2=[336 338];
ctri2=EncSup(Ctri,No2);
load1=ctri2(:,6);
load2=ctri2(:,7);
load3=ctri2(:,8);
B=[load1(:) load2(:) load3(:)];
Fx=333.54;
Fx=153.44;
Fy=0;
Fz=0;
f10 = VectorF( B,Fx,Fy,Fz,p );
EF=1;
EF2=1;
%-----
%-----vector de fuerzas de cuerpo-----
ro=910; %densidad del LDPE en kg/m3
g=-9.81; %acelecacion de la gravedad
fv = VectorFV( p,t,ro,g );
f=fv;
clear f
f=(f1*EF+f2*EF+f3*EF+f4*EF+f5+f6+f7*EF+f8*EF+f9*EF2+f10*EF2+fv)*1.5;
% f=f10;
fprintf('vector de cargas flobal esamblado\n');
%-----
%solucion al sistema lineal
invkgcf=inv(kgcf);
u=invkgcf*f';
u = Uzeros( cf,u );
ulin3d=u;
fprintf('sistema lineal resuelto\n');
%escala de deformaciones
%---- Solución no lineal-----
%-----
clear fi iterF iter slamd deltalamd lamda deltau
c=500;nu=length(u); nv=length(defeqlin);
iter=zeros(c,nu+4); iterdefeq=zeros(c,nv+2); iterVMss=zeros(c,nv+2);
lamda=zeros(1,c); unonl=zeros(c,nu);iterF=zeros(c,nu+2);
iterlamd=zeros(c,3);
deltau=zeros(c,nu);
fi=zeros(c,nu+2);
tol=0.001;
u=ulin3d;
du=u;
i=1;
F=f';
VMss=VMsslin;
defeq=defeqlin;
iterF(i,:)= [0 F' norm(F) ];
lamd=0.000001;
iterlamd(i,:)= [0 lamd 0];
iterVMss(i,:)= [0 VMss norm(VMss)];
iterdefeq(i,:)= [0 defeq norm(defeq)];
fi(i,:)= [i f 0];

```

```

lamd=0;
iter(i,:)= [i u' 0 0 0];
%----- Iteraciones para la solución-----
while norm(du)>norm(u)*tol && i<c
    i=i+1
    I=Invariante3(E,v,p,t,u);
    [Kt]=MRT3Dnonl(p,t,E,v,u);
    ktcf = MRTcf3D( Kt,cf );
    clear Kt
    Fr=ktcf*u;
    clear ktcf
    R=F-Fr;
    u0=u;
    dlamd=(Fr'*F)/(F'*F)
    du=invkgcf*R;
    [ du ] = Uzeros( cf,du );
    deltau(i,:)=du;
    u=u+du;
    [ dVMss] = EsfzVMss3Dnonl( E,v,p,t,du,u0);
    VMss=VMss+dVMss;
    [ def,ddefeq ] = defm3Dnonl( E,v,du,u0,t,p );
    defeq=defeq+ddefeq;
    iterdefeq(i,:)= [i defeq norm(defeq)];
    iterVMss(i,:)= [i VMss norm(VMss)];
    err=norm(u0-u)/norm(u0);
    lamd=lamd+dlamd;
    Flamd=F*dlamd;
    lamda(i)=dlamd;
    fr=F+R;
    fi(i,:)= [i R' norm(R)];
    iter(i,:)= [i u' norm(du) norm(u) err ];
    iterF(i,:)= [i Flamd' norm(fr)];
    iterlamd(i,:)= [i lamd dlamd];

end
if i<c
    sol=u
else
    sol='no converge'
end
it=i;

%-----
esc=100;
[vecD, uvec,xyz]=malladefor3D( u,p,t);
n=length(xyz);
for i=1:n
    vecD(i)=norm(xyz(:,i));
end
%vectores----
u1=xyz(1,:); u2=xyz(2,:); u3=xyz(3,:); ullin=xyzl(1,:);
maxdefeqlin=find(defeqlin==max(defeqlin));
maxu=find(u==max(u1)); maxF=find(F==max(F));
maxulin=find(ulin3d==max(ullin));
maxVMsslin=find(VMsslin==max(VMsslin));
litF=size(iterF);

```

```

    lit=size(iter);
    maxF=find(F==max(F)); maxVMss=find(VMss==max(VMss));
    sigmax=iterVMss(:,maxVMss+1); maxdefeq=find(defeq==max(defeq));
    defmax=iterdefeq(:,maxdefeq);
    %-----
    figure
    plot(iter(:,maxu+1),iter(:,1)) %grafica nodo
    hold on
    hold on
        plot([0,ulin3d(maxulin)],[0,(it)]) %nodo
    ylabel('iteraciones')
    xlabel('desplazamientos')
    title('lineal vs no lineal')
    legend('no lineal', 'lineal')
    grid on
    xlim([0 0.04])
    %-----
    figure
    plot(iterlamd(:,1),iterlamd(:,3))
    xlabel('iteraciones')
    ylabel('dlamda')
    title('variacion dlamda')
    grid on
    %-----
    figure
    plot(iter(:,length(iter)-1),iterlamd(:,3)) %norma u
    ylabel('fuerza')
    xlabel('desplazamientos')
    title('fuerza vs desplazamiento')
    hold on
    grid on
    plot([0,norm(ulin3d)],[0,max(iterlamd(:,3))]) %norma de ulin
    legend('no lineal', 'lineal')
    grid on
    %-----
    figure
    plot(iter(:,maxu+1),iterlamd(:,(3))) %desplaz dado nodo
    ylabel('fuerza')
    xlabel('desplazamientos')
    title('fuerza vs desplazamiento nodo xx')
    hold on
    grid on
    plot([0,ulin3d(maxulin)],[0,max(iterlamd(:,3))]) % despla nodo
    legend('no lineal', 'lineal')
    grid on
    %-----
    figure
    plot(iter(:,length(iter)-1))
    xlabel('iteraciones')
    ylabel('norma dezplazamiento')
    title('variacion de la normu con las iteraciones')
    grid on
    %-----
    figure
    plot(iterdefeq(:,length(iterdefeq)),iterVMss(:,length(iterVMss)))
    hold on
    plot([0,norm(defeqlin)],[0,max(iterVMss(:,length(iterVMss)))]])

```

```

xlabel('deformacion')
ylabel('esfuerzo')
title('variacion del esfuerzo con la deformacion')
legend('no lineal', 'lineal')
%-----
figure
plot(iterdefeq(:,maxdefeq+1),iterVMss(:,maxVMss+1))
hold on
plot([0,defeqclin(maxdefeqclin)], [0,max(iterVMss(:,maxVMss+1))])
xlabel('deformacion')
ylabel('esfuerzo')
title('variacion del esfuerzo con la deformacion nodo xx')
legend('no lineal', 'lineal')
%-----
figure
plot(iterdefeq(:,length(iterdefeq)))
xlabel('iteraciones')
ylabel('deformacion')
title('variacion de la deformacion con las iteraciones')
%-----
figure
plot(iterVMss(:,length(iterVMss)))
xlabel('iteraciones')
ylabel('esfuerzo')
title('variacion del esfuerzo con las iteraciones')
%-----

%%-----
figure
quiver3(x',y',z',u1,u2,u3,10,'black')
axis equal
xlabel('largo')
ylabel('ancho')
zlabel('altura')
title('vectores de desplazamiento')
fprintf('grafica vectores de desplazamiento\n');
title('')

%interpolacion de desplazamientos
Cdespl=Csurfezf( Tri,t,uvec );
CsurfD = Ccolors( Tri,Cdespl,x );
pu=p+xyz*esc;
pux=pu(1,:);
puy=pu(2,:);
puz=pu(3,:);
figure
surf3Ddespl(Tri,pux,puy,puz,CsurfD)
axis equal
fprintf('grafiaca de desplazamientos interpolados\n');

```

```

%interpolacion de esfuerzos
Cefz=Csurfezf( Tri,t,VMss);
Csurf = Ccolors( Tri,Cefz,x );
figure
surf3DEsfz(Tri,pux,puy,puz,Csurf);
axis equal
fprintf('grafiac de esfuerzos interpolados\n');

%interpolacion de deformaciones
Cdefm=Csurfezf( Tri,t,defeq);
CsurfDF = Ccolors( Tri,Cdefm,x );
figure
surf3Ddef(Tri,pux,puy,puz,CsurfDF);
axis equal
%-----
function [ kg ] = MRT3Dnonl(p,t,E,v,u ) %ensamble de la matriz de rigidez
n=length(p);%numero de nodos
m=length(t);%numero de tetraedros
kg=zeros(3*n);
l=1;
nu=length(u);
    j=2; i=3; h=1;
    for k=1:nu/3
        xyz(1,k)=u(h);
        xyz(2,k)=u(j);
        xyz(3,k)=u(i);
        h=h+3; i=i+3; j=j+3;
        k=k+1;
    end
for j=1:m

x1=p(1,t(1,j)); y1=p(2,t(1,j)); z1=p(3,t(1,j));
x2=p(1,t(2,j)); y2=p(2,t(2,j)); z2=p(3,t(2,j));
x3=p(1,t(3,j)); y3=p(2,t(3,j)); z3=p(3,t(3,j));
x4=p(1,t(4,j)); y4=p(2,t(4,j)); z4=p(3,t(4,j));

u1=xyz(1,t(1,j)); u2=xyz(2,t(1,j)); u3=xyz(3,t(1,j));
u4=xyz(1,t(2,j)); u5=xyz(2,t(2,j)); u6=xyz(3,t(2,j));
u7=xyz(1,t(3,j)); u8=xyz(2,t(3,j)); u9=xyz(3,t(3,j));
u10=xyz(1,t(4,j)); u11=xyz(2,t(4,j)); u12=xyz(3,t(4,j));

J=[x1-x4 y1-y4 z1-z4;
    x2-x4 y2-y4 z2-z4;
    x3-x4 y3-y4 z3-z4];
DJ=det(J);

A=inv(J);
A11=A(1,1); A12=A(1,2); A13=A(1,3);
A21=A(2,1); A22=A(2,2); A23=A(2,3);
A31=A(3,1); A32=A(3,2); A33=A(3,3);

A1=A(1,1)+A(1,2)+A(1,3);

```

```

A2=A(2,1)+A(2,2)+A(2,3);
A3=A(3,1)+A(3,2)+A(3,3);

Be=[A(1,1) 0 0 A(1,2) 0 0 A(1,3) 0 0 -A1 0 0;
    0 A(2,1) 0 0 A(2,2) 0 0 A(2,3) 0 0 -A2 0;
    0 0 A(3,1) 0 0 A(3,2) 0 0 A(3,3) 0 0 -A3;
    0 A(3,1) A(2,1) 0 A(3,2) A(2,2) 0 A(3,3) A(2,3) 0 -A3 -A2;
    A(3,1) 0 A(1,1) A(3,2) 0 A(1,2) A(3,3) 0 A(1,3) -A3 0 -A1;
    A(2,1) A(1,1) 0 A(2,2) A(2,1) 0 A(2,3) A(1,3) 0 -A2 -A1 0];
ue=[u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12];
%----- grandes deformaciones-----
dux=A(1,1)*(u1-u10)+A(1,2)*(u4-u10)+A(1,3)*(u7-u10);
duy=A(2,1)*(u1-u10)+A(2,2)*(u4-u10)+A(2,3)*(u7-u10);
duz=A(3,1)*(u1-u10)+A(3,2)*(u4-u10)+A(3,3)*(u7-u10);

dvx=A(1,1)*(u2-u11)+A(1,2)*(u5-u11)+A(1,3)*(u8-u11);
dvy=A(2,1)*(u2-u11)+A(2,2)*(u5-u11)+A(2,3)*(u8-u11);
dvz=A(3,1)*(u2-u11)+A(3,2)*(u5-u11)+A(3,3)*(u8-u11);

dwx=A(1,1)*(u3-u12)+A(1,2)*(u6-u12)+A(1,3)*(u9-u12);
dwy=A(2,1)*(u3-u12)+A(2,2)*(u6-u12)+A(2,3)*(u9-u12);
dwz=A(3,1)*(u3-u12)+A(3,2)*(u6-u12)+A(3,3)*(u9-u12);

b11=dux*A11; b12=dvx*A11; b13=dwx*A11; b14=dux*A12; b15=dvx*A12;
b16=dwx*A12; b17=dux*A13; b18=dvx*A13; b19=dwx*A13; b110=dux*(-A1);
b111=dvx*(-A1); b112=dwx*(-A1);
b21=duy*A21; b22=dvy*A21; b23=dwy*A21; b24=duy*A22; b25=dvy*A22;
b26=dwy*A22; b27=duy*A23; b28=dvy*A23; b29=dwy*A23; b210=duy*(-A2);
b211=dvy*(-A2); b212=dwy*(-A2);
b31=duz*A31; b32=dvz*A31; b33=dwz*A31; b34=duz*A32; b35=dvz*A32;
b36=dwz*A32; b37=duz*A33; b38=dvz*A33; b39=dwz*A33; b310=duz*(-A3);
b311=dvz*(-A3); b312=dwz*(-A3);
b41=duy*A31; b42=dvy*A31; b43=dwy*A31; b44=duy*A32; b45=dvy*A32;
b46=dwy*A32; b47=duy*A33; b48=dvy*A33; b49=dwy*A33; b410=duy*(-A3);
b411=dvy*(-A3); b412=dwy*(-A3);
b51=dux*A31; b52=dvx*A31; b53=dwx*A31; b54=dux*A32; b55=dvx*A32;
b56=dwx*A32; b57=dux*A33; b58=dvx*A33; b59=dwx*A33; b510=dux*(-A3);
b511=dvx*(-A3); b512=dwx*(-A3);
b61=dux*A21; b62=dvx*A21; b63=dwx*A21; b64=dux*A22; b65=dvx*A22;
b66=dwx*A22; b67=dux*A23; b68=dvx*A23; b69=dwx*A23; b610=dux*(-A2);
b611=dvx*(-A2); b612=dwx*(-A2);

Bu=[b11 b12 b13 b14 b15 b16 b17 b18 b19 b110 b111 b112; b21 b22 b23 b24
    b25 b26 b27 b28 b29 b210 b211 b212;
    b31 b32 b33 b34 b35 b36 b37 b38 b39 b310 b311 b312; b41 b42 b43 b44
    b45 b46 b47 b48 b49 b410 b411 b412;
    b51 b52 b53 b54 b55 b56 b57 b58 b59 b510 b511 b512; b61 b62 b63 b64
    b65 b66 b67 b68 b69 b610 b611 b612];

eps=(Be+1*Bu)*ue';
eps=abs(eps);
Ve=(1/6)*abs(DJ);
% ---usando gradiente de deformacion---
raiz=sqrt(abs(I(j)));
raiz =sqrt(abs(I(j)));
if raiz==0

```

```

raiz=1;
end
raiz=I(1,j);
lamd1=(E*v)/((1+v)*(1-2*v)); mu1=E/(2*(1+v)); lamd2=lamd1/dF(j);
mu2=(mu1-lamd1*log(dF(j)))/dF(j);
D=[lamd2+2*mu2 lamd2 lamd2 0 0 0; lamd2 lamd2+2*mu2 lamd2 0 0 0; lamd2
lamd2 lamd2+2*mu2 0 0 0; 0 0 0 mu2 0 0 ; 0 0 0 0 mu2 0; 0 0 0 0 0 mu2 ];

coef=1; e=0.5; e1=2; e3=2;
ee=E/((1+v)*(1-2*v));

M=[coef*(eps(1)^e) (coef*(eps(2)^e1)) (coef*(eps(3)^e1)) 0 0 0;
(coef*(eps(2)^e1)) coef*(eps(2)^e) (coef*(eps(1)^e1)) 0 0
0; (coef*(eps(3)^e1)) (coef*(-eps(1)^e1)) (coef*(eps(3)^e)) 0 0 0;
0 0 0 (coef*(eps(4)^e3)) 0 0; 0 0 0 0 (coef*(eps(5)^e3)) 0; 0 0 0 0 0
(coef*(eps(6)^e3))];
D=ee*M;

ke=Ve*(Be+1*Bv)'*(D*(Be+1*Bv));
f=1;
for i=1:4
c=1;
for k=1:4
kg(3*t(i,j)-2,3*t(k,l)-2)=kg(3*t(i,j)-2,3*t(k,l)-2)+ke(f,c);
c=c+1;
kg(3*t(i,j)-2,3*t(k,l)-1)=kg(3*t(i,j)-2,3*t(k,l)-1)+ke(f,c);
c=c+1;
kg(3*t(i,j)-2,3*t(k,l)-0)=kg(3*t(i,j)-2,3*t(k,l)-0)+ke(f,c);
c=c+1; k=k+1;
end
f=f+1; c=1;

for k=1:4
kg(3*t(i,j)-1,3*t(k,l)-2)=kg(3*t(i,j)-1,3*t(k,l)-2)+ke(f,c);
c=c+1;
kg(3*t(i,j)-1,3*t(k,l)-1)=kg(3*t(i,j)-1,3*t(k,l)-1)+ke(f,c);
c=c+1;
kg(3*t(i,j)-1,3*t(k,l)-0)=kg(3*t(i,j)-1,3*t(k,l)-0)+ke(f,c);
c=c+1; k=k+1;
end
f=f+1; c=1;

for k=1:4
kg(3*t(i,j),3*t(k,l)-2)=kg(3*t(i,j),3*t(k,l)-2)+ke(f,c);
c=c+1;
kg(3*t(i,j),3*t(k,l)-1)=kg(3*t(i,j),3*t(k,l)-1)+ke(f,c);
c=c+1;
kg(3*t(i,j),3*t(k,l)-0)=kg(3*t(i,j),3*t(k,l)-0)+ke(f,c);
c=c+1; k=k+1;
end
f=f+1; i=i+1;
end
j=1+1; l=1+1;
end

end

```

```

%-----
function [ kg ] = MRTcf3D( kg,cf ) %aplicacion de las condiciones de
frontera a la matriz de rigidez
d=diag(kg);
mx=max(d);
c=mx*10E5;
n=length(cf);
    for i=1:n
        k=2;
        for j=1:3
            kg(3*cf(i)-k,3*cf(i)-k)= kg(3*cf(i)-k,3*cf(i)-k)+c;
            k=k-1; j=j+1;
        end
        i=i+1;
    end

end

function [ u ] = Uzeros( cf,u )
n=length(cf);

    for i=1:n
        k=2;
        for j=1:3
            u(3*cf(i)-k)=0;
            k=k-1;
        end
        i=i+1;
    end

end
%-----
function [ f ] = VectorF( Tri,Fx,Fy,Fz,p )
t=Tri';
m=length(p);
nn=size(t);
n=nn(2);
f=zeros(1,3*m);

    for i=1:n
        for j=1:3
            xt(1,j)=p(1,t(j,i));
            yt(1,j)=p(2,t(j,i));
            zt(1,j)=p(3,t(j,i));
            j=j+1;
        end
        pnt1=[xt(1), yt(1), zt(1)]; pnt2=[xt(2), yt(2), zt(2)];
        pnt3=[xt(3), yt(3), zt(3)];
        V=pnt1-pnt2; W=pnt1-pnt3;
        VxW=cross(V,W);
        A=0.5*norm(VxW);
        dx=2; dy=1; dz=0;
        f(3*t(1,i)-dx)=f(3*t(1,i)-dx)+(A/3)*(Fx);
        f(3*t(2,i)-dx)=f(3*t(2,i)-dx)+(A/3)*(Fx);
        f(3*t(3,i)-dx)=f(3*t(3,i)-dx)+(A/3)*(Fx);
    end
end

```

```

f(3*t(1,i)-dy)=f(3*t(1,i)-dy)+(A/3)*(Fy);
f(3*t(2,i)-dy)=f(3*t(2,i)-dy)+(A/3)*(Fy);
f(3*t(3,i)-dy)=f(3*t(3,i)-dy)+(A/3)*(Fy);

f(3*t(1,i)-dz)=f(3*t(1,i)-dz)+(A/3)*(Fz);
f(3*t(2,i)-dz)=f(3*t(2,i)-dz)+(A/3)*(Fz);
f(3*t(3,i)-dz)=f(3*t(3,i)-dz)+(A/3)*(Fz);
i=i+1;
end

end

%-----
function [ f ] = VectorFV( p,t,ro,g ) %ensamble del vector de fuerzas
m=length(p);
nn=size(t);
n=nn(2);
f=zeros(1,3*m);

for j=1:n
%se obtienen las coordenadas de los nodos de cada tetraedro

x1=p(1,t(1,j)); y1=p(2,t(1,j)); z1=p(3,t(1,j));
x2=p(1,t(2,j)); y2=p(2,t(2,j)); z2=p(3,t(2,j));
x3=p(1,t(3,j)); y3=p(2,t(3,j)); z3=p(3,t(3,j));
x4=p(1,t(4,j)); y4=p(2,t(4,j)); z4=p(3,t(4,j));
%se obtiene el jacobiano y el volumen del tetraedro
J=[x1-x4 y1-y4 z1-z4;
x2-x4 y2-y4 z2-z4;
x3-x4 y3-y4 z3-z4];
DJ=det(J);
Ve=(1/6)*abs(DJ);
%calculamos la fuerza debido al peso
Fv=ro*Ve*g;
%colocamos los valores de Fv en el vector general, solo en la direccion
z,
%ya que el peso actua en esa direccion

dz=0;

f(3*t(1,j)-dz)=f(3*t(1,j)-dz)+(Ve/4)*(Fv);
f(3*t(2,j)-dz)=f(3*t(2,j)-dz)+(Ve/4)*(Fv);
f(3*t(3,j)-dz)=f(3*t(3,j)-dz)+(Ve/4)*(Fv);
f(3*t(4,j)-dz)=f(3*t(4,j)-dz)+(Ve/4)*(Fv);
end
end

%-----
function [ dVMss,sigms,snum,tetang,in ] = EsfzVMss3Dnonl(E,v,p,t,u,u0 )
%cálculo del esfuerzo en el cuerpo
h=u0;

```

```

m=length(t);%numero de tetraedros
for j=1:m
n=length(p);%numero de nodos
nu=length(u);j=2; i=3; l=1;
    for k=1:nu/3
        xyz(1,k)=u(1);
        xyz(2,k)=u(j);
        xyz(3,k)=u(i);
        %-----
        xyz0(1,k)=u0(1);
        xyz0(2,k)=u0(j);
        xyz0(3,k)=u0(i);
        l=l+3; i=i+3; j=j+3;
        k=k+1;
    end

% m=1;
for j=1:m

x1=p(1,t(1,j)); y1=p(2,t(1,j)); z1=p(3,t(1,j));
x2=p(1,t(2,j)); y2=p(2,t(2,j)); z2=p(3,t(2,j));
x3=p(1,t(3,j)); y3=p(2,t(3,j)); z3=p(3,t(3,j));
x4=p(1,t(4,j)); y4=p(2,t(4,j)); z4=p(3,t(4,j));

u1=xyz(1,t(1,j)); u2=xyz(2,t(1,j)); u3=xyz(3,t(1,j));
u4=xyz(1,t(2,j)); u5=xyz(2,t(2,j)); u6=xyz(3,t(2,j));
u7=xyz(1,t(3,j)); u8=xyz(2,t(3,j)); u9=xyz(3,t(3,j));
u10=xyz(1,t(4,j)); u11=xyz(2,t(4,j)); u12=xyz(3,t(4,j));

u01=xyz0(1,t(1,j)); u02=xyz0(2,t(1,j)); u03=xyz0(3,t(1,j));
u04=xyz0(1,t(2,j)); u05=xyz0(2,t(2,j)); u06=xyz0(3,t(2,j));
u07=xyz0(1,t(3,j)); u08=xyz0(2,t(3,j)); u09=xyz0(3,t(3,j));
u010=xyz0(1,t(4,j)); u011=xyz0(2,t(4,j)); u012=xyz0(3,t(4,j));

J=[x1-x4 y1-y4 z1-z4;
    x2-x4 y2-y4 z2-z4;
    x3-x4 y3-y4 z3-z4];
DJ=det(J);

A=inv(J);
A11=A(1,1); A12=A(1,2); A13=A(1,3);
A21=A(2,1); A22=A(2,2); A23=A(2,3);
A31=A(3,1); A32=A(3,2); A33=A(3,3);

A1=A(1,1)+A(1,2)+A(1,3);
A2=A(2,1)+A(2,2)+A(2,3);
A3=A(3,1)+A(3,2)+A(3,3);

Be=[A(1,1) 0 0 A(1,2) 0 0 A(1,3) 0 0 -A1 0 0;
    0 A(2,1) 0 0 A(2,2) 0 0 A(2,3) 0 0 -A2 0;
    0 0 A(3,1) 0 0 A(3,2) 0 0 A(3,3) 0 0 -A3;
    0 A(3,1) A(2,1) 0 A(3,2) A(2,2) 0 A(3,3) A(2,3) 0 -A3 -A2;
    A(3,1) 0 A(1,1) A(3,2) 0 A(1,2) A(3,3) 0 A(1,3) -A3 0 -A1;
    A(2,1) A(1,1) 0 A(2,2) A(2,1) 0 A(2,3) A(1,3) 0 -A2 -A1 0];

```

```

%----- grandes deformaciones-----
dux=A(1,1)*(u01-u010)+A(1,2)*(u04-u010)+A(1,3)*(u07-u010);
duy=A(2,1)*(u01-u010)+A(2,2)*(u04-u010)+A(2,3)*(u07-u010);
duz=A(3,1)*(u01-u010)+A(3,2)*(u04-u010)+A(3,3)*(u07-u010);

dvx=A(1,1)*(u02-u011)+A(1,2)*(u05-u011)+A(1,3)*(u08-u011);
dvy=A(2,1)*(u02-u011)+A(2,2)*(u05-u011)+A(2,3)*(u08-u011);
dvz=A(3,1)*(u02-u011)+A(3,2)*(u05-u011)+A(3,3)*(u08-u011);

dwx=A(1,1)*(u03-u012)+A(1,2)*(u06-u012)+A(1,3)*(u09-u012);
dwy=A(2,1)*(u03-u012)+A(2,2)*(u06-u012)+A(2,3)*(u09-u012);
dwz=A(3,1)*(u03-u012)+A(3,2)*(u06-u012)+A(3,3)*(u09-u012);

b11=dux*A11; b12=dvx*A11; b13=dwx*A11; b14=dux*A12; b15=dvx*A12;
b16=dwx*A12; b17=dux*A13; b18=dvx*A13; b19=dwx*A13; b110=dux*(-A1);
b111=dvx*(-A1); b112=dwx*(-A1);
b21=duy*A21; b22=dvy*A21; b23=dwy*A21; b24=duy*A22; b25=dvy*A22;
b26=dwy*A22; b27=duy*A23; b28=dvy*A23; b29=dwy*A23; b210=duy*(-A2);
b211=dvy*(-A2); b212=dwy*(-A2);
b31=duz*A31; b32=dvz*A31; b33=dwz*A31; b34=duz*A32; b35=dvz*A32;
b36=dwz*A32; b37=duz*A33; b38=dvz*A33; b39=dwz*A33; b310=duz*(-A3);
b311=dvz*(-A3); b312=dwz*(-A3);
b41=duy*A31; b42=dvy*A31; b43=dwy*A31; b44=duy*A32; b45=dvy*A32;
b46=dwy*A32; b47=duy*A33; b48=dvy*A33; b49=dwy*A33; b410=duy*(-A3);
b411=dvy*(-A3); b412=dwy*(-A3);
b51=dux*A31; b52=dvx*A31; b53=dwx*A31; b54=dux*A32; b55=dvx*A32;
b56=dwx*A32; b57=dux*A33; b58=dvx*A33; b59=dwx*A33; b510=dux*(-A3);
b511=dvx*(-A3); b512=dwx*(-A3);
b61=dux*A21; b62=dvx*A21; b63=dwx*A21; b64=dux*A22; b65=dvx*A22;
b66=dwx*A22; b67=dux*A23; b68=dvx*A23; b69=dwx*A23; b610=dux*(-A2);
b611=dvx*(-A2); b612=dwx*(-A2);

Bu=[b11 b12 b13 b14 b15 b16 b17 b18 b19 b110 b111 b112; b21 b22 b23 b24
b25 b26 b27 b28 b29 b210 b211 b212;
b31 b32 b33 b34 b35 b36 b37 b38 b39 b310 b311 b312; b41 b42 b43 b44
b45 b46 b47 b48 b49 b410 b411 b412;
b51 b52 b53 b54 b55 b56 b57 b58 b59 b510 b511 b512; b61 b62 b63 b64
b65 b66 b67 b68 b69 b610 b611 b612];
ue=[u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12];
ue0=[u01 u02 u03 u04 u05 u06 u07 u08 u09 u010 u011 u012];

eps=(Be+Bu)*ue';
eps=abs(eps);
coef=100; e=2; e1=1; e3=1; vv=0.4;
ee=E/((1+vv)*(1-2*vv));
M=[coef*(eps(1)^e) (coef*(eps(2)^e1)) (coef*(eps(3)^e1)) 0 0 0;
(coef*(eps(2)^e1)) coef*(eps(2)^e) (coef*(eps(1)^e1)) 0 0
0; (coef*(eps(3)^e1)) (coef*(-eps(1)^e1)) (coef*(eps(3)^e)) 0 0 0;
0 0 0 (coef*(eps(4)^e3)) 0 0; 0 0 0 0 (coef*(eps(5)^e3)) 0; 0 0 0 0 0
(coef*(eps(6)^e3))];
D=ee*M;
s=D*(Be+Bu)*ue';
s;
for k=1:6
    sigms(k,j)=s(k);
    k=k+1;

```

```

end

S=[sigms(1,j) sigms(6,j) sigms(5,j);sigms(6,j) sigms(2,j)
sigms(4,j);sigms(5,j) sigms(4,j) sigms(3,j)];
S1=[sigms(1,j) sigms(4,j) sigms(5,j);sigms(4,j) sigms(2,j)
sigms(6,j);sigms(5,j) sigms(6,j) sigms(3,j)];
ei=eig(S);
eil=eig(S1);
%invariantes y esfuerzos principales
I1=sigms(1,j)+sigms(2,j)+sigms(3,j);

I2=sigms(1,j)*sigms(2,j)+sigms(2,j)*sigms(3,j)+sigms(1,j)*sigms(3,j)-
sigms(4,j)^2-sigms(5,j)^2-sigms(6,j)^2;

I3=sigms(1,j)*sigms(2,j)*sigms(3,j)+2*sigms(4,j)*sigms(5,j)*sigms(6,j)-
sigms(1,j)*sigms(4,j)^2-sigms(2,j)*sigms(5,j)^2-sigms(3,j)*sigms(6,j)^2;
a=(I1^2/3)-I2;
b=-2*(I1/3)^3+(I1*I2/3)-I3;
c=2*(a/3)^0.5 ;
h=I1+I2+I3;
hfor(j)=h;
invaria(:,j)=[a b c h];
divi(i)=(3*b)/(a*c);
if h==0
    tet=0;
else
    tet=(1/3)*acos(-(3*b)/(a*c));
end
tetang(j)=tet;
s1=I1/3+c*cos(tet);
s2=I1/3+c*cos(tet+(2*3.1416)/3);
s3=I1/3+c*cos(tet+(4*3.1416)/3);
snum(:,j)=[s1 s2 s3];
s1=ei(1); s2=ei(2); s3=ei(3);
dVMss(j)=(1/2^0.5)*sqrt((s1-s2)^2+(s2-s3)^2+(s3-s1)^2);
j=j+1;
end
end

%-----

function [ def,defeq ] = defm3Dnonl( E,v,u,u0,t,p )
%cálculo de ña deformacion en el cuerpo
n=length(t);
def=zeros(6,n);
nu=length(u);j=2; i=3; l=1;
for k=1:nu/3
    xyz(1,k)=u(l);
    xyz(2,k)=u(j);
    xyz(3,k)=u(i);
    %-----
    xyz0(1,k)=u0(l);
    xyz0(2,k)=u0(j);
    xyz0(3,k)=u0(i);
    l=l+3; i=i+3; j=j+3;
    k=k+1;
end

```

end

```
for j=1:n
    x1=p(1,t(1,j)); y1=p(2,t(1,j)); z1=p(3,t(1,j));
    x2=p(1,t(2,j)); y2=p(2,t(2,j)); z2=p(3,t(2,j));
    x3=p(1,t(3,j)); y3=p(2,t(3,j)); z3=p(3,t(3,j));
    x4=p(1,t(4,j)); y4=p(2,t(4,j)); z4=p(3,t(4,j));

    u1=xyz(1,t(1,j)); u2=xyz(2,t(1,j)); u3=xyz(3,t(1,j));
    u4=xyz(1,t(2,j)); u5=xyz(2,t(2,j)); u6=xyz(3,t(2,j));
    u7=xyz(1,t(3,j)); u8=xyz(2,t(3,j)); u9=xyz(3,t(3,j));
    u10=xyz(1,t(4,j)); u11=xyz(2,t(4,j)); u12=xyz(3,t(4,j));

    u01=xyz0(1,t(1,j)); u02=xyz0(2,t(1,j)); u03=xyz0(3,t(1,j));
    u04=xyz0(1,t(2,j)); u05=xyz0(2,t(2,j)); u06=xyz0(3,t(2,j));
    u07=xyz0(1,t(3,j)); u08=xyz0(2,t(3,j)); u09=xyz0(3,t(3,j));
    u010=xyz0(1,t(4,j)); u011=xyz0(2,t(4,j)); u012=xyz0(3,t(4,j));
    ue0=[u01 u02 u03 u04 u05 u06 u07 u08 u09 u010 u011 u012];
    ue=[u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8 u9 u10 u11 u12];

    J=[x1-x4 y1-y4 z1-z4;
        x2-x4 y2-y4 z2-z4;
        x3-x4 y3-y4 z3-z4];
    DJ=det(J);

    A=inv(J);
    A11=A(1,1); A12=A(1,2); A13=A(1,3);
    A21=A(2,1); A22=A(2,2); A23=A(2,3);
    A31=A(3,1); A32=A(3,2); A33=A(3,3);

    A1=A(1,1)+A(1,2)+A(1,3);
    A2=A(2,1)+A(2,2)+A(2,3);
    A3=A(3,1)+A(3,2)+A(3,3);

    Be=[A(1,1) 0 0 A(1,2) 0 0 A(1,3) 0 0 -A1 0 0;
        0 A(2,1) 0 0 A(2,2) 0 0 A(2,3) 0 0 -A2 0;
        0 0 A(3,1) 0 0 A(3,2) 0 0 A(3,3) 0 0 -A3;
        0 A(3,1) A(2,1) 0 A(3,2) A(2,2) 0 A(3,3) A(2,3) 0 -A3 -A2;
        A(3,1) 0 A(1,1) A(3,2) 0 A(1,2) A(3,3) 0 A(1,3) -A3 0 -A1;
        A(2,1) A(1,1) 0 A(2,2) A(2,1) 0 A(2,3) A(1,3) 0 -A2 -A1 0];
    %----- grandes deformaciones-----
    dux=A(1,1)*(u01-u010)+A(1,2)*(u04-u010)+A(1,3)*(u07-u010);
    duy=A(2,1)*(u01-u010)+A(2,2)*(u04-u010)+A(2,3)*(u07-u010);
    duz=A(3,1)*(u01-u010)+A(3,2)*(u04-u010)+A(3,3)*(u07-u010);

    dvx=A(1,1)*(u02-u011)+A(1,2)*(u05-u011)+A(1,3)*(u08-u011);
    dvy=A(2,1)*(u02-u011)+A(2,2)*(u05-u011)+A(2,3)*(u08-u011);
    dvz=A(3,1)*(u02-u011)+A(3,2)*(u05-u011)+A(3,3)*(u08-u011);

    dwx=A(1,1)*(u03-u012)+A(1,2)*(u06-u012)+A(1,3)*(u09-u012);
    dwy=A(2,1)*(u03-u012)+A(2,2)*(u06-u012)+A(2,3)*(u09-u012);
    dwz=A(3,1)*(u03-u012)+A(3,2)*(u06-u012)+A(3,3)*(u09-u012);
```

```

        b11=dux*A11; b12=dvx*A11; b13=dwx*A11; b14=dux*A12; b15=dvx*A12;
b16=dwx*A12; b17=dux*A13; b18=dvx*A13; b19=dwx*A13; b110=dux*(-A1);
b111=dvx*(-A1); b112=dwx*(-A1);
        b21=duy*A21; b22=dvy*A21; b23=dwy*A21; b24=duy*A22; b25=dvy*A22;
b26=dwy*A22; b27=duy*A23; b28=dvy*A23; b29=dwy*A23; b210=duy*(-A2);
b211=dvy*(-A2); b212=dwy*(-A2);
        b31=duz*A31; b32=dvz*A31; b33=dwz*A31; b34=duz*A32; b35=dvz*A32;
b36=dwz*A32; b37=duz*A33; b38=dvz*A33; b39=dwz*A33; b310=duz*(-A3);
b311=dvz*(-A3); b312=dwz*(-A3);
        b41=duy*A31; b42=dvy*A31; b43=dwy*A31; b44=duy*A32; b45=dvy*A32;
b46=dwy*A32; b47=duy*A33; b48=dvy*A33; b49=dwy*A33; b410=duy*(-A3);
b411=dvy*(-A3); b412=dwy*(-A3);
        b51=dux*A31; b52=dvx*A31; b53=dwx*A31; b54=dux*A32; b55=dvx*A32;
b56=dwx*A32; b57=dux*A33; b58=dvx*A33; b59=dwx*A33; b510=dux*(-A3);
b511=dvx*(-A3); b512=dwx*(-A3);
        b61=dux*A21; b62=dvx*A21; b63=dwx*A21; b64=dux*A22; b65=dvx*A22;
b66=dwx*A22; b67=dux*A23; b68=dvx*A23; b69=dwx*A23; b610=dux*(-A2);
b611=dvx*(-A2); b612=dwx*(-A2);

```

```

        Bu=[b11 b12 b13 b14 b15 b16 b17 b18 b19 b110 b111 b112; b21 b22 b23
b24 b25 b26 b27 b28 b29 b210 b211 b212;
        b31 b32 b33 b34 b35 b36 b37 b38 b39 b310 b311 b312; b41 b42 b43 b44
b45 b46 b47 b48 b49 b410 b411 b412;
        b51 b52 b53 b54 b55 b56 b57 b58 b59 b510 b511 b512; b61 b62 b63 b64
b65 b66 b67 b68 b69 b610 b611 b612];

```

```

        eps=(Be+Bu)*ue';
        def(:,j)=eps(:);
        defeq(j)=norm(eps);
    end
end

```

```

%-----

```

```

function [ Cefz ] = Csurfezf( Tri,t,VMss )
%extrapolacion de resultados a la superficie
tic
n=length(Tri);
Col=zeros(1,n);
    for i=1:n
        s(1,:)=[Tri(i,:)];

Col(1,i)=find(t(1,:)==s(1)&t(2,:)==s(2)&t(3,:)==s(3)|t(2,:)==s(1)&t(1,:).
..
==s(2)&t(3,:)==s(3)|t(3,:)==s(1)&t(1,:)==s(2)&t(2,:)==s(3)|t(4,:)==s(1)&.
..
t(1,:)==s(2)&t(2,:)==s(3)|t(1,:)==s(1)&t(2,:)==s(2)&t(4,:)==s(3)|t(2,:)==
s(1)&...

t(1,:)==s(2)&t(4,:)==s(3)|t(3,:)==s(1)&t(1,:)==s(2)&t(4,:)==s(3)|t(4,:)==
s(1)&...

t(1,:)==s(2)&t(3,:)==s(3)|t(1,:)==s(1)&t(3,:)==s(2)&t(2,:)==s(3)|t(2,:)==
s(1)&...

```

```

t(3,:)==s(2)&t(1,:)==s(3)|t(3,:)==s(1)&t(2,:)==s(2)&t(1,:)==s(3)|t(4,:)==
s(1)&...

t(2,:)==s(2)&t(1,:)==s(3)|t(1,:)==s(1)&t(3,:)==s(2)&t(4,:)==s(3)|t(2,:)==
s(1)&...

t(3,:)==s(2)&t(4,:)==s(3)|t(3,:)==s(1)&t(2,:)==s(2)&t(4,:)==s(3)|t(4,:)==
s(1)&...

t(2,:)==s(2)&t(3,:)==s(3)|t(1,:)==s(1)&t(4,:)==s(2)&t(2,:)==s(3)|t(2,:)==
s(1)&...

t(4,:)==s(2)&t(1,:)==s(3)|t(3,:)==s(1)&t(4,:)==s(2)&t(1,:)==s(3)|t(4,:)==
s(1)&...

t(3,:)==s(2)&t(1,:)==s(3)|t(1,:)==s(1)&t(4,:)==s(2)&t(3,:)==s(3)|t(2,:)==
s(1)&...

t(4,:)==s(2)&t(3,:)==s(3)|t(3,:)==s(1)&t(4,:)==s(2)&t(2,:)==s(3)|t(4,:)==
s(1)&...
        t(3,:)==s(2)&t(2,:)==s(3));
    end
    Cefz=zeros(1,n);
    for i=1:n
        Cefz(1,i)=VMss(Col(i));
    end
    toc
end
%-----

function [ Csurf ] = Ccolors( Tri,VMss,x )
%programa para interpolar los valores del esfuerzo en el cuerpo
D=Tri(:)';%convierte en vector la matriz Tri
Nod=unique(D,'stable');%elimina los valores repetidos de D
Nod=sort(Nod);%ordena de forma ascendente los valores de Nod
n=length(Nod);
Csurf=zeros(1,length(x));
    for i=1:n
        en=Nod(i);
        elem=find(Tri(:,1)==en|Tri(:,2)==en|Tri(:,3)==en);%encuentra que
        elementos comparten este nodo
        num=length(elem);
        sum=0;
        for j=1:num
            sum=sum+VMss(elem(j));%suma el valor de los esfuerzos de todos
            los elementos que comparten este nodo
            j=j+1;
        end
        esfintp=sum/num;
        Csurf(Nod(i))=esfintp;%encuentra el promedio y se lo asigna al nodo
        i=i+1;
    end
end
end

```

```

%-----
function [ ValInter ] = interp3D(p,VMss,t )
%interpolacion con distancia ponderada
t; nt=length(t); c=zeros(3,nt); n=length(p); ValInter=zeros(1,n);
%calculamos el centroide de cada tetraedro
for j=1:nt
    x1=p(1,t(1,j)); y1=p(2,t(1,j)); z1=p(3,t(1,j));
    x2=p(1,t(2,j)); y2=p(2,t(2,j)); z2=p(3,t(2,j));
    x3=p(1,t(3,j)); y3=p(2,t(3,j)); z3=p(3,t(3,j));
    x4=p(1,t(4,j)); y4=p(2,t(4,j)); z4=p(3,t(4,j));
    cx=(x1+x2+x3+x4)/4; cy=(y1+y2+y3+y4)/4; cz=(z1+z2+z3+z4)/4;
    c(:,j)=[cx; cy ;cz];
end
%interpolacion para el valor de cada nodo
t=t';
for i=1:n

    en=i;
    elem=find(t(:,1)==en|t(:,2)==en|t(:,3)==en | t(:,4)==en);
    num=length(elem);
    sum=0; sum1=0;

    for j=1:num
        d=norm(p(:,i)-c(:,elem(j)));
        sum=sum+VMss(elem(j))*(1/d^2);
        sum1=sum1+(1/d^2);
    end
    ValInter(i)=sum/sum1;
end

```

ANEXO D. OTROS EJEMPLOS APLICANDO EL CODIGO

El código realizado se aplicó para analizar el comportamiento no lineal del LDPE utilizado como cubierta plástica de un invernadero, pero esta solo es una de las muchas aplicaciones que se pueden realizar con este código, ya que el proceso es general y el método el elemento finito muestra su gran potencia en geometrías complejas, para demostrar esto se realizaron ejemplos de cálculo y simulación usando el mismo código, se escogieron materiales y geometrías complejas que también presentan no linealidades.

Silla de plástico

Silla de plástico simulada bajo las cargas de una persona sentada.

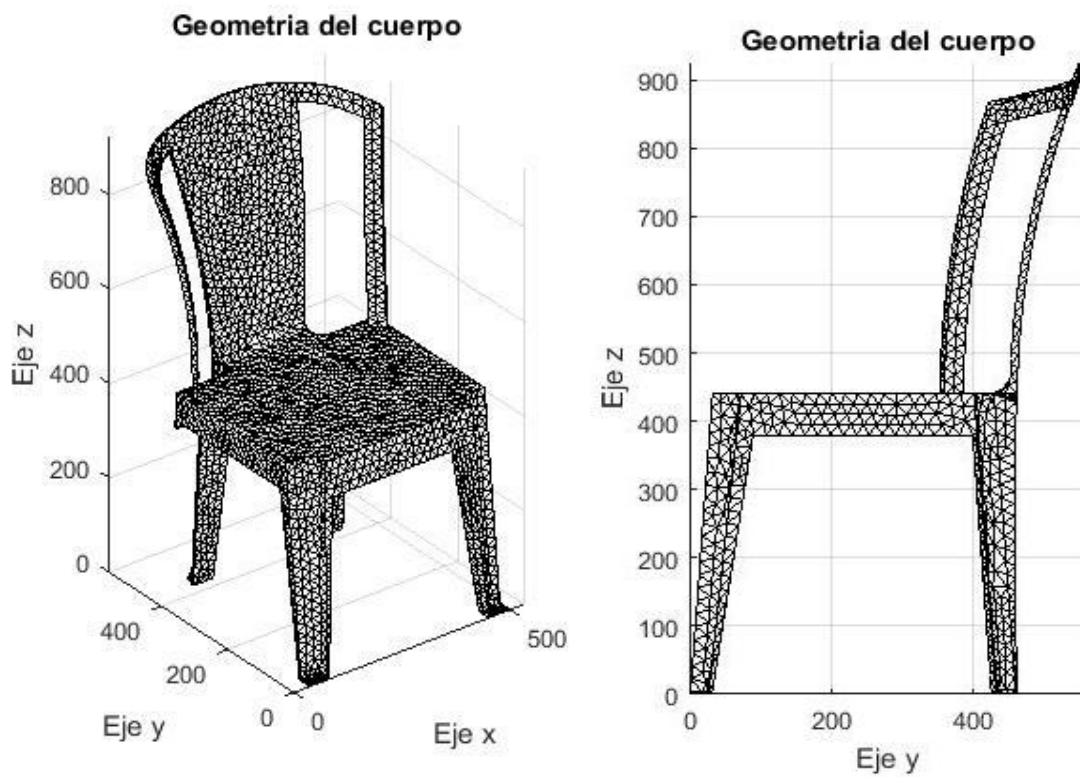


Figura D1. Geometría de la silla simulada.

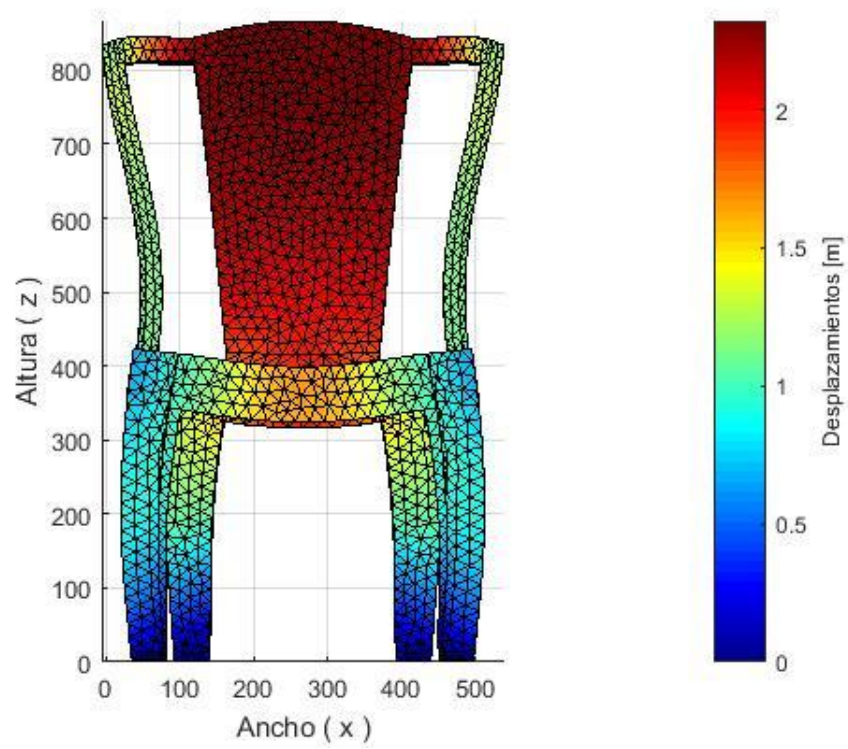
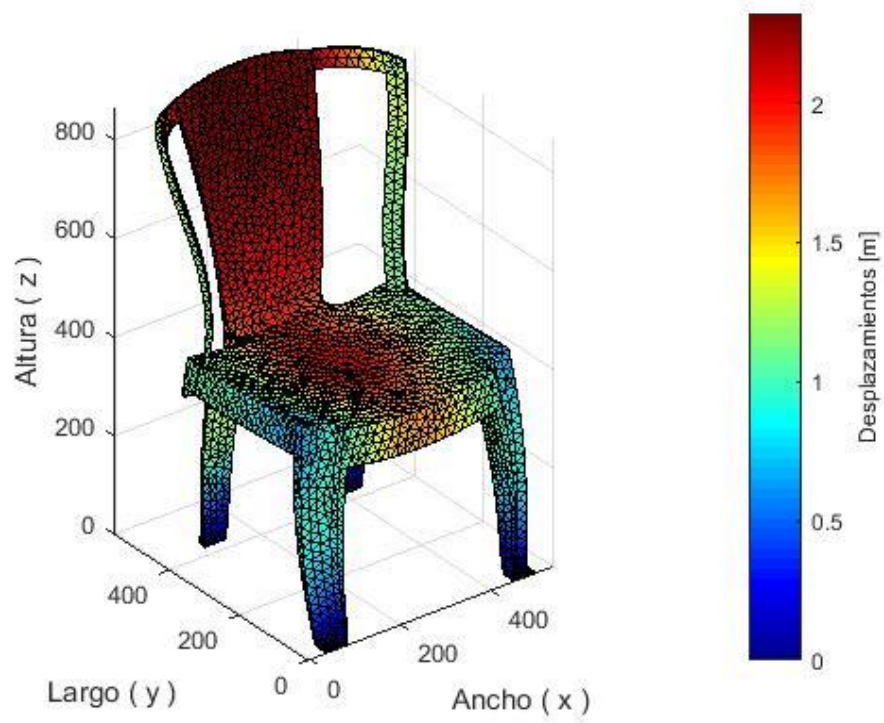


Figura D2. Desplazamientos en silla simulada.

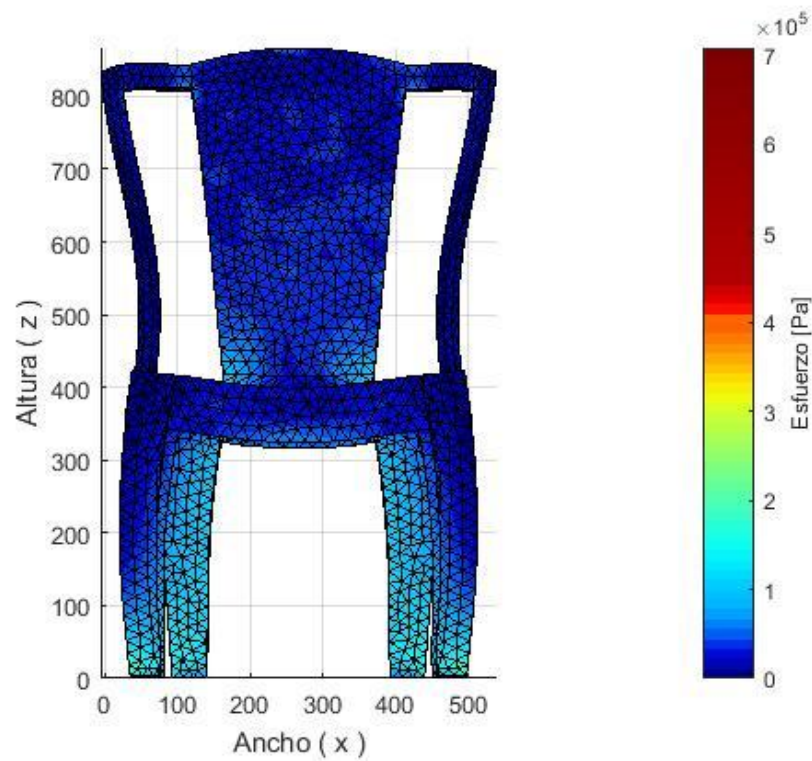
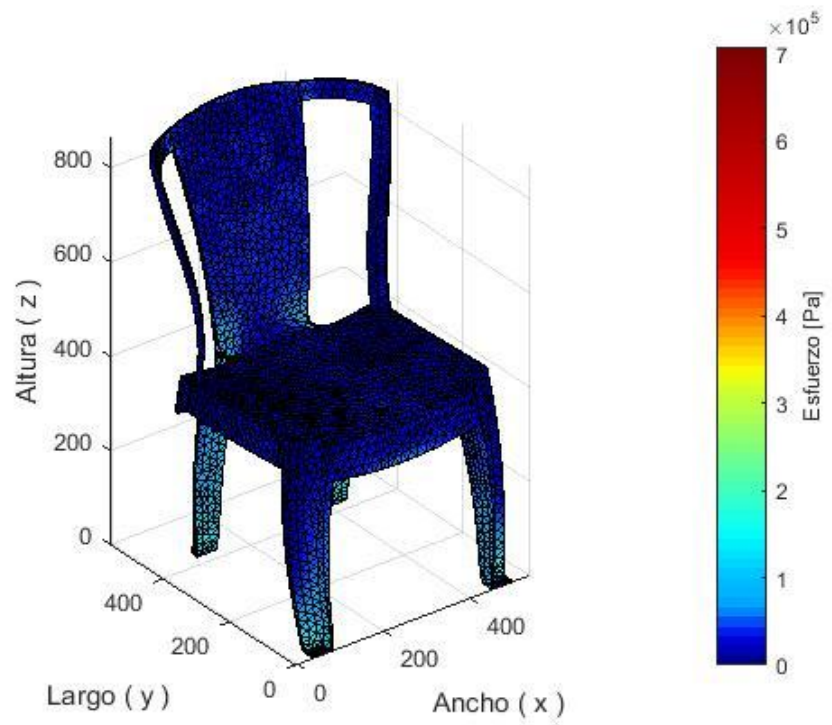


Figura D3. Esfuerzos en silla simulada.

Lata de aluminio

Se simulo una lata de aluminio que recibe una fuerza en la parte superior de su geometría

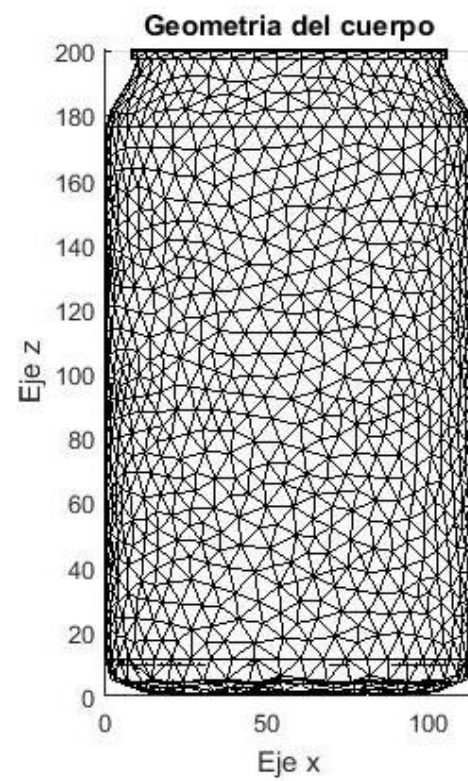
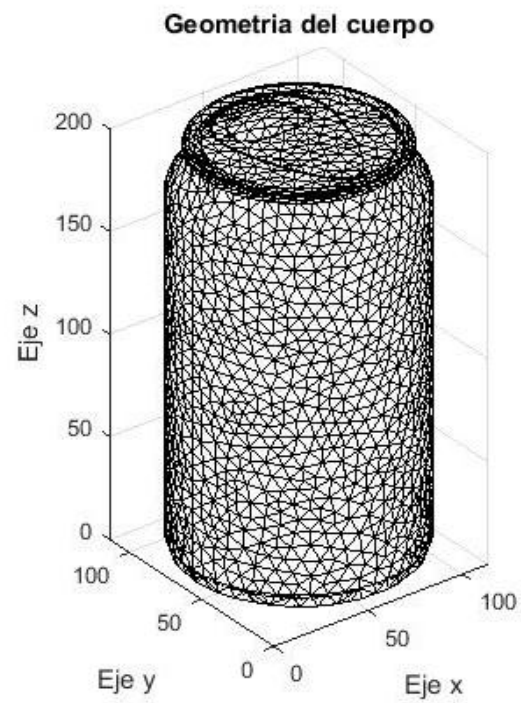


Figura D4. Geometría de la lata simulada.

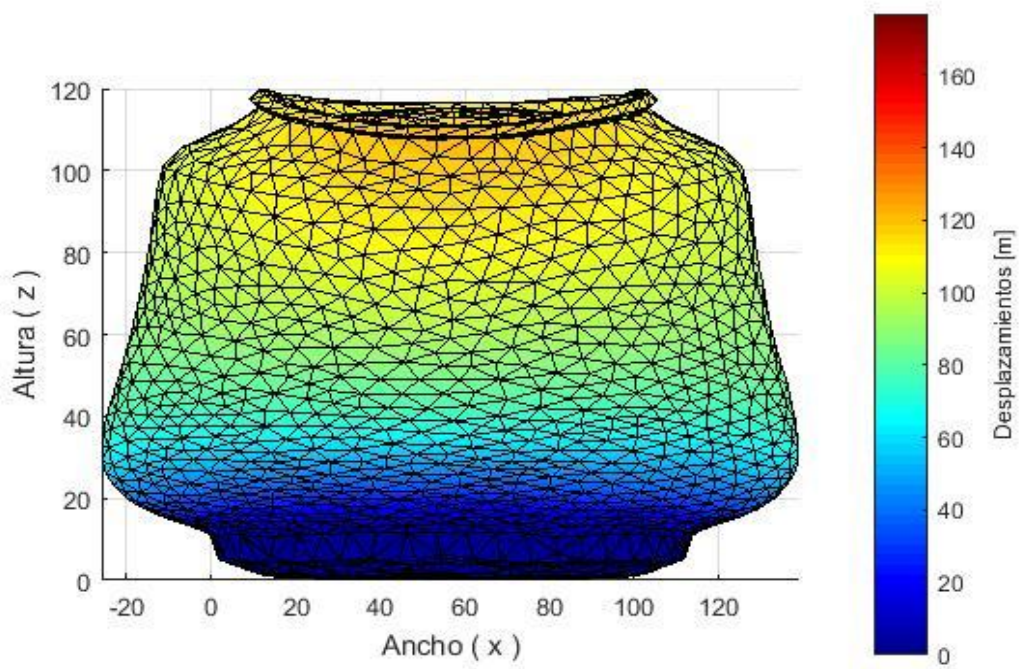
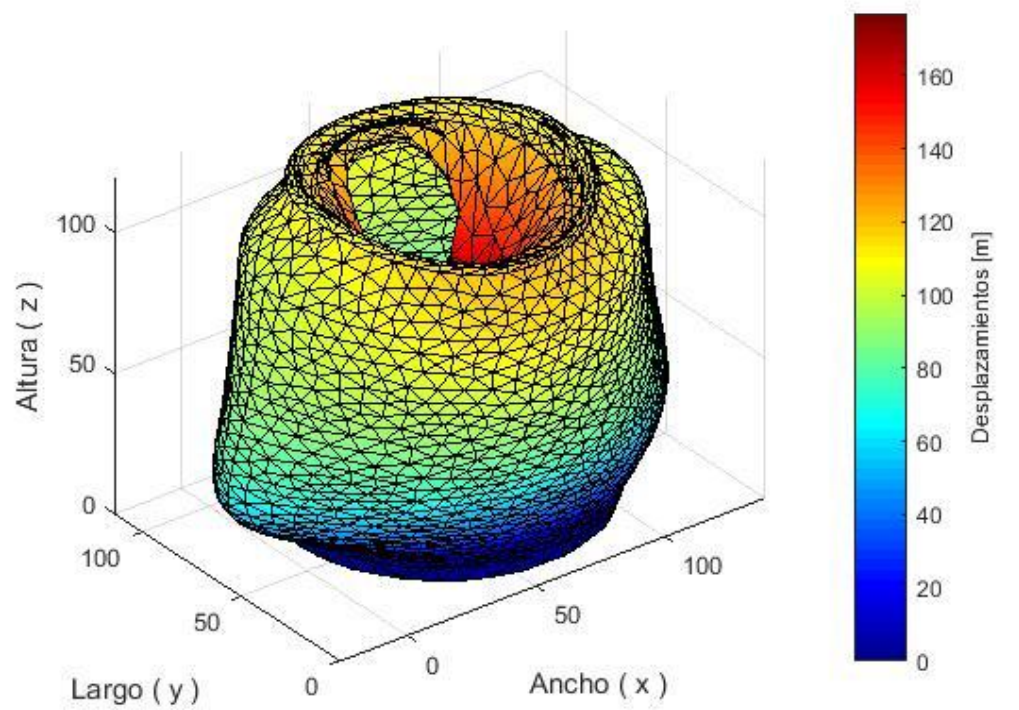


Figura D5. Desplazamientos en la lata simulada.

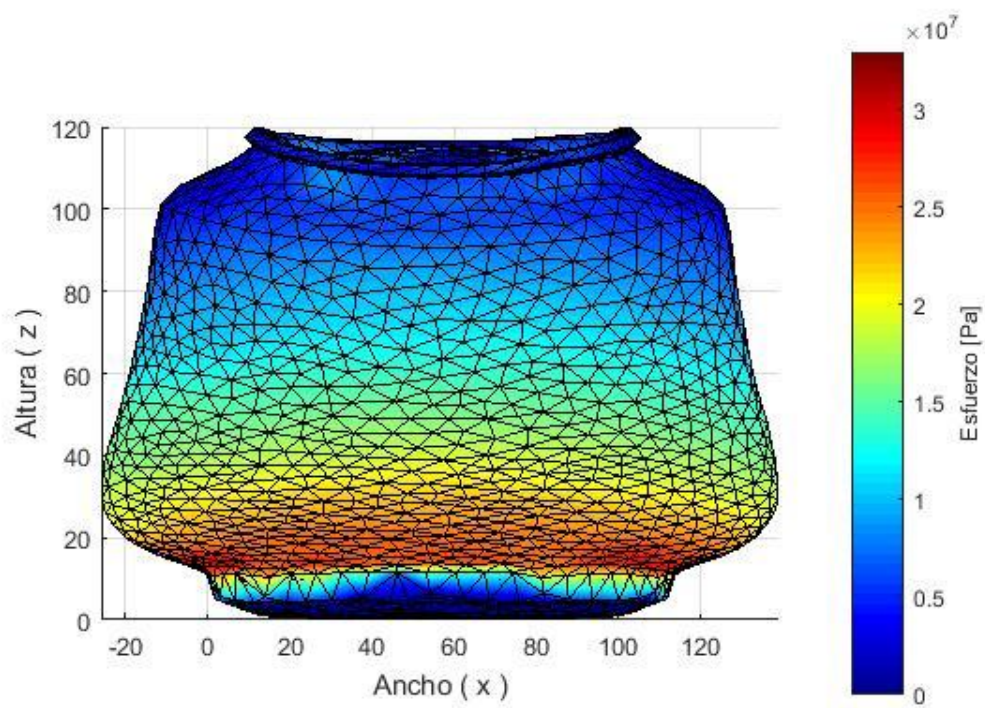
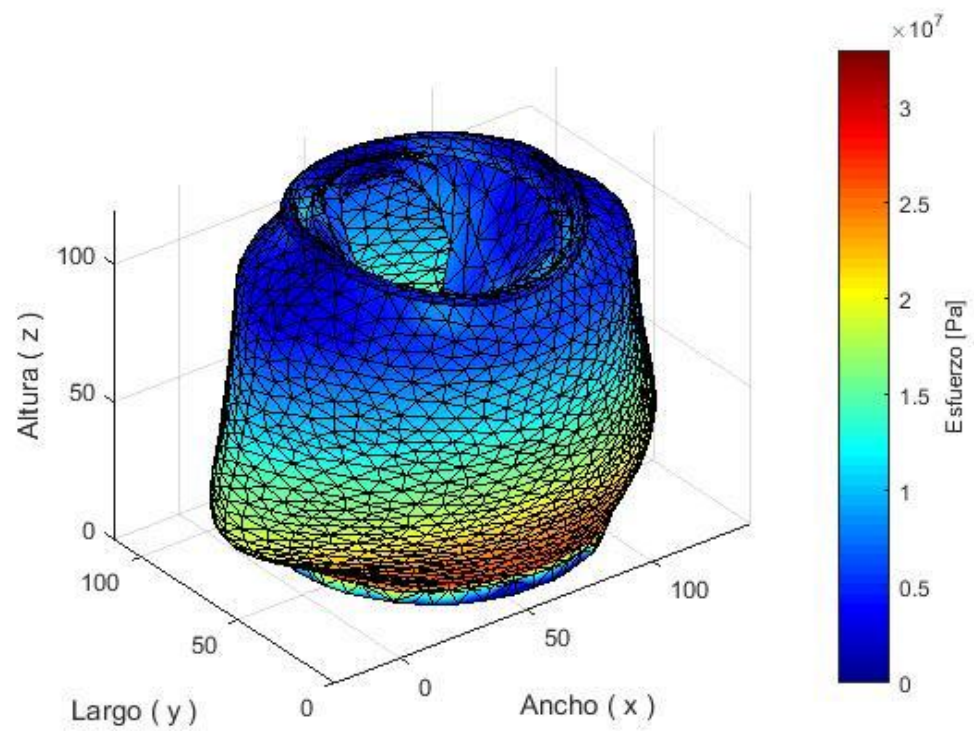


Figura D6. Esfuerzos en la lata simulada.

Simulación de una botella de plástico al apretarla con las manos

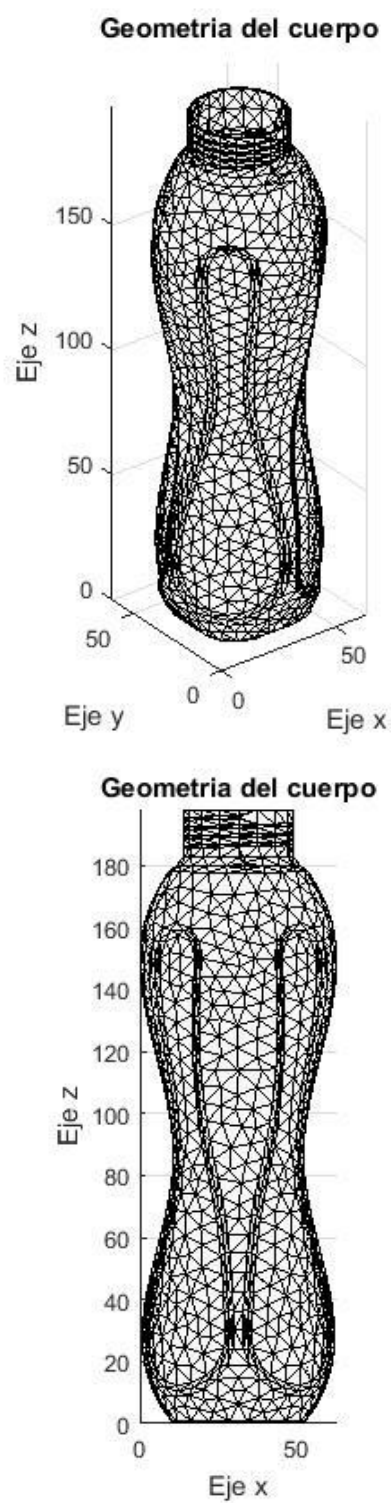


Figura D7. Geometría de la botella simulada.

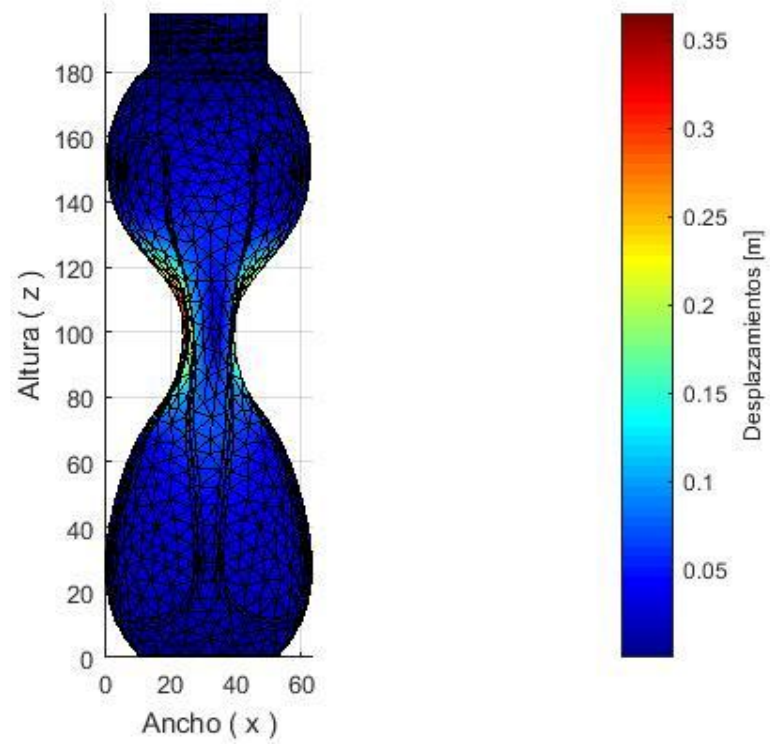
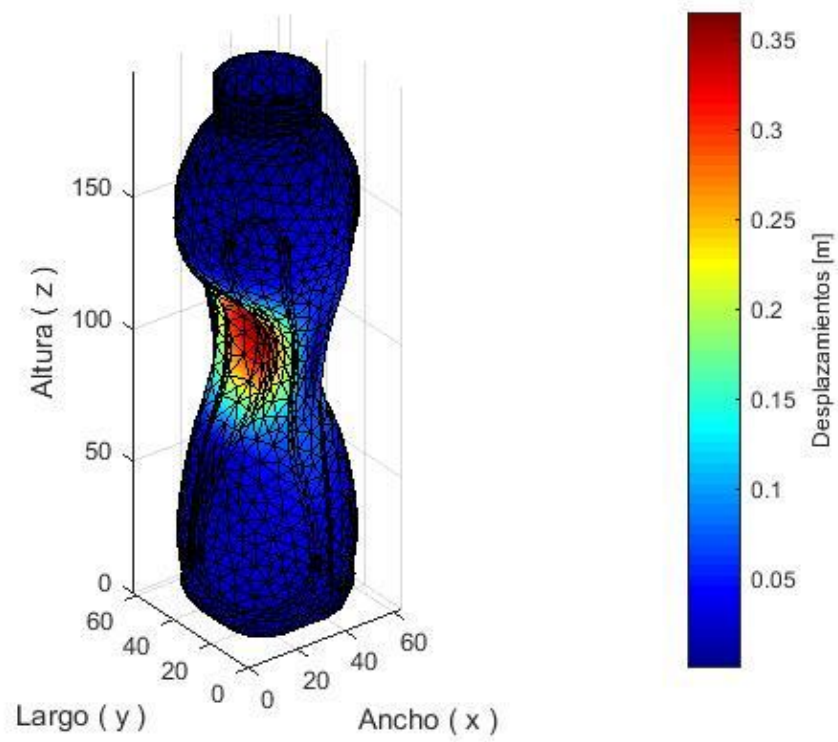


Figura D8. Desplazamientos en la botella simulada.

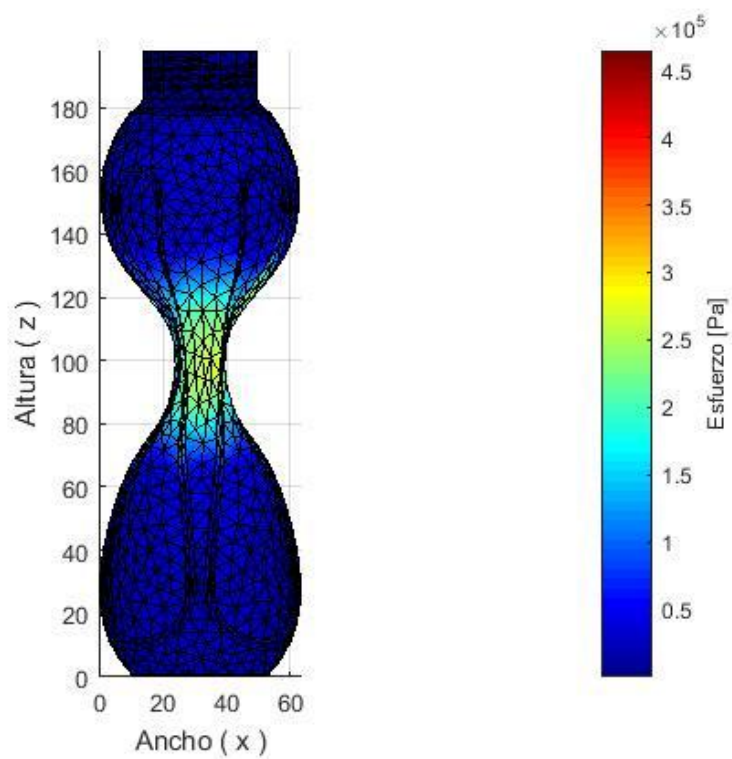
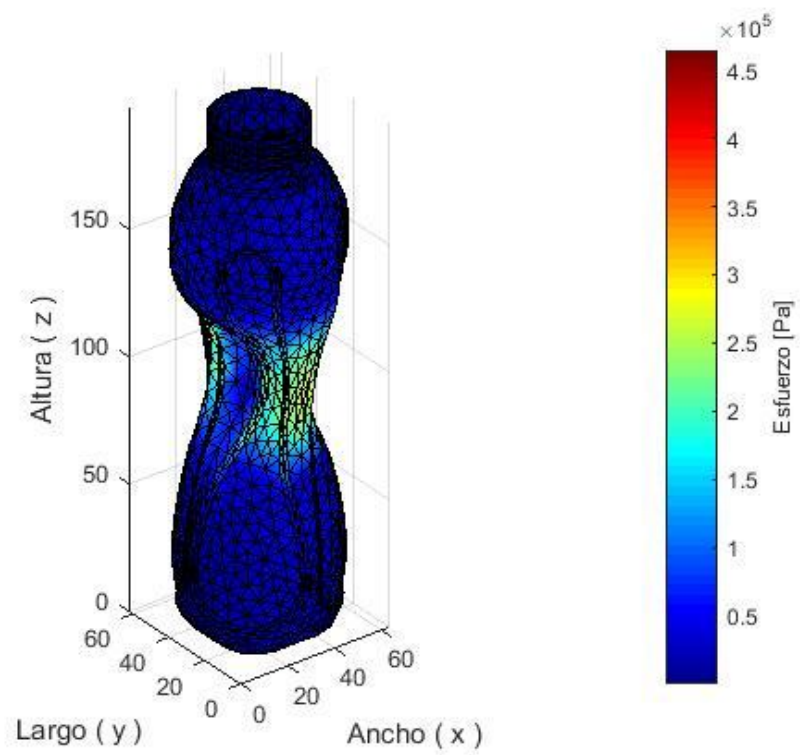


Figura D9. Esfuerzos en la botella simulada.

Pistón, se simuló un pistón recibiendo la carga en la cabeza

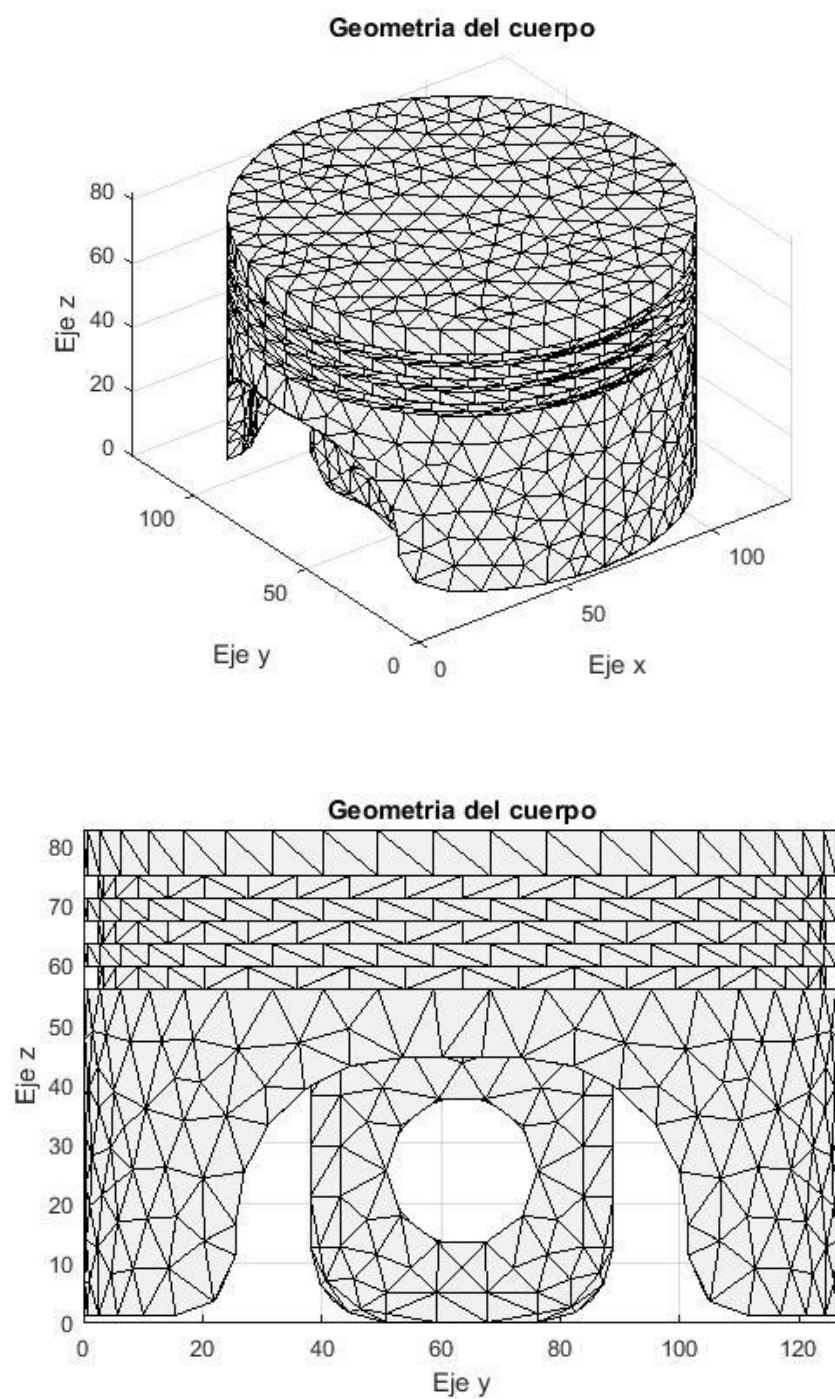


Figura D10. Geometría del pistón simulado

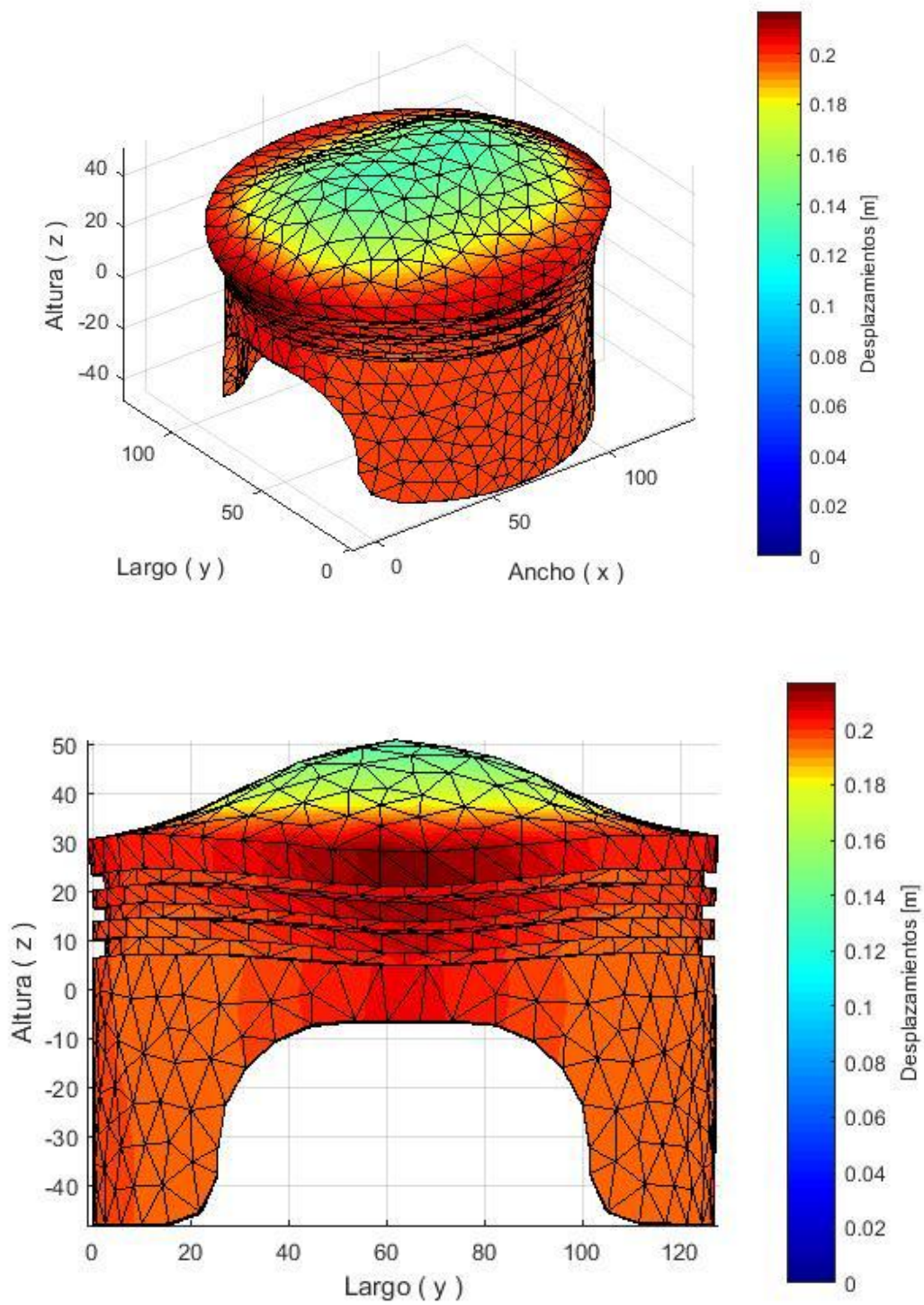


Figura D11 desplazamientos en el pistón simulado.

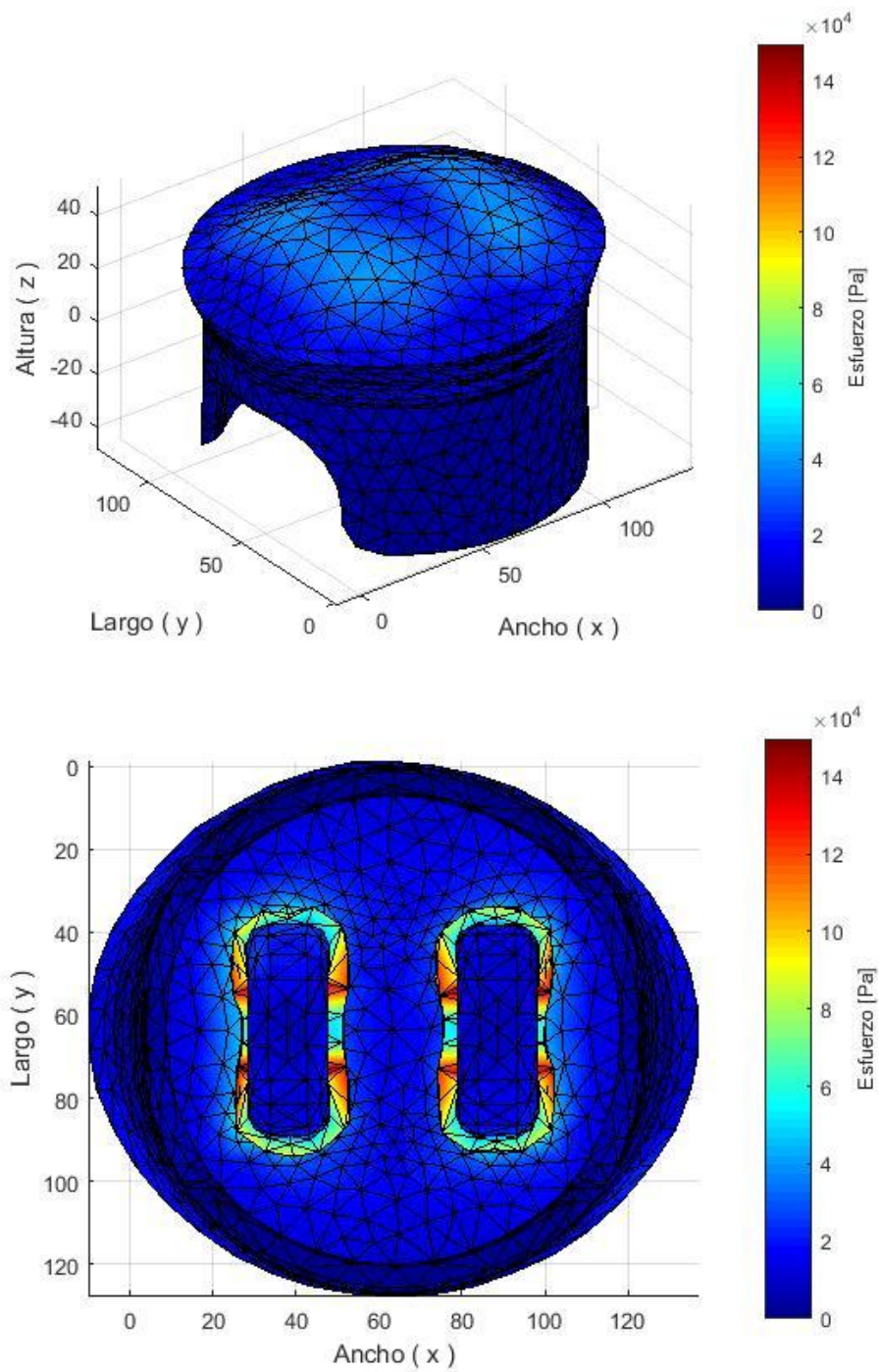


Figura D12. Esfuerzos en el pistón simulado.