



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO.

**DIVISIÓN DE CIENCIAS ECONÓMICO-
ADMINISTRATIVAS**

**“ÓPTIMOS FORESTALES Y CAPTURA DE CARBONO:
CASO BALANCÁN, TABASCO.”**

TESIS

QUE COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:



DIRECCIÓN GENERAL ACADÉMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES

**MAESTRO EN CIENCIAS EN ECONOMÍA AGRÍCOLA
Y DE LOS RECURSOS NATURALES.**

PRESENTA:

PLÁCIDO SALOMÓN ÁLVAREZ LÓPEZ.

**ENSEÑAR LA EXPLOTACIÓN DE LA TIERRA,
NO LA DEL HOMBRE**

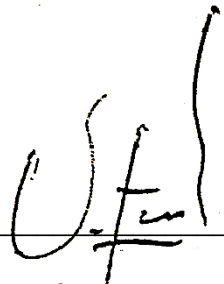
**CHAPINGO, TEXCOCO, ESTADO DE MÉXICO.
JULIO DE 2011**



“ÓPTIMOS FORESTALES Y CAPTURA DE CARBONO: CASO
BALANCÁN, TABASCO.

Esta tesis fue realizada por Plácido Salomón Álvarez López, bajo la dirección del Dr. Vico R. Valdovinos Chávez. Fue revisada y aprobada por el siguiente Comité Revisor y Jurado Examinador, para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Economía Agrícola y de los Recursos Naturales.

Director.



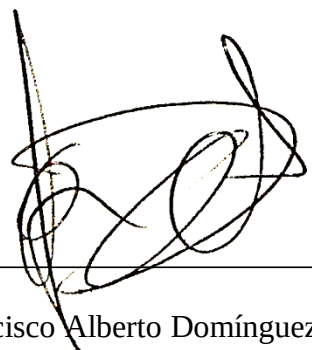
Dr. Víctor Rafael Valdovinos Chávez.

Asesor.



Dr. Ramón Valdivia Alcalá.

Asesor.



Dr. Francisco Alberto Domínguez Álvarez.

Chapingo, Edo. México. Julio 2011.

AGRADECIMIENTOS.

El autor de esta tesis agradece a las siguientes personas e instituciones.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el financiamiento brindado para cursar mis estudios de posgrado.

A mí alma mater la Universidad Autónoma Chapingo, por formarme como un profesionista con valores y ética, y proporcionarme los conocimientos para continuar con mi desarrollo profesional.

Al Dr. Víctor R. Valdovinos Chávez por su amistad, asesoría, apoyo y por cada una de sus valiosas sugerencias y observaciones.

Al Dr. Ramón Valdivia Alcalá por su confianza, asesoría y apoyo en la realización de este documento, así como por su amistad.

Al Dr. Fco. Alberto Domínguez Álvarez por todos los conocimientos brindados, así como por su revisión y amplias sugerencias para mejorar este documentó.

Al M.C. Juan Elgueta, gerente operativo de PROPLANSE, por la facilidad brindada para la obtención de datos.

A mis amigos y compañeros del posgrado, por su amistad y excelente compañerismo.

DEDICATORIAS

A Dios primero que todo, que me ha dado la fuerza y entereza para luchar por los retos y sueños impuestos en la vida, y enfrentarlas con todas las fuerzas permisibles.

A los seres que me dieron la vida, mis padres Ma. Cristina Isabel López Álvarez y Plácido Salomón Álvarez Zúñiga, por inculcarme los valores fundamentales de la vida, por hacerme una persona de bien, luchador incansable y por su apoyo incondicional.

A mis hermanos: Jaime, Rufina, Ma. del Rosario, Bernabé y Ma. Monserrat, quienes crecieron conmigo y me brindaron el cariño de una familia unida.

A mis sobrinos: Francisco David, Jonathan Mayolo, Carlos Alberto, José Luis, Brenda, Tania, Arlette y Cristopher, quienes están empezando con sus estudios, y con una sonrisa me dan fuerzas para superarme.

DATOS BIOGRÁFICOS

Plácido Salomón Álvarez López nació en 1986 en el municipio de Palenque, Chiapas. De 1992 a 1998 estudió en la escuela primaria “Cultura Maya”. Prosiguió con sus estudios en la “Escuela Secundaria Técnica # 10” de 1998 a 2001. Los estudios de preparatoria fueron cursados en la “Universidad Autónoma Chapingo” de 2001 a 2004. Estudió la licenciatura en la “División de Ciencias Forestales” de la Universidad Autónoma Chapingo de 2004 a 2008, obteniendo el título de Licenciado en Estadística con proyecto de investigación “Un Estudio de las Metodologías de las Encuestas de Salida y Discrepancia con los Resultados Oficiales”.

De agosto de 2009 a julio de 2011, prosiguió con sus estudios de posgrado en el programa de Maestría en Ciencias en Economía Agrícola y de los Recursos Naturales de la División de Ciencias Económico-Administrativas en la Universidad Autónoma Chapingo.

**“ÓPTIMOS FORESTALES Y CAPTURA DE CARBONO: CASO BALANCÁN,
TABASCO”**

**“FOREST OPTIMUMS AND CARBON CAPTURE: THE CASE OF BALANCÁN,
TABASCO”**

Plácido Salomón **Álvarez-López**¹, Víctor R. **Valdovinos Chávez**²

RESUMEN

En la presente investigación se determinó la relación existente entre cinco tipos de óptimos forestales: dos técnicos (máxima producción total y máxima producción media), dos económicos (Hotelling y Faustman) y un ambiental (Hartman), para tres modelos de crecimiento: polinomial de tercer grado, Schumacher y Chapman-Richards.

Los datos referentes a la plantación fueron proporcionados por la empresa “Productora de Plantaciones del Sureste” (PROPLANSE), para dos especies tropicales: *Eucalyptus grandis* y *Gmelina arborea*.

Al comparar el óptimo ambiental con los económicos, se encontró que al incorporar aspectos ambientales el turno registró un incremento que va desde 2.5 hasta 9.9 meses para *Eucalyptus grandis*, y de 1 hasta 23.4 meses para *Gmelina arborea*. En términos generales, el óptimo de Hartman es la opción más adecuada para lograr un aprovechamiento forestal sustentable, debido a que incorpora tanto los aspectos económicos como el valor de los servicios ambientales y recreativos que proporciona la plantación.

Palabras Claves: plantaciones forestales, modelos de crecimiento, óptimos técnicos, óptimos económicos, óptimos ambientales.

ABSTRACT

In the following research work we determined the relationship between five kinds of forest optimums: two technical (maximum total production and maximum average production), two economic (Hotelling and Faustman) and one environmental (Hartman), for three growth models: third-degree polynomial, Schumacher and Chapman-Richards.

The data related to the plantation was provided by the Productura de Plantaciones del Sureste (PROPLANSE) company, a plantation producer in the Mexican southeast, for two tropical species: *Eucalyptus grandis* and *Gmelina arborea*.

By comparing the environmental optimum with the economic ones, we found that incorporating environmental aspects resulted in an increase that goes from 2.5 to 9.9 months for *Eucalyptus grandis*, and from one to 23.4 months for *Gmelina arborea*. In general terms, the Hartman optimum is the most appropriate option for achieving sustainable forestry, because it incorporates both the economic aspects and the value of the environmental and recreational services provided by the plantation.

Keywords: forest plantations, growth models, technical optimums, economic optimums, environmental optimums.

¹ Tesista
² Director de tesis

¹ Author
² Thesis advisor

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS	VIII
ÍNDICE DE CUADROS.....	XII
ÍNDICE DE ANEXOS.....	XIII
LISTA DE UNIDADES, ABREVIATURAS Y SIGLAS.	XIII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	1
1.3. Hipótesis	2
1.4. Objetivos	2
1.4.1. General.....	2
1.4.2. Particulares	2
2. MARCO CONCEPTUAL	3
2.1. Descripción del área de estudio.	3
2.1.1. Localización.	3
2.1.2. Extensión.....	4
2.2. Plantaciones forestales comerciales.....	4
2.3. Mercado de los productos forestales en México	8
2.4 Captura de carbono en sistemas forestales.....	9
2.4.1. Flujos y almacenes de carbono en sistemas forestales	10
2.4.2. La captura de carbono en los sistemas forestales de México	12
2.5. Economía de los recursos naturales.	14
2.5.1 Evolución del pensamiento económico.....	14
2.5.2. Óptimo de Pareto	16
2.5.3. Principio de equimarginalidad.....	18
2.6 Optimización.....	19
2.6.1. Conceptos básicos.....	19
2.6.2. Optimización estática.....	22
2.6.3. Optimización dinámica	28

2.7. Óptimos forestales	34
2.7.1. Óptimos técnicos	34
2.7.2 Óptimos económicos.....	37
2.7.3 Óptimo Ambiental	42
2.8 Descripción de modelos volumétricos	47
2.8.1 Modelo polinomial.....	48
2.8.2 Modelo Schumacher	50
2.8.3 Modelo Chapman-Richards.....	53
3. METODOLOGÍA	56
3.1 Datos utilizados	56
3.2 Modelos utilizados	57
3.3. Estimación del carbono capturado.....	59
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	61
4.1 Óptimos para <i>Eucalyptus grandis</i>	61
4.1.1. Modelo polinomial.....	62
4.1.2. Modelo Schumacher	72
4.1.3. Modelo Chapman-Richards.....	80
4.1.4. Resumen.....	89
4.2. Óptimos para <i>Gmelina arborea</i>	89
4.2.1. Modelo polinomial.....	90
4.2.2. Modelo Schumacher	100
4.2.3. Modelo Chapman-Richards.....	108
4.2.4. Resumen.....	117
4.3. Discusión	117
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	121
5.1. Conclusiones	121
5.2. Recomendaciones.....	123
6. REFERENCIAS.....	124
7. ANEXOS	128

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ubicación de Balancán Tabasco, Méx. (Enciclopedia de los municipios de México, Tabasco.)	3
Figura 2. Almacenamiento de CO ₂	10
Figura 3. Curva de crecimiento o función de producción.	36
Figura 4. Curvas de producción marginal y producción media.	37
Figura 5. Función de beneficios no madereros proporcionados por el bosque.	43
Figura 6. Función de producción para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	62
Figura 7. Curva de producción marginal para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial ajustada.	63
Figura 8. Curvas de producción marginal y producto medio para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivadas de la función polinomial de tercer grado ajustada.	64
Figura 9: Curva del VAN (Hotelling) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	65
Figura 10. Curva de equilibrio de Hotelling para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	66
Figura 11: Curva del VAN (Faustman) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	67
Figura 12: Curva de equilibrio de Faustman para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	68
Figura 13: Curva del VAN (Hartman) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	70
Figura 14: Curva de equilibrio de Hartman para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	71
Figura 15: Función de producción para <i>Eucalyptus grandis</i> , empleando el modelo Schumacher ajustado.	72

Figura 16: Curva de producción marginal para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	74
Figura 17: Curvas del producción marginal y producto medio para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivadas de la función Schumacher ajustada.	75
Figura 18: Curva del VAN (Hotelling) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	76
Figura 19: Curva de equilibrio de Hotelling para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	76
Figura 20: Curva del VAN (Faustman) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	77
Figura 21: Curva de equilibrio de Faustman para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	78
Figura 22: Curva del VAN (Hartman) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	79
Figura 23: Curva de equilibrio de Hartman para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	80
Figura 24: Función de producción para <i>Eucalyptus grandis</i> , empleando el modelo Chapman-Richards ajustado.	81
Figura 25: Curva de producción marginal para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	82
Figura 26: Curvas de producción marginal y producto medio para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivadas de la función Chapman-Richards ajustada.	83
Figura 27: Curva del VAN (Hotelling) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	84
Figura 28: Curva de equilibrio de Hotelling para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	85
Figura 29: Curva del VAN (Faustman) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	86
Figura 30: Curva de equilibrio de Faustman para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	86
Figura 31: Curva del VAN (Hartman) para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	87

Figura 32: Curva de equilibrio de Hartman para <i>Eucalyptus grandis</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	88
Figura 33: Función de producción para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	91
Figura 34: Curva de producción marginal para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	91
Figura 35: Curvas de producción marginal y producto medio para <i>Gmelina arborea</i> , derivadas de la función polinomial de tercer grado ajustada.	92
Figura 36: Curva del VAN (Hotelling) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	93
Figura 37: Curva de equilibrio de Hotelling para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	94
Figura 38: Curva del VAN (Faustman) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	95
Figura 39: Curva de equilibrio de Faustman para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	96
Figura 40: Curva del VAN (Hartman) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	98
Figura 41: Curva de equilibrio de Hartman para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.	99
Figura 42: Función de producción para <i>Gmelina arborea</i> , empleando el modelo Schumacher ajustado.	100
Figura 43: Curva de producción marginal para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	102
Figura 44: Curvas de producción marginal y producto medio para <i>Gmelina arborea</i> , derivadas de la función Schumacher ajustada.	103
Figura 45: Curva del VAN (Hotelling) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	104
Figura 46: Curva de equilibrio de Hotelling para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	104
Figura 47: Curva del VAN (Faustman) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	105

Figura 48: Curva de equilibrio de Faustman para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	106
Figura 49: Curva del VAN (Hartman) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.....	107
Figura 50: Curva de equilibrio de Hartman para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Schumacher ajustada.	108
Figura 51: Función de producción para <i>Gmelina arborea</i> , empleando el modelo Chapman-Richards ajustado.....	109
Figura 52: Curva de producción marginal para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	110
Figura 53: Curvas de producción marginal y producto medio para <i>Gmelina arborea</i> , derivadas de la función Chapman-Richards ajustada.	111
Figura 54: Curva del VAN (Hotelling) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	112
Figura 55: Curva de equilibrio de Hotelling para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	113
Figura 56: Curva del VAN (Faustman) para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	114
Figura 57: Curva de equilibrio de Faustman para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	114
Figura 58: Curva del VAN (Hartman) para de <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	115
Figura 59: Curva de equilibrio de Hartman para <i>Gmelina arborea</i> , derivada de la función Chapman-Richards ajustada.	116
Figura 60. Comparación de los tres modelos de producción ajustados para <i>Eucalyptus grandis</i>	118
Figura 61. Comparación de los tres modelos de producción ajustados para <i>Gmelina arborea</i>	119

ÍNDICE DE CUADROS.

Cuadro 1. Productividad de plantaciones comerciales en los principales países tropicales (Brown <i>et al</i> , 1997).....	5
Cuadro 2. Porcentaje del territorio cubierto por superficie boscosa.	8
Cuadro 3: Ecuaciones para cubicar árboles en pie, tomadas de PROPLANSE y SERESFO (2007).	56
Cuadro 4: Modelos de crecimiento utilizados.	57
Cuadro 5: Sinopsis de los diferentes turnos forestales.	58
Cuadro 6. Estimación del carbono capturado para <i>Eucalyptus grandis</i> y <i>Gmelina arborea</i>	59
Cuadro 7: Parámetros estimados, suma de cuadrados de los errores (<i>SCE</i>) y coeficiente de determinación (R^2) para los modelos de producción de <i>Eucalyptus grandis</i>	61
Cuadro 8: Modelos ajustados para <i>Eucalyptus grandis</i>	61
Cuadro 9: Óptimos Forestales obtenidos para <i>Eucalyptus grandis</i> , utilizando los tres modelos de crecimiento.	89
Cuadro 10. Parámetros estimados, suma de cuadrados de los errores (<i>SCE</i>) y coeficiente de determinación (R^2) para los modelos de producción de <i>Gmelina arborea</i>	89
Cuadro 11: Modelos ajustados para <i>Gmelina arborea</i>	90
Cuadro 12: Óptimos Forestales obtenidos para <i>Gmelina arborea</i> , utilizando los tres modelos de crecimiento.	117

ÍNDICE DE ANEXOS.

Anexo 1: Tabla de Volumen (m^3) para <i>Eucalyptus grandis</i>	128
Anexo 2: Tabla de Volumen (m^3) para <i>Gmelina arborea</i>	128
Anexo 3: Costos de establecimiento de una plantación de <i>Eucalyptus grandis</i> y <i>Gmelina arborea</i>	129
Anexo 4: Costo de herramientas en Balancán, Tabasco, Méx.....	130

LISTA DE UNIDADES, ABREVIATURAS Y SIGLAS.

CETES: Certificado de la Tesorería de la Federación.	OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.
CO: Control Óptimo.	CO₂: Bióxido de Carbono.
CPO: Condición de Primer Orden.	PB: Problema Básico.
GEI: Gases de Efecto Invernadero.	PMe: Producto Medio.
GtC: Gigatoneladas de carbono.	PMg: Producto Marginal.
ICA: Incremento Corriente Anual.	PO: Programa de Optimización.
IMA: Incremento Medio Anual.	POB: Principio de Optimalidad de Bellman.
IPCC: Grupo de Expertos de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático.	PRODEPLAN: Programa para el Desarrollo de Plantaciones Forestales.
Km²: Kilómetros cuadrados.	PROPLANSE: Productora de Plantaciones del Sureste.
MDL: Mecanismo de Desarrollo Limpio	tC/ha: Toneladas de carbono por hectárea.
m³/ha: Metros cúbicos por hectárea.	UNFCC: Convención de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático.
Mha: Megahectáreas.	VAN: Valor Actual Neto.
MtC: Megatoneladas de Carbono.	

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Antecedentes

Hasta épocas recientes la actividad forestal en nuestro país (México) estuvo centrada en el aprovechamiento de los bosques naturales y por ello se puso especial atención en los óptimos biológicos (técnicos). Con el establecimiento de plantaciones forestales con fines comerciales (1995), surgió la necesidad de considerar también los óptimos económicos. A últimas fechas es cada vez más importante poner atención tanto en los beneficios económicos, como en los bienes y servicios que proporcionan las áreas arboladas. Por tanto, es necesario considerar tres tipos de óptimos forestales en el aprovechamiento racional de una plantación: los técnicos, los económicos y los ambientales.

1.2. Planteamiento del problema

En la actualidad, en México se registra una crisis del sector forestal, debido entre otras causas, a las malas prácticas de administración y fallas en la gestión. Es un hecho, que la mayor parte de los productos maderables que se producen en el país, provienen de bosques naturales y de las escasas plantaciones forestales existentes. Esto ha ocasionado que grandes extensiones forestales hayan sido destruidas (con la finalidad de abastecer la industria de la madera) y que los servicios ambientales forestales sean cada vez más escasos y de menor calidad (contribuyendo con el efecto invernadero y el calentamiento global).

La problemática básica de la administración forestal y los aprovechamientos forestales, gira en torno de los pocos o nulos esfuerzos que se han realizado para investigar óptimos

forestales o turnos forestales más viables; la mayoría de los estudios están enfocados básicamente a aspectos biológicos (técnicos) con el propósito de determinar la productividad de los rodales, sin dar mayor importancia a los aspectos económicos y ambientales.

1.3. Hipótesis

A medida que se incorporen aspectos ambientales en los planes de aprovechamiento forestal, el turno será cada vez mayor.

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Precisar la relación existente entre tres tipos de óptimos (turnos) forestales: técnicos, económicos y ambientales.

1.4.2. Particulares

1. Determinar los modelos de crecimiento (producción), y el valor de los beneficios y costos ambientales que intervienen en los planes de aprovechamiento forestal.
2. Calcular dos óptimos técnicos: Máxima producción total y máxima producción media.
3. Determinar dos óptimos económicos: el de Hotelling y de Faustman.
4. Obtener un óptimo ambiental (propuesto por Hartman) para captura de carbono.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1. Descripción del área de estudio.

2.1.1. Localización.

El municipio de Balancán se localiza en la Región Usumacinta, tiene como cabecera municipal a la ciudad de Balancán de Domínguez que se ubica al norte del Estado, entre los paralelos 17° 48' latitud norte y 91° 32' longitud oeste.

Colinda al norte con el Estado de Campeche, al sur con los municipios de Tenosique y Emiliano Zapata; al este con el Estado de Campeche y la república de Guatemala; y al oeste con el municipio de Emiliano Zapata y el estado de Campeche.

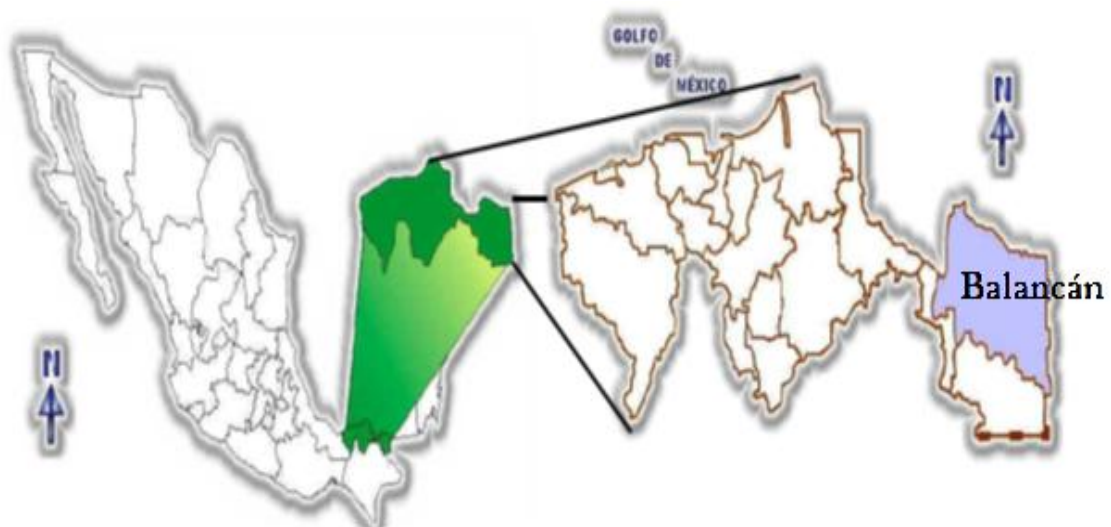


Figura 1. Ubicación de Balancán Tabasco, Méx. (Enciclopedia de los municipios de México, Tabasco.)

2.1.2. Extensión

La extensión territorial del municipio es de 3,626.10 km² (14.81% respecto del total del Estado), ocupa el 2° lugar en la escala de extensión municipal. Su división territorial está conformada por: una ciudad, 2 villas, 6 pueblos, 3 colonias agrícolas y ganaderas, 48 ejidos y 38 rancherías.

En el municipio se ubican 10 centros de desarrollo regional en los que se realizan la mayoría de las actividades económicas y sociales, éstos son: El Triunfo, Quetzalcóatl, San Pedro, Multé, Mactún, El Arenal, El Pípila, Netzahualcóyotl, La Hulería y El Águila. En la zona fronteriza con el municipio de Tenosique y la república de Guatemala se ubica el polo de desarrollo agropecuario denominado: Plan Balancán-Tenosique.

2.2. Plantaciones forestales comerciales

Las plantaciones forestales comerciales son una opción importante para proveer la madera, y los productos y servicios ambientales que demanda la sociedad. México ha mantenido un déficit elevado en la producción de celulosa y papel, lo cual ha generado importaciones frecuentes de estos productos, e importantes pérdidas en la balanza comercial.

En México son varios los intentos por desarrollar las plantaciones forestales con fines comerciales, en la actualidad se habla de plantar 250'000,000 árboles para frenar el deterioro de los suelos forestales y disminuir los efectos del calentamiento global y su efecto en el cambio climático. Las plantaciones tradicionales manejadas a turnos largos, ya no se ajustan a las necesidades actuales de los inversionistas privados, que buscan el mejor rendimiento en el menor tiempo posible. La cantidad y la calidad de los productos

tienen que ver con el origen del material genético, la silvicultura y el manejo que se dé a las plantaciones. Se requiere generar un paquete tecnológico en el que se consideren los aciertos y errores de las experiencias nacionales e internacionales. De ahí el valor de rescatar los resultados de los distintos intentos para hacer de las plantaciones forestales en México un proyecto sustentable.

Se estima que en el mundo existen más de 116 millones de hectáreas de plantaciones forestales comerciales (Arteaga, 2008). De éstas, alrededor de la mitad son de crecimiento medio y bajo, y la otra mitad de crecimiento medio y alto. Asimismo, alrededor del 65% de las plantaciones son de coníferas y el 35% de especies latifoliadas u hojosas. Las principales plantaciones comerciales de coníferas se localizan en Estados Unidos, Brasil, Chile y Nueva Zelanda, y las plantaciones de latifoliadas, principalmente de eucalipto, se ubican en Brasil y Sudáfrica.

Cuadro 1. Productividad de plantaciones comerciales en los principales países tropicales (Brown *et al*, 1997).

Especie	Región	Países	Tiempo de rotación	IMA (m ³ , ha, año)
			(años)	
Eucalipto	América	Brasil	8-10	18-20
		México	--	--
	África	Burundi	8	1-2
		Congo	7	30
		Ruanda	8	8.5
		Sudáfrica	8-10	18-20
Pinos	América	Brasil	16-25	15-25

	Venezuela	10-20	10
	Chile	20-30	24
	México	--	--
	Malawi	20-25	17
África	Madagascar	15-18	6-10
	Mozambique	18-25	11
América	México	--	--
	Bangladesh	60	2.6-3
Teca	Asia	India	70
		indonesia	50-70
			1.3-2

Las plantaciones forestales comerciales han cobrado una enorme importancia para el abastecimiento de materias primas derivadas del bosque. En países altamente diversos como Brasil, China e Indonesia, entre otros, y desde luego en México, hay preocupación reciente por los problemas de la deforestación.

En México hay una pérdida continua de superficies arboladas en bosques tropicales y templados, ocasionando graves daños al suelo por erosión, la pérdida de capacidad productiva de extensas zonas y degradando la calidad del agua. Se estima que la tasa de deforestación en México es de entre 500 y 600 mil hectáreas al año, hasta el año 2000.

Todo esto hace necesario el impulso de las plantaciones forestales comerciales en nuestro país. En la década de los noventa diversos empresarios mexicanos, con negocios en el área agropecuaria, visitan países como Brasil y Chile, con características

agroeconómicas similares a las que existen en el centro y sureste de nuestro país, constatando la existencia de grandes superficies de plantaciones forestales comerciales integradas a centros de transformación industrial y trasladan la idea a México, iniciándose en 1994-1995, en el sureste del país, algunos proyectos pensados inicialmente a gran escala y únicamente destinados a la producción de materias primas para la fabricación de celulosa y papel. Dichas plantaciones forestales se han establecido principalmente en terrenos marginales y no han desplazado al bosque natural como comúnmente se cree. La experiencia mundial muestra que las plantaciones tienden a concentrarse en sitios marginales para el sector agropecuario, ya que los árboles requieren menos nutrientes que los cultivos agrícolas.

En fechas recientes se han iniciado este tipo de proyectos con los cambios al Artículo 27 constitucional, de la Ley Agraria y la nueva Ley Forestal. Son proyectos por más de un millón de hectáreas con diversos grados de desarrollo. Esto significa, que hasta ahora la producción de madera para celulosa en México ha provenido en su totalidad de bosques naturales, no obstante que el establecimiento de plantaciones forestales comerciales de rápido crecimiento tenga grandes ventajas comparativas.

Los proyectos que registran el mayor avance se localizan en el sureste del país, principalmente en los estados de Veracruz, Tabasco y Campeche, y en menor medida en los estados de Chiapas y Puebla, donde se calcula en 35 mil el número de hectáreas plantadas con apoyos del programa PRODEPLAN, además de las establecidas por empresas privadas. Las principales especies plantadas son eucalipto, cedro rojo, melina, teca, caoba, hule y varias especies de pinos, entre las maderables, entre las no

maderables destacan la lechuguilla, orégano, y palma camedor (Arteaga Martínez, 2008).

2.3. Mercado de los productos forestales en México

La superficie de bosques y selvas dentro del territorio nacional colocan a México en la octava posición en extensión forestal a nivel mundial, y en el segundo lugar en Latinoamérica. Hasta el año 2000, México contaba con 857,140 km² de superficie boscosa, es decir, casi el 45% de la superficie total del país. El porcentaje de superficie boscosa en México es mayor que el observado a nivel mundial (ver cuadro 2), y también mayor a la participación de los bosques en los países de la OCDE y los de la Unión Europea (33.8 y 38% respectivamente).

Cuadro 2. Porcentaje del territorio cubierto por superficie boscosa.

	1970	1980	1990	1997	2000
Superficie boscosa	1,023,410	960,310	897,210	869,161	857,140
Porcentaje respecto a la superficie total	53.6	50.3	47.0	45.5	44.9
Porcentaje respecto a la superficie total a nivel mundial	33	33	33	32	30

Fuente: Quinto Informe de Gobierno, 2005.

El cálculo del flujo de la producción de madera en metros cúbicos presenta una limitante: la venta de muebles se mide en piezas y no en metros cúbicos. Por tanto, se excluye la división de muebles, y solamente se contabiliza la parte del sector primario. En este caso, el 75% de la producción nacional se debe a la producción de escuadría. Del resto, el 10% lo aporta la producción de leña, el 9% la producción de durmientes, postes,

pilotes y morillos, y el 6% restante se debe a la producción de tableros. La principal contribución a las exportaciones proviene de la leña, ya que aporta el 57% del volumen de madera exportado. Es decir, el volumen de exportación de leña es más del doble del volumen de madera en escuadría; sin embargo, el valor de la producción de esta leña exportada es solamente el 1% del valor de la producción de escuadría exportada.

El volumen de importación de madera sí depende principalmente de la escuadría. El 91% de las importaciones se debe a la importación de escuadría. Del restante, el 7% lo aporta la importación de tableros. El volumen producido en el ámbito nacional no satisface la demanda por madera, por lo que la mayor parte de la demanda se atiende a través de las importaciones. El consumo aparente de madera es de 20.17 millones de metros cúbicos. De éstos, solamente 5.5 millones se producen y permanecen en el territorio nacional. Los 14.6 millones restantes se importan. En resumen, resalta el hecho de que México es un exportador de leña con pocos beneficios monetarios. La producción nacional y las importaciones se deben principalmente a la escuadría.

2.4 Captura de carbono en sistemas forestales

La captura de carbono es un proceso que tiene su origen en la fotosíntesis. El dióxido de carbono de la atmósfera y el agua, reaccionan para formar carbohidratos y liberar oxígeno, que pasa a la atmósfera. Cuando en una hectárea de terreno deforestada se produce una repoblación se tiene un ejemplo de captura neta de carbono pero cuando el rodal llega al estado de madurez el proceso de captura de carbono se frena y se llega a un estado de equilibrio. Bajo este estado, no existe captura de carbono debido a que la fotosíntesis se equilibra con los procesos de descomposición y respiración del rodal.

El hombre puede actuar para aumentar el potencial de captura de carbono a través de la gestión forestal sostenible. Si se incrementa la masa de material maderable tanto por medio del crecimiento de árboles como por la extracción de madera y la madera extraída se convierte en productos duraderos o se emplea como biocombustible en sustitución de combustibles fósiles, se aumenta el potencial de acumulación del rodal, por lo tanto se realiza una captura neta de carbono.

2.4.1. Flujos y almacenes de carbono en sistemas forestales

Toda la vegetación asimila CO_2 atmosférico, por medio del proceso fotosintético, al formar carbohidratos y ganar volumen. Los árboles en particular, asimilan y almacenan grandes cantidades de carbono durante toda su vida. En la Figura 2 se muestra el diagrama de los flujos y almacenes existentes en un ecosistema forestal.

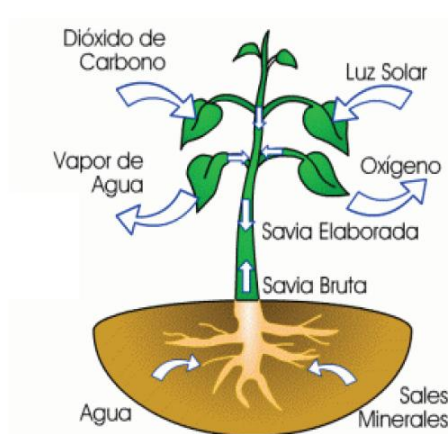


Figura 2. Almacenamiento de CO_2 .

Los bosques y selvas del mundo capturan y conservan más carbono que cualquier otro ecosistema terrestre y participan con el 90% de flujo anual de carbono de la atmósfera y

de la superficie de la tierra. Por ello, la gestión forestal puede compensar las crecientes emisiones de CO₂ en dos formas (Montoya, 2008):

- Al crecer nuevas reservas de dióxido de carbono, incrementando la masa de material maderable tanto por medio del crecimiento de árboles como por la extracción de madera. Para lograr mayor efectividad, la madera extraída deberá convertirse en productos duraderos o emplearla como biocombustible en sustitución de combustibles fósiles. Un bosque maduro generalmente alcanza un balance de equilibrio al igualarse la fijación por fotosíntesis con la respiración. En el largo plazo, el carbono capturado tanto en sistemas forestales como en sistemas agroforestales puede alcanzar entre 80 y 350 tC/ha.
- Protección de los rodales y suelos naturales que almacenan carbono. Cuando se destruye un rodal, entre 50 y 400 tC/ha pueden ser liberadas a la atmósfera. Conservar los almacenes de carbono puede ser un camino válido para mitigar la emisión. En este contexto los procesos de almacenaje son válidos si son de largo plazo. Mientras que la protección de un área forestal puede inducir la presión en otra, se requieren esquemas integrados de gestión de recursos y protección.

Otro factor que influye en la importancia de la fijación de CO₂ a través de los sistemas forestales es que por cada tonelada de carbono absorbido en la biomasa forestal, la cantidad de CO₂ en la atmósfera se reduce en 3.7 toneladas. Esto es debido a la conformación química que tienen los compuestos carbonados de las plantas frente al CO₂ libre en la atmósfera.

Pese al hecho que los sistemas forestales colaboran para alcanzar los objetivos de reducción de los GEI, el papel de los mismos ha sido muy discutido debido a los diferentes intereses políticos de los países miembros de la UNFCCC. En Julio del 2001 se decidió en Bonn incorporar a los Mecanismos de Desarrollo Limpio (MDL) tan sólo los procesos de forestación y reforestación como las únicas actividades del uso de la tierra elegibles para el primer período de compromiso, dejando a un lado todas las actividades relacionadas con la gestión forestal.

2.4.2. La captura de carbono en los sistemas forestales de México

Según un estudio realizado por Sheinbaum y Masera en el año 2000, el potencial de mitigación en México para el año 2010 sería de 393.3 millones de toneladas de CO₂. En dicho estudio, se demuestra que si se gestiona de manera sostenible los recursos forestales de México, se puede llegar a triplicar la cantidad de carbono capturado respecto a las medidas de mitigación energéticas apoyadas por las Naciones Unidas.

En resumen, bajo una adecuada política de apoyo, el sector forestal en México tiene la capacidad de reducir el crecimiento de las emisiones de CO₂ generadas por el sector energético, convirtiéndose en una de las opciones de mitigación más importantes a corto y mediano plazo.

Masera (1995c) estimó que para el año 2030 México tendría un potencial de captura total de carbono dentro de un rango de 2.34 a 3.02 GtC (Gigatoneladas de Carbono) para una superficie de 26.4 Mha (Megahectáreas) en un escenario de política de apoyo, y de 4.18 a 5.12 GtC para una superficie de 39 Mha en un escenario de potencial tecnológico.

Esto significa una captura anual de 67 a 116 MtC al año, que representa la mayor parte o el total de las emisiones actuales del sector energético e industrial de México.

Además hay que sumar que la situación de la deforestación y la degradación de los sistemas forestales en México ha sido muy alarmante en las últimas décadas. La tasa de deforestación no se conoce con precisión pero oscila entre 370 y 670 mil ha/año para principios de los 90, (sólo en bosques templados y selvas). Masera *et al.* (1997) afirman que probablemente la tasa más alta sea la correcta. De acuerdo con esta última estimación, la tasa de deforestación para los bosques templados resulta de 1% y para las selvas de 2% al año (Masera, *et al.*, 1995a). Esto supone que el 25.8% de las emisiones de GEI totales de México provienen del cambio de uso de tierra (Gay y Martínez, 1995). Frenar la deforestación debe ser una prioridad para cumplir con los objetivos de mitigación del Cambio Climático. Según el informe elaborado por el IPCC en 1995 México contribuyen con el 1.45% de las emisiones totales de carbono que se dan anualmente en nuestro planeta.

Las fuerzas que están detrás de los procesos de la deforestación en México son numerosas: incentivos gubernamentales para el desarrollo agrícola, crecimiento de la población, cambios hacia sistemas productivos comerciales, desarrollo de infraestructura, es decir, indefinición de los derechos de propiedad, entre otros (De Jong y Montoya, 1994).

Por último, se puede resaltar el estudio del Instituto Nacional de Ecología, coordinado por Masera, en 2005 donde nos muestra el potencial de captura de carbono en México

desde 1990 hasta 2030 de los Sistemas Forestales. La gestión forestal y las plantaciones energéticas suponen los escenarios que van a generar mayores aumentos.

2.5. Economía de los recursos naturales.

La economía de los recursos naturales y del medio ambiente ha ido ganando terreno dentro de las ciencias económicas, sobre todo por el creciente interés de los países en establecer un manejo más eficiente de los recursos disponibles. Durante los últimos tres decenios las Ciencias Económicas han hecho un aporte al manejo de los recursos naturales y del medio ambiente. Los problemas suscitados en su momento como resultado de políticas de desarrollo que se contraponen a la disponibilidad en el tiempo de los stocks de recursos naturales o de actividades humanas que generan efectos externos contraproducentes al ambiente circundante, han sido los detonantes dentro de la economía de la búsqueda de métodos que conlleven a un balance entre la actividad económica y su entorno.

2.5.1 Evolución del pensamiento económico

Uno de los primeros economistas preocupados por el problema de los recursos naturales fue *Thomas Malthus* (1766-1834), quien fue clasificado como el más “ecológico” de los economistas clásicos. Estableció que la producción de alimentos sustenta a la población (no la manufactura, no el comercio), y que la escasez de tierras útiles limita el crecimiento de la población y el nivel de vida alcanzable. A su vez consideraba que los límites de los recursos a nivel planetario hacen que la capacidad de crecimiento de la producción alimentaria resulte inferior al crecimiento de la población. *David Ricardo* (1772-1823) fue otro economista clásico, con una visión pesimista sobre el papel de los

recursos naturales. Al igual que Malthus consideraba que el aumento de la población trae como consecuencia mayor escasez de tierras y aumento del pago de la renta de la tierra, trayendo como consecuencia la reducción del crecimiento económico y destrucción de los recursos naturales. *John Stuart Mill* (1806-1873) postuló que los avances tecnológicos hacen más rentables la explotación de tierras (o recursos) de menor calidad, haciendo el crecimiento económico sostenible durante más tiempo hasta llegar a un *steady state*, y uno de los primeros pasos es la conservación de capital natural como una forma de ahorro de recursos, Mill fue visto con más optimismo que sus predecesores.

En su trabajo *William Stanley Jevons* (1835-1882) “Theory of Political Economy” y junto con *Walras* y *Menger*, introduce el principio de marginalismo o equimarginalidad: asignación de recursos (sin fallos de mercado) en un marco estático, Jevons también reconoce la importancia de los recursos energéticos y su rápido agotamiento, tal es el caso del agotamiento del carbón, el cual predice en su trabajo “The Coal Question” y más tarde vislumbraría el fin del desarrollo industrial inglés. *Arthur Cecil Pigou* (1877-1959) en su libro “La economía del Bienestar 1920” sienta algunas bases para los problemas de la contaminación y se da cuenta que son efectos externos, y no están incluidos en los precios de mercado; la solución propuesta fue la intervencionista, mediante impuestos para internalizar los efectos del proceso de producción, e incorporarlos en el sistema de mercado. Un caso similar al de Pigou es el de *Harold Hotelling* (1895-1973) quien en su artículo “The Economics of Exhaustible Resources 1931”, hace uso del principio de equimarginalidad de Jevons, y establece un principio

básico denominado “regla de Hotelling” que indica cuándo debe extraerse un recurso no renovable, mostrando asimismo el sentido de optimalidad.

Es de destacar, que el análisis económico del turno forestal no fue en principio abordado por economistas sino por investigadores forestales. La primera formulación del problema se le atribuye a los forestales alemanes *Faustman* (1849) y *Pressler* (1860) y, más tarde, el problema fue abordado por economistas como *Ohlin* (1921), *Hotelling* (1925), *Fisher* (1930) y *Boulding* (1935), y uno de los enfoques más recientes es el expuesto por *Hartman* (1976), quien hace una modificación al modelo de Faustman e incorpora aspectos ambientales y ecológicos (Romero, 1997).

2.5.2. Óptimo de Pareto

En 1986, el ingeniero y economista Vilfredo Pareto introdujo un concepto de optimalidad que ha recibido su nombre, y que es crucial para el análisis económico.

Pareto considera que un cambio es socialmente deseable si mejora el bienestar de todos los miembros de la sociedad, o al menos mejora el bienestar de algunos miembros, no empeorando el bienestar de ninguno.

Definición 1. (Eficiencia en el sentido de Pareto (Varian, 1992)) Una asignación viable X es **débilmente eficiente en el sentido de Pareto** si no existe ninguna asignación viable X' tal que todos los agentes la prefieran estrictamente a la asignación X . Una asignación viable X es **fuertemente eficiente en el sentido de Pareto** si no existe ninguna asignación viable X' tal que todos los agentes la prefieran débilmente a la asignación X y alguno la prefiera estrictamente a la X .

$$\underset{x_1, x_2}{Máx} u_1(X_1)$$

$$s. a.: u_2(X_2) \geq \bar{u}_2$$

$$X_1 + X_2 = W_1 + W_2$$

Definición 2. (Equilibrio Walrasiano (Varian, 1992)) Un par de vectores de asignaciones y precios (X, P) es un equilibrio Walrasiano si (1) la asignación es viable y (2) cada uno de los agentes elige el punto óptimo de su conjunto presupuestario.

$$1) \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n w_i$$

$$2) \text{ si el agente } i \text{ prefiere } x'_i \text{ a } x_i, \text{ entonces } Px'_i > Pw_i.$$

Cuando la posibilidad de realizar una mejora paretiana se haya agotado, el resultado será una asignación de bienes que no puede ser alterada sin empeorar el bienestar de algún miembro de la sociedad. Tal tipo de asignación se denomina eficiente u óptima según Pareto (Randall, 1985; Romero, 1997).

Para el análisis económico es especialmente importante, la relación existente entre el equilibrio de un mercado competitivo y la asignación de recursos que define dicho equilibrio. Se demuestra que bajo ciertos supuestos, un equilibrio de mercado implica la condición de un óptimo de Pareto; es decir, la asignación de recursos que subyace a dicho equilibrio es paretianamente eficiente. El recíproco también es cierto; es decir, bajo ciertos supuestos las asignaciones paretianas corresponden a equilibrios de mercado.

La crítica que se hace a los equilibrios de mercado eficientes se basa en que muchas de las condiciones necesarias para garantizar no sólo la eficiencia, sino la propia existencia

de un equilibrio no se cumplen en la práctica. Cuando alguna de esas condiciones no se satisface, se dice que se produce un fallo de mercado, que hace que la solución competitiva no sea eficiente (Randall, 1985).

2.5.3. Principio de equimarginalidad

Para comprender el principio de equimarginalidad de Jevons, se supone que un agente económico posee una cantidad X de un determinado recurso. El recurso en cuestión puede dedicarse a dos actividades o usos distintos. Representando la cantidad del recurso destinada a cada uno de los dos usos por x_1 y x_2 , respectivamente, se tiene que:

$$X = x_1 + x_2 \quad (1)$$

La pregunta que plantea Jevons es la siguiente: ¿Cómo decide el agente económico asignar las X unidades de recursos entre los dos usos alternativos?, o dicho de otra forma ¿Qué valores tomarán las variables x_1 y x_2 para que el individuo maximice su utilidad? En el lenguaje de Jevons, la asignación óptima se considera cuando la utilidad marginal del primer uso se iguala a la utilidad marginal del segundo uso; es decir, el punto de equimarginalidad implica la maximización de la utilidad. Representado por $U(X)$ la utilidad que le reporta al agente económico poseer X unidades del recurso, se tiene:

$$U(X) = U(x_1) + U(x_2) \quad (2)$$

Para asignar de una manera óptima las X unidades del recurso entre los usos x_1 y x_2 , se tiene que maximizar la función de utilidad dada por (2) sujeta al cumplimiento de la condición $X = x_1 + x_2$. Mediante el uso de Lagrangeanos, se llega a la siguiente condición de equilibrio.

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_2} \quad (3)$$

Es decir, cuando la utilidad marginal del primer uso, iguale a la utilidad marginal del segundo uso. El principio de equimarginalidad de Jevons constituye el núcleo no sólo de la economía de los recursos, sino de toda la economía de corte neoclásico.

2.6 Optimización

Optimización es cualquier proceso genérico por el cual se produce la mejor solución a un problema. La definición más simple de economía: “la asignación óptima de recursos escasos”, establece una clara relación entre Optimización y Economía.

2.6.1. Conceptos básicos

En la teoría de la optimización se estudian los métodos y técnicas que permiten determinar los óptimos (máximos y mínimos) de un programa de optimización (PO) (Barrios, *et al.*, 2005)

En optimización podemos distinguir básicamente dos componentes del PO.

1. La **función objetivo** f , que representa el criterio a optimizar.
2. El **conjunto factible** F , conjunto de puntos del dominio de f que verifican las restricciones del programa.

De tal forma que, la formulación del PO genérico es el siguiente:

$$Opt f(x)$$

$$s.a.: X \in F$$

El objetivo central de un programa de optimización es determinar los valores de X que optimizan el valor de la función objetivo. Dichos valores constituyen los óptimos del programa y se denotan como:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

Una ***bola abierta*** o ***entorno abierto*** de centro en “ a ” y radio “ r ”, incluye todos los puntos interiores de la bola (entorno), excepto los puntos frontera, es decir:

$$B(a, r) = \{X \in \mathbb{R}^n | d(x, a) < r\}$$

Dentro del PO, se distinguen dos tipos de óptimos: los relativos o locales y los absolutos o globales.

1) Óptimos Locales.

- a) X^* es el máximo local si su imagen es mayor o igual que las imágenes de su entorno

$$\exists r > 0, \forall B(x^*, r), f(x^*) \geq f(x)$$

- b) X^* es el mínimo local si su imagen es menor o igual que las imágenes de su entorno, es decir:

$$\exists r > 0, \forall B(x^*, r), f(x^*) \leq f(x)$$

2) Óptimos absolutos.

- a) X^* es el máximo global si su imagen es mayor o igual que la imagen de cualquier punto del conjunto factible, es decir:

$$\forall x \in F, f(x^*) \geq f(x)$$

- b) X^* es el mínimo global si su imagen es menor o igual que la imagen de cualquier punto del conjunto factible, es decir:

$$\forall x \in F, f(x^*) \leq f(x)$$

El Teorema de Weierstrass proporciona una condición suficiente para la existencia de óptimos. Este teorema establece que, dado el programa de optimización:

$$Opt f(x)$$

$$s. a. : X \in F$$

Si se cumple las dos hipótesis siguientes:

- F es un conjunto compacto no vacío.
- f es continua en F ,

Entonces el programa tendrá máximo y mínimo globales.

Un conjunto “ S ” es compacto si es cerrado (incluyendo los puntos fronteras) y acotado (si una bola abierta contiene totalmente a S).

El **Teorema local-global** proporciona una condición suficiente para que un óptimo local también sea global. Este teorema establece que, dado el programa:

$$Opt f(x)$$

$$s. a. : X \in F$$

Si se cumplen las dos hipótesis siguientes.

- F es un conjunto convexo

- f es continua en F ,

Y la función es cóncava (convexa) en F , entonces todo máximo (mínimo) local también es máximo global.

Definición de conjunto convexo y cóncavo.

- **convexo:** Un conjunto F es convexo si:

$$\forall x_1, x_2 \in F \text{ y } \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F$$

- **Cóncavo:** Una función f es cóncava si:

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

2.6.2. Optimización estática

La optimización estática está referida a programas de optimización en los cuales no se considera el tiempo como una variable explicativa. En función de los métodos de solución, se distinguen tres tipos de programas de optimización estática: los programas sin restricciones, los programas con restricciones de igualdad y los programas con restricciones de desigualdad.

2.6.2.1. Programas sin restricciones

En esta variante, el programa de optimización tiene la forma siguiente:

$$\text{Opt } f(x)$$

$$\text{s. a. : } X \in F$$

Donde f y sus derivadas primeras y segundas son continuas y el dominio de f coincide con el conjunto factible.

- **Condición necesaria de óptimo local.** Para que $x_0 \in F$ sea un óptimo local del programa planteado es necesario que el gradiente de la función objetivo en dicho punto sea igual al vector nulo

$$\nabla f(x_0) = [f(x_0), f(x_0), \dots, f(x_0)] = [0, 0, \dots, 0]$$

Todos los puntos que cumplen la condición necesaria (anulan el vector gradiente) se denominan “puntos críticos”.

- **Condición suficiente de óptimo local.** Sea x_0 un punto crítico, es decir, en x_0 se cumple $\nabla f(x_0) = 0$, la condición suficiente establece los criterios que permiten determinar la naturaleza de los puntos críticos
 - Si $Hf(x_0)$ es definida positiva, entonces x_0 es un mínimo local
 - Si $Hf(x_0)$ es definida negativa, entonces x_0 es un máximo local
 - Si $Hf(x_0)$ es indefinida, entonces x_0 es un punto de silla
 - Si $Hf(x_0)$ es semidefinida, entonces el carácter de x_0 es indeterminado,

Donde, H es la matriz Hessiana o matriz de derivadas segundas de f .

La forma más directa para determinar la naturaleza de H es a través del cálculo de sus valores propios (VAPS) (eigenvalores)

- Si todos los VAPS son positivos, entonces H es definida positiva
- Si todos los VAPS son negativos, entonces H es definida negativa
- Si todos los VAPS son positivos y nulos, entonces H es semidefinida positiva
- Si todos los VAPS son negativos y nulos, entonces H es semidefinida negativa.

- En cualquier otro caso será indefinida.

Las etapas que implica la determinación de un turno óptimo, en un programa sin restricciones se muestra en la secuencia siguiente:

1) Caracterización del programa

$$Opt f(x)$$

$$s. a. : X \in F$$

2) Obtención de puntos críticos

$$\nabla f(x_0) = 0$$

(Aplicación de la condición necesaria)

3) Naturaleza de los puntos críticos

$$Hf(x_0) \begin{cases} Definida \begin{cases} + \rightarrow \text{Mínimo local} \\ - \rightarrow \text{Mínimo local} \end{cases} \\ Indefinida \rightarrow \text{Punto de silla} \\ Semidefinida (+/-) \rightarrow \text{Indeterminación} \end{cases}$$

(Aplicación de la condición suficiente)

Si el programa es convexo, es decir, el conjunto factible F es convexo y la función objetivo f es cóncava (convexa) en F , entonces la condición necesaria también es suficiente y los óptimos así obtenidos son óptimos globales.

El tipo de óptimo depende de la naturaleza de la función f :

- Si f es cóncava, entonces x_0 es máximo global
- Si f es convexa, entonces x_0 es mínimo global.

2.6.2.2. *Programas con restricciones de igualdad*

Este tipo de programas son de la forma:

$$\begin{aligned} & \text{Opt } f(x) \\ & \text{s. a. : } g_i(X) = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Y se asume que el número de restricciones es menor al número de variables en la función objetivo y que las restricciones son independientes entre sí, es decir, que el rango de su matriz Jacobiana es m .

Aunque en algunos casos es posible resolver el programa despejando en las restricciones $(n-1)$ variables y sustituyendo en f , el método de carácter general más usado es el denominado “método de Lagrange”, que se muestra en la secuencia siguiente.

1) **Caracterización del problema**

$$\begin{aligned} & \text{Opt } f(x) \\ & \text{s. a. : } g_i(X) = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

2) **Obtención de los puntos críticos**

$$\nabla L(X, \lambda)$$

(Aplicación de la condición necesaria)

3) **Condición suficiente de óptimo**

$$\hat{H}f(x_0) \begin{cases} \text{Semidefinida} - \\ \text{Indefinida } (+/-) \begin{cases} + \rightarrow \text{Mín. restringido} \\ - \rightarrow \text{Máx. restringido} \end{cases} \\ \text{Indefinición} \rightarrow \text{Punto de silla} \end{cases}$$

(Aplicación de la condición suficiente)

Donde, $\hat{H}$ es la matriz Hessiana orlada con la derivada primera de las restricciones.

De nuevo, si el programa es convexo, es decir, el conjunto factible F es convexo y la función objetivo f es cóncava (convexa) en F , además de continua, entonces la condición necesaria también es suficiente y los óptimos así obtenidos son óptimos globales.

El tipo de óptimo depende de la naturaleza de la función f .

- Si f es cóncava, entonces x_0 es máximo global
- Si f es convexa, entonces x_0 es mínimo global

Interpretación de los λ_i : El multiplicador de Lagrange asociado a la i -ésima restricción λ_i se interpreta como la tasa de variación del valor óptimo de la función “ f ” con respecto a su constante b_i ,

$$\lambda_i = \frac{df^*}{db_i}$$

También se puede interpretar como la variación aproximada del valor óptimo de la función f ante un incremento unitario de b_i ,

2.6.2.3. Programas con restricciones de desigualdad

Este tipo de programas es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Opt } f(x) \\ & \text{s. a. : } g_i(X) \leq b_i, \forall i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Se dice que un programa está normalizado cuando todas sus restricciones son de tipo menor o igual para maximización, o del tipo mayor o igual para minimización. Se dice

que una restricción está saturada en un punto si en tal punto la restricción se verifica en términos de igualdad.

El teorema de Kuhn-Tucker establece las condiciones necesarias para un óptimo local en programas con restricciones de desigualdad.

Hipótesis previas del teorema.

- Tanto la función objetivo f como las restricciones g_i son funciones definidas y diferenciables en la región factible.
- X^* es un punto regular, es decir, es un punto que no satura ninguna de las restricciones.
- La función Lagrangeana asociada al problema es:

$$L(X, \lambda) = f(X) - \sum_{i=1}^m g_i(x)$$

Teorema 1. (Kuhn-Tucker) Dado un programa de maximización normalizado

$$\begin{aligned} & \text{Opt } f(x) \\ & \text{s. a. : } g_i(X), \forall i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Si X^* es máximo local, entonces existe λ , tal que:

$$\begin{cases} (I) \nabla f(x^*) = \lambda \nabla g_i(x^*) \\ (II) \lambda g_i(x^*) = 0 \\ (III) g_i(x^*) \leq 0; \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Para el caso de un programa de minimización normalizado, solo cambia el sentido de las restricciones.

Las condiciones (II), conocida como el principio de holgura complementaria implican, que si el multiplicador de Kuhn-Tucker en la restricción i es $\neq 0$, entonces tal restricción está saturada, y su interpretación es equivalente a la que se ha dado para los multiplicadores de Lagrange.

Una vez más, si el programa es convexo, es decir, el conjunto factible F es convexo y la función objetivo f es cóncava (convexa) en F , además de continua, entonces la condición necesaria también es suficiente y los óptimos así obtenidos son óptimos globales.

El tipo de óptimo depende de la naturaleza de la función f

- Si f es cóncava, entonces X^* es máximo global,
- Si f es convexa, entonces X^* es mínimo global.

2.6.3. Optimización dinámica

En optimización dinámica se estudia la manera de controlar (guiar) un sistema que evoluciona en el tiempo, de tal forma que su desempeño sea óptimo, en un horizonte temporal dado, de acuerdo a un objetivo específico. El horizonte temporal puede ser finito (acotado) o infinito y la variable tiempo puede tomar valores continuos o discretos (Cerdá, 2001).

2.6.3.1. Control óptimo en tiempo continuo

El problema básico (PB) de control óptimo en tiempo continuo y horizonte finito es el siguiente:

Dado un sistema dinámico, con $x(t_0) = x_0$, que evoluciona en el tiempo de acuerdo a la ecuación de estado (movimiento) $\dot{x} = f(x, u, t)$, se trata de encontrar el vector de control $u(t)$ que maximice la funcional “ J ”. Expresado matemáticamente es:

$$\text{Máx}_u J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt + S[x(t_1)]$$

$$s. a.: \dot{x} = f(x, u, t)$$

$$con: x(t_0) = x_0$$

El vector $u^*(t)$ que resuelve el problema, es la trayectoria de control óptima y el vector $x^*(t)$, determinado por la ecuación de estado a partir de $u^*(t)$, es la trayectoria de estado óptima.

El principio del máximo de Pontryagin, establece condiciones necesarias de optimalidad que debe cumplir el control óptimo del *PB*.

La “Hamiltoniana” asociada al problema anterior se define de la siguiente manera:

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda f(x, u, t)$$

Donde, para cada $t \in [t_0, t_1]$, $\lambda(t)$, es un vector n -dimensional, llamado vector de variables adjuntas o de coestado. Es decir, la Hamiltoniana es una función

$$f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

El teorema que se enuncia a continuación, constituye la proposición fundamental de la teoría de control óptimo:

Teorema 2. Principio del máximo de Pontryagin (PMP)) Si $u(t)$ y $x^*(t)$ resuelven el PB de control óptimo, entonces existe $\lambda^*(t)$, tal que, la Hamiltoniana tiene un máximo en $u^*(t)$, es decir:

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \geq H(x^*, u, \lambda^*, t), \forall t \in [t_0, t_1]$$

Adicionalmente, $x^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ resuelven el sistema dinámico

$$\dot{\lambda}^* = -H_x$$

$$\dot{x}^* = H_\lambda = f$$

Con la condición inicial $x^*(t_0) = x_0$

Y la condición de transversalidad $\lambda^*(t_1) = S_x[x^*(t_1)]$

Los elementos implicados en el teorema anterior, se pueden reagrupar en las tres condiciones siguientes:

- $\dot{\lambda}^* = -H_x$ con $\lambda^*(t) = S_x[x^*(t_1)]$
- $H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \geq H(x^*, u, \lambda^*, t)$
- $\dot{x}^* = H_\lambda = f$, con $x^*(t_0) = x_0$

El nombre de “principio del máximo de Pontryagin¹” deriva del hecho de que, una de las condiciones para optimizar la función objetivo es maximizar la Hamiltoniana.

Además, todo óptimo ha de cumplir una condición necesaria adicional, “la condición de Legendre”, conocida como la condición de 2º orden.

¹ Si se trata de minimizar J , solo cambiaría el sentido de la segunda condición.

- Si J tiene un máximo, entonces $H_{uu} \leq 0$
- Si J tiene un mínimo, entonces $H_{uu} \geq 0$

Como es habitual en la teoría de la optimización, en las condiciones suficientes se exige algún tipo de concavidad para las funciones que define el PB . A continuación se enuncia el teorema que establece las condiciones suficientes de Mangasarian.

Teorema 3. (Mangasarian) Sean $x^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$, los resultados que se obtienen al aplicar el PMP al PB , $\forall t \in [t_0, t_1]$, si se verifica que

- a) F y f son cóncavas en x , u , $\forall t \in [t_0, t_1]$
- b) S es cóncava en x
- c) $\lambda^*(t) \geq 0$, $\forall t \in [t_0, t_1]$, si f es no lineal en x , u ,

Entonces, $u^*(t)$ es la trayectoria de control óptimo del problema, $x^*(t)$ es la trayectoria de estado óptima y $\lambda^*(t)$, es la trayectoria de coestado óptima.

2.6.3.1. Control óptimo en tiempo discreto

En el control óptimo en tiempo discreto se aborda el estudio de sistemas que evolucionan en el tiempo de manera discontinua. Se trata de un procedimiento sistemático que permite optimizar una serie de decisiones interrelacionadas. El método de resolución es conocido como “programación dinámica de Bellman” en honor al norteamericano Richard Bellman, quien lo publicó en 1957.

En esencia, el método consiste en resolver un problema de “ N ” etapas, mediante la resolución de “ N ” problemas de una etapa.

Por tanto, el problema básico (*PB*) de control óptimo (*CO*) en tiempo discreto es el siguiente:

Dado un sistema dinámico con condición inicial x_0 , que evoluciona en el tiempo de acuerdo a la ecuación de estado $x(k+1) = f[x(k), u(k), k]$, se trata de encontrar, para cada “ k ”, un vector de control admisible que maximice la funcional objetivo. Expresado matemáticamente es:

$$\underset{u(k)}{\text{Máx}} J = \sum_{k=0}^{N-1} F[x(k), u(k), k] + S[x(N)]$$

$$\text{s. a.: } x(k+1) = f[x(k), u(k), k], \forall k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{con: } x(0) = x_0$$

$$u(k) \in \Omega(k)$$

El vector $u^* = [u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-2), u^*(N-1)]$, que resuelve el problema de *CO*, es la secuencia de control óptimo, y el vector $x^* = [x^*(0), x^*(1), \dots, x^*(N-1), x^*(N)]$, determinado por la ecuación de estado a partir de u^* y de $x(0)$, es la trayectoria de estado óptima o camino óptimo.

En la proposición siguiente, se presenta el método de programación dinámica que permite obtener la solución óptima del problema de control óptimo en tiempo discreto.

Proposición 1. Si $J^*(x_0)$ es el valor óptimo de la funcional objetivo del problema de *CO* en tiempo discreto, entonces:

$$J_N^* = J_0^*(x_0), \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$$

En donde la función J_0^* queda determinada por el último paso del proceso de solución, que empieza al final del horizonte temporal y avanza hacia atrás hasta el principio, de acuerdo al algoritmo siguiente:

$$J_N^*\{x(N)\} = S[x(N)]$$

Y para cada $k \in \{N - 1, N - 2, \dots, 1, 0\}$

$$J_k^* = \max_{u(k)} \left\{ F[x(k), u(k), k] + J_{k+1}^*\{f[x(k), u(k), k]\} \right\}$$

Que son las ecuaciones de Bellman del problema planteado.

Además, si $u^*(k)$ maximiza el lado derecho de la ecuación de Bellman, para cada $k \in \{N - 1, N - 2, \dots, 1, 0\}$, entonces el vector

$$u^* = [u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N - 1)]$$

Es la secuencia de control del problema planteado.

La programación dinámica se apoya en el “principio de optimalidad de Bellman (POB)”, que se expresa de la siguiente manera:

Proposición 2. (POB) Supóngase que $u^* = [u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N - 2), u^*(N - 1)]$ es la secuencia de control óptimo y $x^* = [x^*(0), x^*(1), \dots, x^*(N - 1), x^*(N)]$ es la trayectoria de estado óptima del problema planteado. Considérese el subproblema planteado

$$\max_{u(k)} J = \sum_{k=j}^{N-1} F[x(k), u(k), k] + S[x(N)]$$

$$s.a.: x(k+1) = f[x(k), u(k), k], \forall k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$con: x(j) = x^*(j)$$

$$u(k) \in \Omega(k), \forall k = j, j+1, \dots, N-1$$

Es decir, el subproblema para el cual se deben encontrar los controles óptimos en las etapas $j+1$ a $N-1$, partiendo de la condición inicial $x^*(j)$, en la etapa $j+1$. La secuencia de control óptima de este subproblema es $[u^*(j), u^*(j+1), \dots, u^*(N-2), u^*(N-1)]$ es decir, una secuencia truncada de u^* .

La función $J_j^*\{x(j)\}$ que proporciona el valor óptimo de la funcional objetivo del problema truncado, en función del estado inicial $x(j)$, se llama “función valor”. En el POB se afirma que, una trayectoria óptima tiene la propiedad de que, cualquiera que sea el estado y la decisión inicial, las decisiones restantes constituyen también una trayectoria óptima con respecto al estado que surge de la primera decisión.

2.7. Óptimos forestales

En el ámbito forestal, los especialistas se enfrentan a un problema específico, el cual consiste en determinar el momento óptimo de corta de un árbol, plantación o masa forestal. Dicho ciclo es conocido con el nombre de turno forestal óptimo, óptimo forestal, turnicidad forestal, etc. El problema puede ser abordado desde tres enfoques complementarios: el técnico, el económico y el ambiental.

2.7.1. Óptimos técnicos

El enfoque técnico del turno forestal, representa un análisis relativamente sencillo, debido a su poca complejidad para la manipulación de la función de producción. Este

enfoque no es considerado económico, ya que no contiene aspectos como: costos, precios y tasas de interés. Sin embargo, es de suma importancia para poder comprender algunos conceptos y métodos de análisis, y para estudiar el crecimiento o producción de las masas forestales.

2.7.1.1. Máxima producción total

La máxima producción total, su ubica en el punto máximo de la función de producción, de tal forma que el óptimo se localiza donde la producción marginal es igual a cero, como se muestra a continuación.

Se parte de una función de producción o crecimiento cualesquiera, expresada de la siguiente forma:

$$q = f(t) \tag{4}$$

Donde “ q ” representa el volumen de la masa forestal a nivel dendrométrico (m^3/ha), y “ t ” la edad. La evidencia empírica muestra que el comportamiento de esta función, tiene una forma parecida a la de la curva de la Figura 3 con las siguientes propiedades:

- $f'(t) > 0 \forall t \in (0,1)$. La función de producción es creciente, y alcanza un máximo en t_i , el máximo técnico. Es decir, siempre hay incrementos.
- $f''(t) < 0 \forall t \in (0,1)$. La función de producción es cóncava a partir de t_i , el punto de inflexión. Es decir, los incrementos son decrecientes.

Un criterio importante a considerar es el tiempo (t_i) en el que la producción total es máxima, lo cual ocurre cuando la producción marginal es igual a cero, es decir, cuando

$f'(t) = 0$. Después de este punto, inicia de manera natural la decrepitud del árbol o de la masa forestal; el punto representa el óptimo biológico.

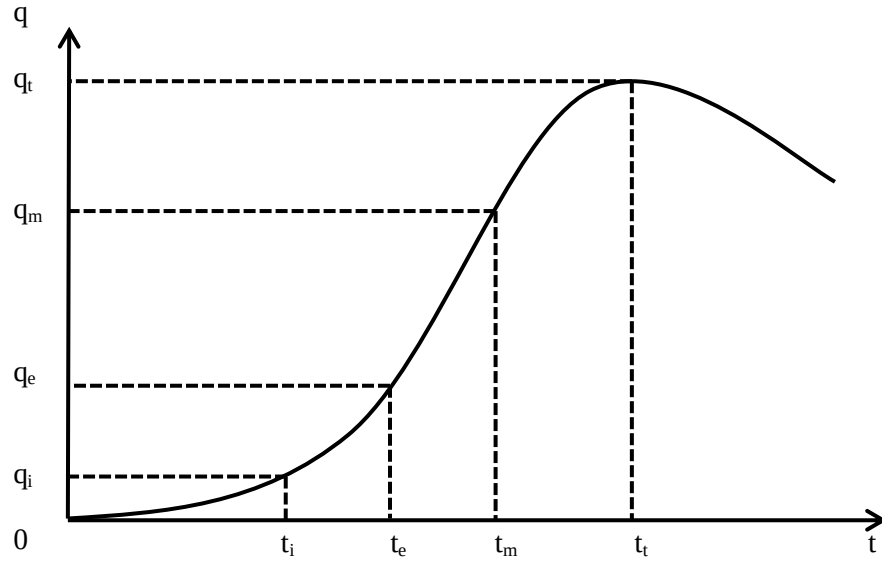


Figura 3. Curva de crecimiento o función de producción.

2.7.1.2 Máxima producción media

El momento de corta que aprovecha al máximo la tecnología que subyace a la función de producción, es aquel en el que la producción media se hace máxima.

A partir de la ecuación (4), se obtiene la producción media, dividiéndola entre t .

$$\bar{q} = \frac{f(t)}{t} \quad (5)$$

Derivando (5) con respecto a t .

$$\frac{d}{dt}(\bar{q}) = \frac{tf'(t) - f(t)}{t^2}$$

Igualando a cero la ecuación anterior y desajando, se llega a la condición de equilibrio.

$$f'(t) = \frac{f(t)}{t} = \bar{q} \quad (6)$$

Es decir, el turno de máxima producción media se alcanza cuando la producción marginal es igual a la producción media, como se muestra en la Figura 4. En las ciencias forestales, al turno de máxima producción media se le conoce como turno de máxima renta en especie o rendimiento máximo sostenible y en lo sucesivo será denominado como óptimo técnico.

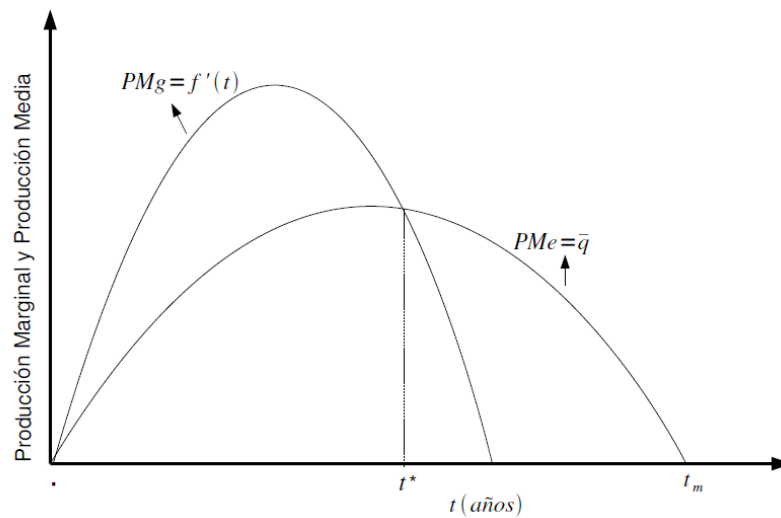


Figura 4. Curvas de producción marginal y producción media.

2.7.2 Óptimos económicos

El óptimo económico es un concepto esencial en la economía forestal, debido a que incorpora aspectos de tipo económico, tales como: costos, precios, tasa de interés, etc. En consideración a su importancia teórica y práctica, se analizarán sólo dos turnos económicos: la formulación de Hotelling y la aproximación de Faustman.

2.7.2.1 Óptimo de Hotelling

El procedimiento sugerido por Hotelling consiste en maximizar el Valor Actual Neto (VAN) de la inversión. Es decir, en el turno óptimo t^* , se maximiza la expresión siguiente:

$$\text{Máx } VAN = pf(t)e^{-it} - K \quad (7)$$

Donde “ p ” es el precio de la madera, “ i ” es el tipo de descuento y “ K ” el costo de la plantación. Derivando la ecuación (7) con respecto a “ t ” e igualando a cero, se obtienen la condición de primer orden para un máximo.

$$\frac{d}{dt}(VAN) = pf'(t)e^{-it} - ipf(t)e^{-it} = f'(t) - if(t) = 0$$

Despejando, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio.

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = i \quad (8)$$

La condición de segundo orden para máximo exige que la segunda derivada sea negativa.

$$\frac{d^2(VAN)}{dt^2} = f''(t) - if'(t) < 0$$

Para que esto ocurra, basta que se cumplan los supuestos de la función de producción. Es decir, que $f'(t) > 0$ y $f''(t) < 0$, puesto que, tanto “ p ” como “ i ” son positivos.

La condición de equilibrio (8) implica, que si el rendimiento de una unidad monetaria invertida en la producción de madera es igual al rendimiento otorgado por un banco,

resulta indiferente cortar o no cortar. En cambio, si el valor de la madera supera al tipo de descuento, conviene esperar y en caso contrario se debe cortar.

La racionalidad de tales decisiones es la siguiente:

- 1) Si no se corta, al cabo de un año, el stock de riqueza aumentará en términos monetarios, y es expresado de la siguiente forma:

$$pf(t) + pf'(t) = p[f(t) + f'(t)]$$

- 2) Si se corta, al final del año, el stock de riqueza considerará en la suma del valor de la madera al inicio del año más los intereses generados por dicho valor.

$$pf(t) + ipf(t) = (1 + i)pf(t)$$

Igualando ambos stocks de riqueza se llega de nuevo a la condición de equilibrio (8) la cual implica que el valor marginal de no cortar $[pf'(t)]$ es igual al costo marginal de no cortar o valor financiero de la madera $[ipf(t)]$. Mediante la solución de Hotelling, se alcanza el máximo rendimiento financiero.

De las ecuaciones (6) y (8) se deduce, que el turno técnico y el de Hotelling, coinciden cuando:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = i = \frac{1}{t}$$

Es decir, ambos turnos coinciden cuando el tipo de descuento es igual al inverso del turno técnico. En cambio, si $i > \frac{1}{t}$ el turno técnico es mayor que el de Hotelling, y si $i < \frac{1}{t}$ ocurre lo contrario.

Si el precio de la madera no es constante (varia en el tiempo), la ecuación básica (7) se convierte en:

$$Máx VAN = p(t)f(t)e^{-it} - K$$

Cuya condición de equilibrio es:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{p'(t)}{p(t)} = i$$

Recapitulando, el turno de Hotelling implica que si el valor de la producción marginal de un rodal es menor que la tasa de interés se debe cortar y si ocurre lo contrario no debe cortarse. Sin embargo, aunque esta lógica es intuitivamente correcta resulta insuficiente, porque no se considera el costo de oportunidad del uso del suelo (la renta de la tierra).

2.7.2.2 Óptimo de Faustman.

Existen dos planteamientos análogos para incluir en el análisis del turno económico, el costo de oportunidad del uso del suelo. El planteamiento de Samuelson incluye la renta de la tierra en la expresión que mide el VAN. De esta manera, la expresión (7) se convierte en:

$$Máx VAN = pf(t)e^{-it} - K - R \int_0^t e^{-it} dt \quad (9)$$

Derivando, haciendo operaciones e igualando a cero la expresión anterior, se llega a:

$$\frac{d VAN}{dt} = pf'(t) - ipf(t) - R = 0$$

La condición de equilibrio anterior, puede expresarse como sigue:

$$pf'(t) = i[pf(t)] + R \quad (10)$$

Y el planteamiento de Faustman que consiste en maximizar los ingresos netos descontados que corresponden a una serie infinita de ciclos de corta. Lo cual equivale al valor esperado del suelo (Daly y Farley, 2003).

Si dicho ingreso se representa por W , se tiene:

$$\text{Máx } W = [pf(t)e^{-it} - K][1 + e^{-it} + e^{-2it} + e^{-3it} + \dots]$$

Sumando los términos de la sucesión geométrica y simplificando, se obtiene la denominada fórmula de Faustman.

$$\text{Máx } W = \frac{pf(t)e^{-it} - K}{1 - e^{-it}} \quad (11)$$

Derivando (11) con respecto a t .

$$\frac{d}{dt}(t) = \frac{(1 - e^{-it})[pf'(t)e^{-it} - ipf(t)e^{-it}] - [pf(t)e^{-it} - K]ie^{-it}}{(1 - e^{-it})^2}$$

Igualando a cero y reordenando, se llega a la condición de equilibrio.

$$pf'(t) = ipf(t) + i \left[\frac{pf(t)e^{-it} - K}{1 - e^{-it}} \right]$$

Es decir,

$$pf'(t) = ipf(t) + iW = i[pf(t) + W] \quad (12)$$

El enfoque de Samuelson, explicitando la renta de la tierra, o el de Faustman, considerando una cadena infinita de ciclos de corta, conducen a la misma solución.

La condición de equilibrio (12) se puede interpretar de la manera siguiente: interesa cortar una masa forestal cuando el valor de la producción marginal de dicha masa iguala al tipo de interés, multiplicado por la suma del valor del vuelo (la masa forestal) y del suelo. Es decir, el término de la izquierda mide lo que se gana por suspender la corta (valor marginal de no cortar), mientras que el término de la derecha mide lo que se pierde por posponer tal corta (costo marginal de no cortar).

De (12) se obtiene.

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = i + \frac{iW}{pf(t)}$$

Y, como la renta del suelo equivale a su valor esperado por el tipo de interés, $R = iW$, se tiene también:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = i + \frac{R}{pf(t)} \quad (13)$$

Comparando las expresiones (8) y (13) se observa, de inmediato, que el turno de Hotelling siempre va a ser mayor que el turno de Faustman, y que tal diferencia será tanto mayor cuanto mayor sea el valor de la renta respecto al valor del vuelo. De lo anterior se desprende también, la importancia de considerar en el análisis económico, tanto el valor de la masa forestal como la renta del suelo.

2.7.3 Óptimo Ambiental

Los bosques se consideran hoy en día como sistemas biológicos con objetivos múltiples, en los que la producción de madera es un objetivo persistente, aunque no es el único ni necesariamente el más importante. Además de producir madera, los árboles proveen

importantes servicios ambientales, como aire y agua limpios, protección contra la erosión de los suelos, hábitat para distintas especies, regulación del clima y servicios recreativos.

Una forma de adaptar los planteamientos analíticos en que se apoya la determinación de turnos óptimos a una situación de usos múltiples del bosque, fue sugerida por Hartman en 1976.

2.7.3.1 Óptimo de Hartman

La idea básica de Hartman consiste en introducir, además de la curva de producción $f(t)$, una función $g(t)$, que mide el flujo de servicios no madereros o ingresos (ambientales, recreativos, etc.) generados por una masa forestal con una edad de t años (Díaz, 1998; Romero, 2001).

De acuerdo con Romero (1997), Hartman sugiere que la curva $g(t)$ tiene la forma dada por la Figura 5.

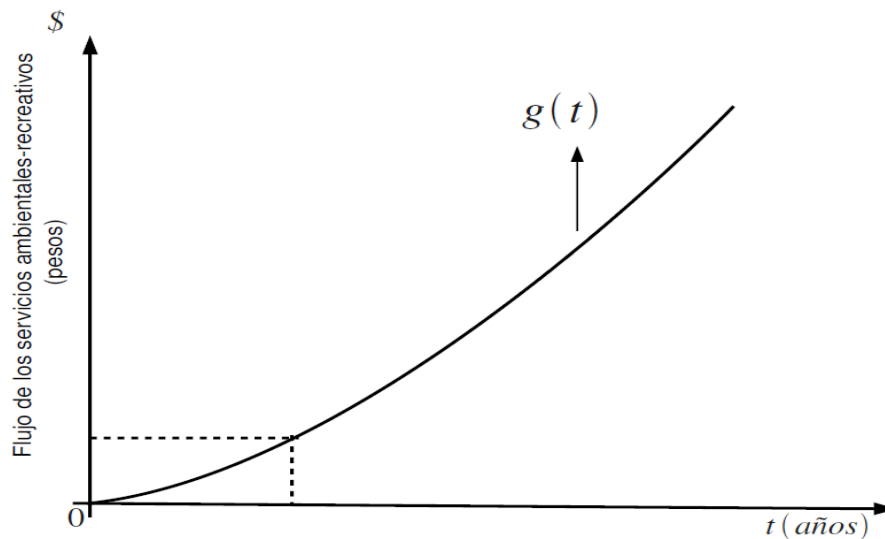


Figura 5. Función de beneficios no madereros proporcionados por el bosque.

La curva de rendimientos no madereros sugerida por Hartman es una función de producción en la que las productividades marginales nunca decrecen ni son negativas. Esto es, el valor de los servicios ambientales y recreativos proporcionados por el rodal siempre será positivo, en tanto no se alcance el tiempo de decrepitud de la masa forestal.

Con el fin de incluir la función $g(t)$ en los métodos de cálculo de turnos óptimos, el primer paso es considerar un incremento de tiempo infinitesimal ds . El beneficio ambiental-recreativo generado en ese pequeñísimo intervalo será igual a $g(s)ds$ y su valor actual $g(s)e^{-is}ds$.

Por tanto, el valor de los beneficios ambientales y recreativos de un rodal con una edad de t años será:

$$\int_0^t g(s)e^{-is}ds \quad (14)$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, así como la expresión (7), se puede formular la siguiente generalización del planteamiento de Hotelling:

$$\text{Máx } VAN = pf(t)e^{-it} + \int_0^t g(s)e^{-is}ds - K \quad (15)$$

Derivando la ecuación (15) con respecto a t , se tiene:

$$\frac{dVAN}{dt} = pf'(t) - ipf(t) + g(t)$$

Igualando a cero y reordenando, se llega a la condición de equilibrio:

$$pf'(t) + g(t) = ipf(t) \quad (16)$$

La condición (16) se interpreta de la manera habitual. Así, en el equilibrio, el flujo de servicios madereros $pf'(t)$ y no madereros $g(t)$ (valor marginal de no cortar), iguala el valor financiero de la madera $ipf(t)$ (costo marginal de no cortar). Por tanto, si $pf'(t) + g(t) < ipf(t)$, interesa cortar y en caso contrario, interesa mantener la masa forestal.

La condición de equilibrio (16) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = i - \frac{g(t)}{pf(t)} \quad (17)$$

Comparando la expresión (17) con la condición de equilibrio del turno de Hotelling dado por la expresión (8), se deduce que la inclusión de un flujo de servicios no madereros produce un alargamiento del turno. Este alargamiento es mayor conforme mayor sea la relación existente entre valores no madereros y valores madereros, es decir, conforme aumenta la relación $g(t)/pf(t)$.

Incluyendo la expresión (14) en la fórmula del VAN dada por (6), se tiene:

$$Máx VAN = pf(t)e^{-it} + \int_0^t g(s)e^{-is} ds - R \int_0^t e^{-it} dt - K \quad (18)$$

Derivando e igualando a cero la expresión anterior, se llega a la nueva condición de equilibrio para el turno de Faustman:

$$pf'(t) + g(t) = ipf(t) + R$$

En equilibrio, el valor marginal de no cortar $pf'(t) + g(t) - R$, iguala al valor financiero de la madera (costo marginal de no cortar). La condición (18) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = i + \frac{R}{pf(t)} - \frac{g(t)}{pf(t)} \quad (19)$$

Comparando la expresión (19) con la ecuación de equilibrio del turno de Faustman dada por la expresión (13), se observa que la inclusión en el análisis de una función de servicios no madereros $g(t)$, estrictamente creciente, produce un alargamiento del turno de Faustman.

De la expresión (19) se deduce que:

$$\frac{g(t)}{pf(t)} > i + \frac{R}{pf(t)}$$

Para cualquier t , nunca interesará cortar el bosque. La condición de no cortar o de mantenimiento infinito de la masa forestal, puede expresarse por medio de la siguiente desigualdad:

$$g(t) > ipf(t) + R, \forall t \quad (20)$$

Así, se puede decir que no interesará cortar el bosque si para cualquier tiempo t el valor de la madera $ipf(t)$, más la renta de la tierra R , no supera el valor financiero de los servicios no madereros (ambientales y recreativos) proporcionados por el bosque $g(t)$. Sintetizando los resultados obtenidos, se tienen que:

- 1) En los óptimos técnicos, se maximiza la tecnología que subyace a la función de producción (crecimiento). La condición de equilibrio implica:
 - $f'(t) = 0$ para la máxima producción total.
 - $f'(t) = f(t)/t$ para la máxima producción media.
- 2) En los óptimos económicos se maximiza el valor presente de la inversión subyacente. La condición de equilibrio implica:
 - $f'(t)/f(t) = i$ para el turno de Hotelling, en el cual no se considera la renta de la tierra.
 - $f'(t)/f(t) = i + R/pf(t)$ para el turno de Faustmann, en el cual se considera el costo de oportunidad del uso del suelo (renta de la tierra).
- 3) En los óptimos ambientales se maximiza el valor presente del stock maderero y del flujo de servicios ambientales. La condición de equilibrio implica:
 - $f'(t)/f(t) = i + R/pf(t) - g(t)/pf(t)$ para maximizar el VAN, considerando en el análisis la renta de la tierra y los servicios ambientales proporcionados por el bosque.

2.8 Descripción de modelos volumétricos

El crecimiento de un árbol o masa forestal está representado por el aumento en sus dimensiones: altura, diámetro, área basal y volumen. Este crecimiento considerado en un periodo de tiempo determinado se denomina incremento, el cual representa un aumento en la cantidad de tejido acumulado, de floema y xilema en forma de corteza y de madera, respectivamente (Klepac, 1983).

Un modelo de crecimiento se considera efectivo si está expresado en función de variables predictoras factibles de medir. Una curva de crecimiento, es una representación

gráfica que representa la suma de todos los incrementos anuales acumulados sobre el período de observación. Así, el crecimiento puede ser considerado como la suma de los incrementos anuales, y el incremento, como la tasa de cambio de ese incremento (Zeide, 1993).

De la curva de crecimiento, la parte de interés en la modelación forestal, es el segmento que toma una forma sigmoide. Empieza con un crecimiento inicial lento, seguido de una fase de crecimiento acelerado, luego el crecimiento se desacelera gradualmente hasta que el organismo deja de crecer, permanece de un mismo tamaño durante algún tiempo, y finalmente muere, de acuerdo a la naturaleza genética del organismo y sus limitaciones ambientales. La primera derivada de la curva de crecimiento en árboles forestales se conoce como “incremento corriente”, mientras que en economía es conocida como “función de producción marginal”. Así mismo, a la razón entre la ordenada y la abscisa de dicha curva se le llama “incremento medio” o “función de producción media”, respectivamente (Klepac, 1983; Ramírez y Zepeda, 1994).

Para el presente trabajo se emplean tres modelos de crecimientos ampliamente utilizados en Silvicultura y Epidometría: los modelos polinomiales, Schumacher y Chapman-Richards. A continuación se hace una breve descripción de cada uno de ellos.

2.8.1 Modelo polinomial

Un modelo polinomial es una combinación de variables endógenas y exógenas, que se expresa por una función como la siguiente:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \dots + \beta_nx^n$$

$$\forall \beta_i \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

Los polinomios usados con mayor frecuencia, para representar funciones de crecimiento forestal, son los de tercer y cuarto grado. En la presente investigación se utilizará la siguiente notación:

$$y = \sum_{i=0}^n \beta_i t_i \quad (21)$$

Donde:

y = Variable de estudio.

β_i =Parametros de interés.

t =Edad o tiempo en años.

La función de Producción Marginal, se obtiene derivando la ecuación (21) con respecto a la variable t .

$$PMg = y' = \frac{d}{dt}(y) = \sum_{i=0}^n i \beta_i t^{i-1} = \sum_{i=1}^n i \beta_i t^{i-1} \quad (22)$$

La función de Producción Media se obtiene dividiendo la función de crecimiento (y) entre la variable t .

$$PMe = \frac{y}{t} = \frac{\sum_{i=0}^n \beta_i t^i}{t} = \sum_{i=0}^n \beta_i t^{i-1} \quad (23)$$

2.8.2 Modelo Schumacher

El modelo Schumacher se desarrolló para relacionar el volumen con la edad. Supone que el crecimiento porcentual varía inversamente con la edad, es decir, a medida que aumenta la edad disminuye la tasa de crecimiento (Schumacher, 1939; citado por Cumplido, 2002).

Esto es:

$$\frac{dy}{d\left(\frac{1}{t}\right)} = -ky \quad (24)$$

Donde:

y = Variable de estudio.

k = Constante de proporcionalidad o tasa de crecimiento.

t = Edad o tiempo.

Al integrar la ecuación (24), se obtiene la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden no autónoma y homogénea, la cual se expresa de la siguiente forma.

$$y = ce^{-k\left(\frac{1}{t}\right)}$$

La notación usada con mayor frecuencia en las ciencias forestales es la siguiente:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1\left(\frac{1}{t}\right)} \quad (25)$$

$$\forall \beta_0 > 0; \beta_1 > 0$$

Donde:

y = Variable de estudio.

β_0 = Parámetro del valor asintótico.

β_1 = Parámetro de la tasa de crecimiento.

La función de producción marginal (PMg) o incremento corriente anual (ICA) se obtiene derivando la función de crecimiento con respecto a la variable tiempo (t), es decir:

$$PMg = ICA = \frac{dy}{dt}$$

Para la ecuación (25), la función de producción marginal es:

$$PMg = ICA = \beta_0 e^{-\beta_1(\frac{1}{t})} \left(\frac{\beta_1}{t^2} \right) \quad (26)$$

Se observa que la primera parte de la ecuación (26) es igual a la ecuación (25), por tanto, la ecuación (26) se puede escribir de la siguiente forma.

$$PMg = \frac{\beta_1}{t^2} y \quad (27)$$

El valor máximo de la producción marginal, se obtiene con la condición de primer orden (CPO), derivando la ecuación (26) con respecto a la variable t , e igualando a cero.

$$\frac{d(PMg)}{dt} = \beta_0 e^{-\beta_1(\frac{1}{t})} \left[\left(\frac{\beta_1}{t^2} \right)^2 - 2 \frac{\beta_1}{t^3} \right] = 0$$

Al resolver la ecuación anterior, y despejar para t , se obtiene el máximo del PMg .

$$t_{Máx(PMg)} = \frac{\beta_1}{2}$$

La función de producción media (PM_e) o incremento medio anual (IMA), se obtiene al dividir la función de crecimiento entre la edad (t), esto es:

$$PM_e = \frac{y}{t} = \frac{\beta_0 e^{-\beta_1(\frac{1}{t})}}{t} \quad (28)$$

El valor máximo de la función de producción media se obtiene con la CPO de la ecuación (28).

$$\frac{d}{dt}(PM_e) = \frac{\beta_0 e^{-\beta_1(\frac{1}{t})}}{t} \left[\frac{\beta_1}{t^2} - \frac{1}{t} \right] = 0 \quad (29)$$

Resolviendo para t la ecuación (29), se obtiene el máximo del PM_e .

$$t_{Máx(PM_e)} = \beta_1$$

Una forma alternativa de calcular el máximo de la producción media, consiste en igualar el producto marginal con la producción media, y resolver para “ t ”, como se muestra a continuación:

$$PM_g = PM_e \quad (30)$$

$$\frac{\beta_1}{t^2} y = \frac{y}{t}$$

$$\therefore t_{Máx(PM_e)} = \beta_1$$

Schumacher (1938), citado por Cruz (2008), señala que la curva de rendimiento volumétrico de un rodal presenta ciertas características en común con otras curvas de crecimiento, entre las cuales menciona:

- 1) La curva de rendimiento vale cero en un intercepto y tiene un valor máximo finito a edad avanzada, justamente antes de que el rodal empiece a decrecer, de allí en adelante, el rodal pierde su uniformidad.
- 2) La curva muestra una tasa decreciente del porcentaje de incremento, o en términos forestales, el porcentaje de crecimiento varía inversamente con la edad.
- 3) La pendiente de la curva de crecimiento aumenta al inicio de la vida y decrece en los últimos años. El incremento corriente anual (PMg , en términos económicos) es igual a cero cuando se obtiene el máximo crecimiento.

2.8.3 Modelo Chapman-Richards

A este modelo de crecimiento se le conoce también como modelo de Richards o generalización de Von Bertalanffy. Este modelo fue usado por primera vez en la predicción de crecimiento de masas forestales por Pienaar y Turnbull (1973).

Richards en 1959 y Chapman en 1961, propusieron un modelo generalizado, derivado de la ecuación de Von Bertalanffy, que tuvo amplias aplicaciones en estudios botánicos empíricos.

El modelo es derivado de consideraciones biológicas y ha demostrado mucha flexibilidad en su aplicación. La formulación del modelo conceptualiza el crecimiento de un organismo o población como el resultado de procesos anabólicos y catabólicos. La tasa anabólica se asume como proporcional al tamaño del organismo o población,

elevado a una potencia o exponente, mientras la tasa catabólica se considera directamente proporcional al tamaño (Clutter *et al.*, 1983). La relación se expresa como:

$$\frac{dV}{dt} = \eta V^m - \gamma V \quad (31)$$

Donde:

η = Parámetro de la tasa anabólica del crecimiento.

γ = Parámetro de la tasa catabólica del crecimiento.

V = Volumen de la biomasa.

m = Parámetro de alometría.

t = Edad.

Al resolver la ecuación (31), una ecuación diferencial no lineal tipo Bernoulli, y renombrar algunos parámetros, se tiene la siguiente ecuación (Zamudio y Ayende, 1997).

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2} \quad (32)$$

Donde:

y = Variable de estudio.

β_0 = Parámetro del valor asintótico.

β_1 = Parámetro de la tasa de crecimiento.

β_2 = Parámetro de forma.

t = Edad.

La diferencia entre las ecuaciones de Von Bertalanffy y la de Chapman-Richards, consiste en que el parámetro β_2 está restringido a un valor de tres en la primera y puede asumir cualquier valor en la segunda. La ecuación expuesta por Chapman-Richards tiene la ventaja de ser flexible y exacta, de ahí su uso frecuente en estudios de crecimiento de árboles y rodales.

3. METODOLOGÍA

3.1 Datos utilizados

La investigación se basa en información del inventario forestal 2009 y datos de campo obtenidos en 2010 por la empresa forestal Productora de Plantaciones del Sureste (PROPLANSE), en el municipio de Balancán, Tabasco, Méx. Tanto los datos como las ecuaciones para cubicar árboles en pie, se obtuvieron de la metodología que usaron PROPLANSE y SERESFO en 2007. Las ecuaciones se muestran a continuación.

Cuadro 3: Ecuaciones para cubicar árboles en pie, tomadas de PROPLANSE y SERESFO (2007).

Especie	Ecuaciones para cubicar
Melina	$V = 0.011392 * d - 0.00037431 * d^2 + 0.000029317 * d^2 * a$ $- 0.09224$
Eucalipto	$V = 0.00003805 - 0.00009789 * d^2 + 0.0001325 * d * a$ $+ 0.00002967 * d^2 * a$

Donde

V= Volumen en metros cúbicos sin corteza.

d = Diámetro medido a 1.30 m de altura desde el suelo en metros.

a = Altura total del árbol en metros.

Se trabajó con tres modelos de producción: un polinomial de tercer grado, el de Schumacher y el de Chapman-Richards, debido a que fueron estos modelos los que presentaban el mejor ajuste a los datos volumétricos disponibles, así como los mejores

criterios de bondad de ajuste. Los tres modelos de crecimientos se aplicaron a los datos derivados de dos especies tropicales: *Eucalyptus grandis* y *Gmelina arborea*, para las condiciones ambientales de Balancán, Tabasco. Los datos referentes a los costos de la plantación, el precio de la madera y la renta de la tierra fueron proporcionados por la empresa PROPLANSE; para esta investigación se consideró un total de 1,000 plantas por hectárea, con lo cual, los costos de la plantación (Anexo 3 y 4) y la renta de tierra (\$2,000/ha/año) fueron divididos entre mil, para obtener valores por árbol.

3.2 Modelos utilizados

En el Cuadro 4 se presentan los modelos matemáticos que se utilizaron para calcular los óptimos técnicos, los económicos y los ambientales para las dos especies seleccionadas. En dicho cuadro también se presenta la ecuación de la producción marginal (PMg), su valor máximo y el valor máximo de la producción media (PMe).

Cuadro 4: Modelos de crecimiento utilizados.

Modelo	$f(t)$	$PMg[f'(t)]$	t_{PMg}	t_{PMe}
Polinomial	$\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$	$\beta_1 + 2\beta_2 t + 3\beta_3 t^2$	$-\frac{1\beta_2}{3\beta_3}$	
Schumacher	$\beta_0 e^{-\beta_1(\frac{1}{t})}$	$\frac{\beta_1}{t^2} f(t)$	$\frac{\beta_1}{2}$	β_1
Chapman-Richards	$\beta_0(1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2}$	$\frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 - e^{-\beta_1 t})} f(t)$	$\frac{Ln\beta_2}{\beta_1}$	$\frac{e^{\beta_1 t_{PMe}}}{\beta_1 t_{PMe}} = \beta_2$ $t_{PMe} > t_{PMg}$

Fuente: Rentería (2008)

Donde

t_{PMg} = Tiempo del valor máximo del PMg .

t_{PMe} = Tiempo del valor máximo del PMe .

t = Edad (años)

β_i = Parámetros

En el Cuadro 5 se presenta un breve resumen de los turnos y funciones consideradas junto con la condición de equilibrio.

Cuadro 5: Sinopsis de los diferentes turnos forestales.

Turno	Función a maximizar	Condición de equilibrio
Máxima producción total	Producción total	$f'(t) = 0$
Máxima producción media	Producción Media	$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{t}$
Hotelling	Valor actual neto	$\frac{f'(t)}{f(t)} = i$
Faustman	Valor actual neto	$\frac{f'(t)}{f(t)} = i + \frac{R}{pf(t)}$
Hartman	Valor actual neto más flujo de servicios no maderables	$\frac{f'(t)}{f(t)} = i + \frac{(R - g(t))}{pf(t)}$

Para la manipulación de datos, la estimación de parámetros de los modelos de crecimiento, las gráficas y el cálculo de los óptimos, se utilizó el software libre R-estadístico.

3.3. Estimación del carbono capturado

El carbono acumulado (capturado) por hectárea, se estimó en función del rendimiento volumétrico, a través de la cantidad de carbono existente por cada m³ de madera. Se consideró la densidad de la madera y contenido de carbono en biomasa estimada con el procedimiento de Smith (1954), como se indica en el Cuadro 6.

Cuadro 6. Estimación del carbono capturado para *Eucalyptus grandis* y *Gmelina arborea*.

Variable	<i>Eucalyptus grandis</i>	<i>Gmelina arborea</i>
Densidad (t/m ³)	0.46	0.47
Contenido de carbono en biomasa (% en forma decimal)	0.48	0.49
Proporción carbono/Volumen (tC/m ³)	$0.49 \times 0.48 = 0.22$	0.47×0.49 $= 0.2303$
Proporción CO ₂ e volumen (tCO ₂ e/m ³)	$0.22 \left(\frac{44}{12} \right) = 0.809$	$0.2303 \left(\frac{44}{12} \right)$ $= 0.8443$

Fuente: Téllez Eugenio (2008).

Donde: CO₂e es el CO₂ equivalente, 44 corresponde al peso molecular de CO₂ y 12 al peso molecular de C.

La cantidad de CO₂e del Cuadro 6 sólo incluye el carbono contenido en la biomasa de fuste. El carbono contenido en las ramas y el follaje se estimó a través de factores de conversión de biomasa aérea total a partir de la biomasa del fuste. La producción de biomasa del fuste respecto al área total encontrada para *Eucalyptus grandis* fue de 88% y para *Gmelina arborea* fue de 89% (Smith, 1954); por tanto, los factores de conversión

correspondientes son: $100/88=1.136$ y $100/89=1.1235$ respectivamente. De esta forma, la cantidad de CO_2e , total por cada m^3 de madera es de 0.919 toneladas para *Eucalyptus grandis* y 0.9486 para *Gmelina arborea*.

El valor de los beneficios por captura de carbono (π_{CO_2}) se estimaron con el planteamiento de Van Kooten *et al.* (1995) y la modificación del mismo realizada por Stainback y Alavalapati (2002), ésta es:

$$\pi_{\text{CO}_2} = \underbrace{p_c \cdot \alpha \left[V(t)e^{-it} + i \int_0^t V(t)e^{-it} dt \right]}_{\pi_{\text{CO}_2}} - \underbrace{p_c \cdot \alpha \cdot \beta \cdot V(t)e^{-it}}_{\pi_{\text{CO}_2\text{Des}}} \quad (33)$$

Donde:

π_{CO_2} = Valor neto de los beneficios por capturar carbono.

$\pi_{\text{CO}_2\text{Tot}}$ = Valor total del árbol en pie por capturar carbono.

$\pi_{\text{CO}_2\text{Des}}$ = Valor descontado por la descomposición de madera cosechada.

p_c = Precio del carbono (\$/ $t\text{CO}_2\text{e}$).

α = Constante que expresa la proporción de CO_2e por m^3 de madera.

$V(t)$ = Volumen o producción de madera.

β = Proporción de descomposición de madera cosechada.

Para ambas especies se considera un valor de β igual a 0.10, es decir, en todo el proceso de cosecha y aserrío se pierde el 10% del carbono capturado.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Óptimos para *Eucalyptus grandis*

Con los datos considerados, se realizó una regresión lineal para el caso del modelo polinomial y regresiones no lineales para los modelos Schumacher y Chapman-Richards, de las cuales se obtuvieron los siguientes parámetros:

Cuadro 7: Parámetros estimados, suma de cuadrados de los errores (*SCE*) y coeficiente de determinación (R^2) para los modelos de producción de *Eucalyptus grandis*.

Modelos	β_0	β_1	β_2	β_3	<i>SCE</i>	R^2
Polinomial	-0.0087497	-0.0019162	0.0067913	-0.0002883	0.00176	0.997
Schumacher	1.040509	10.249764			0.00062	0.9989
Chapman- Richards	0.6168265	0.2060685	3.5761127		0.001123	0.998

Con los parámetros anteriores, se formularon las funciones de producción, que se muestran en el Cuadro 8.

Cuadro 8: Modelos ajustados para *Eucalyptus grandis*.

Modelos	Función de producción en $m^3/\text{árbol}$.
Polinomial	$V(t) = -0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 - 0.0002883t^3$
Schumacher	$V(t) = 1.040509e^{-10.249764(1/t)}$
Chapman- Richards	$V(t) = 0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}$

4.1.1. Modelo polinomial

4.1.1.1. Óptimos técnicos

Máxima producción total

Del Cuadro 8 se puede observar que la función de producción ajustada tipo polinomial es:

$$V(t) = -0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 - 0.0002883 t^3; \forall t \geq 0 \quad (34)$$

Donde:

$V(t)$ = Volumen con corteza expresada en $m^3/\text{árbol}$

t = Edad del árbol (años).

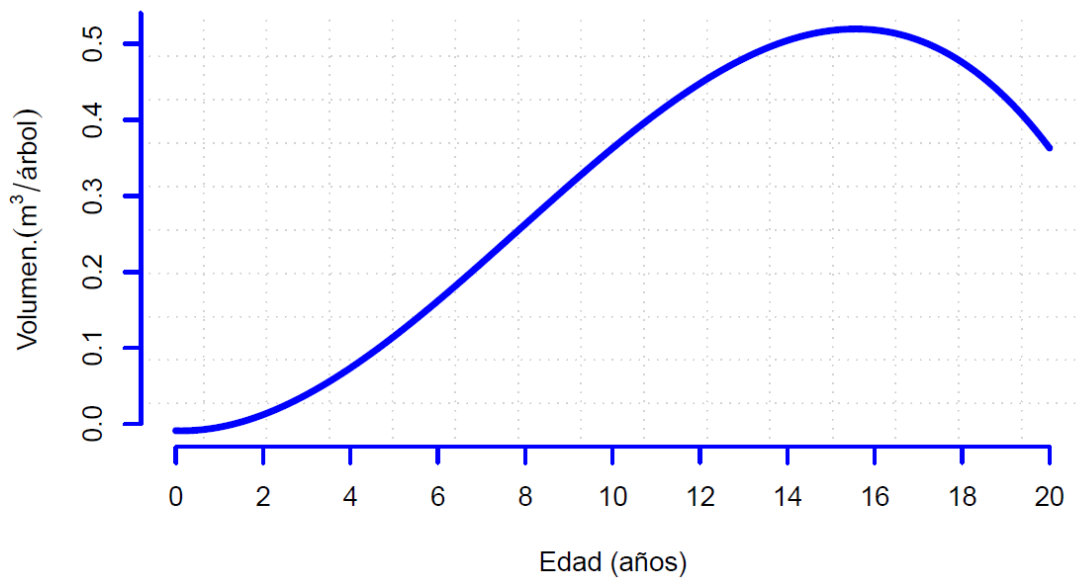


Figura 6. Función de producción para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Para determinar la máxima producción total se utilizó la función (34), se obtuvo la primera derivada y se igualó a cero.

$$V'(t) = -0.0019162 + 2(0.0067913)t - 3(0.0002883)t^2 = 0 ; \forall t \geq 0 \quad (35)$$

Resolviendo la ecuación (35), se tiene que el valor de t es igual a 15.56 años. Sustituyendo dicho valor en la función de producción (34), se obtiene que la producción máxima es de 0.5196 m³/árbol. Es decir, para alcanzar la máxima producción se tiene que mantener la plantación 15 años y medio aproximadamente. La gráfica del producto marginal se muestra a continuación:

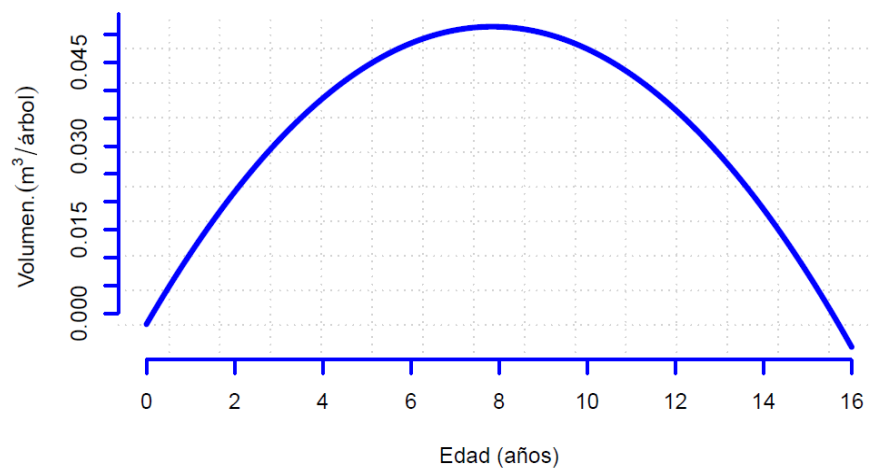


Figura 7. Curva de producción marginal para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial ajustada.

Máxima producción media

Para determinar la máxima producción media, se igualan las funciones del producto marginal (ecuación 35) y el producto medio, a partir de la ecuación (34), de tal forma que:

$$\begin{aligned}
 & -0.0019162 + 2(0.0067913)t - 3(0.0002883)t^2 \\
 & = -\frac{0.0087497}{t} - 0.0019162 + 0.0067913t - 0.0002883t^2 \quad (36)
 \end{aligned}$$

Resolviendo (36), se obtiene un valor para t de 11.88 años. Sustituyendo dicho valor en la expresión (34), se obtiene que la máxima producción media es de 0.4436 m³/árbol. Es decir, el aprovechamiento forestal se debe hacer a los 11.88 años después de la siembra para obtener la máxima producción media de 0.4436 m³/árbol (ver Figura 6).

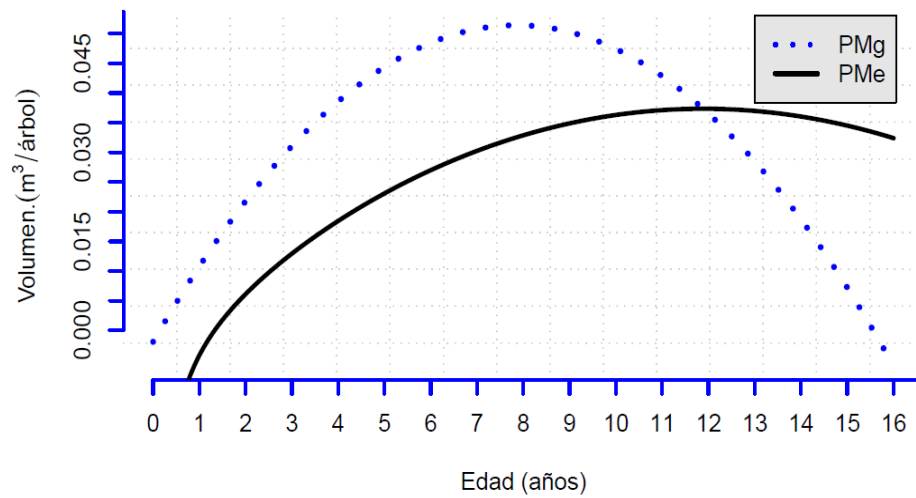


Figura 8. Curvas de producción marginal y producto medio para *Eucalyptus grandis*, derivadas de la función polinomial de tercer grado ajustada.

4.1.1.2. Óptimos económicos

Óptimo de Hotelling

Para calcular el óptimo de Hotelling, se consideró el tipo de interés o descuento proporcionado por CETES (8%), un precio de la madera en rollo de \$650.00 m³ y un costo total de \$38.00 por planta.

A partir de la ecuación (7) se plantea el modelo propuesto por Hotelling:

$$\text{Máx } VAN = pV(t)e^{-it} - K$$

Con la ecuación de equilibrio (8):

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = i$$

Al sustituir en el modelo de Hotelling la función de producción, el precio de la madera, la tasa de interés y los costos totales del establecimiento de la plantación, resulta el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Máx } VAN = & 650(-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 \\ & - 0.0002883t^3)e^{-0.08(t)} - 38 \end{aligned}$$

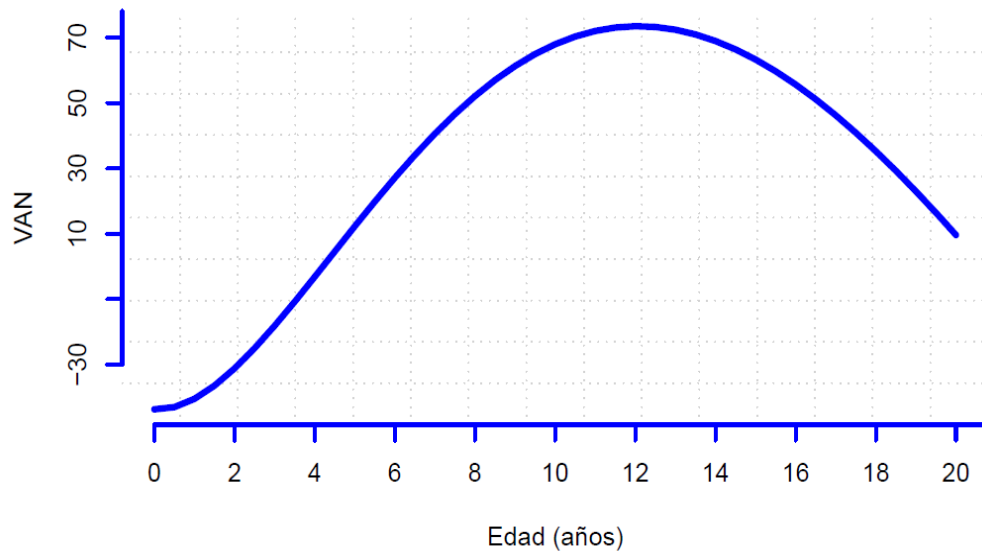


Figura 9: Curva del VAN (Hotelling) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Sustituyendo en la condición de equilibrio:

$$\frac{-0.0019162 + 2(0.0067913)t - 3(0.0002883)t^2}{-0.0087497 - 0.0019162 t + 0.0067913 t^2 - 0.0002883 t^3} = 0.08 \quad (37)$$

Resolviendo (37), se obtiene un valor para t de 12.067 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (34), se obtiene un volumen de 0.4505 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hotelling se alcanza a los 12 años, con una producción de 0.4505 m³/árbol (ver Figura 6).

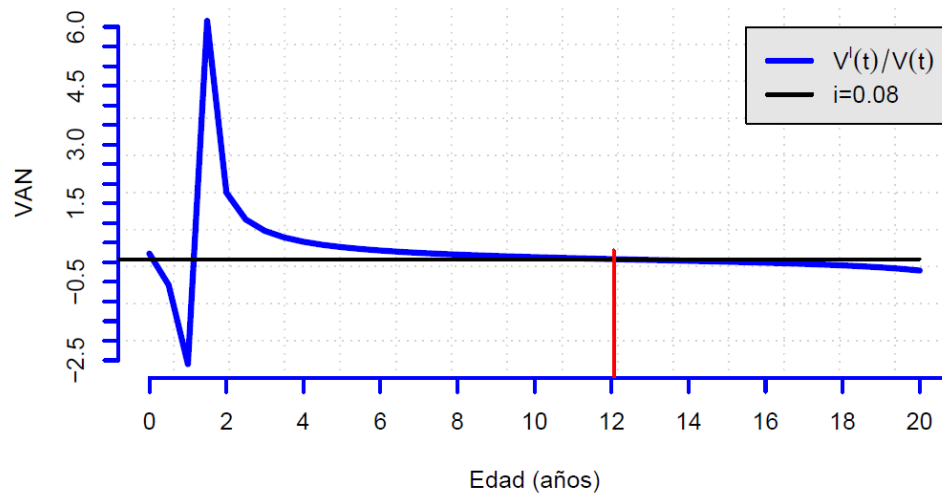


Figura 10. Curva de equilibrio de Hotelling para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Óptimo de Faustman

Para calcular el óptimo de Faustman, se consideró el tipo de interés o descuento proporcionado por CETES (8%), un precio de la madera en rollo de \$650.00 m³, un costo total de \$38.00 por planta y una renta de la tierra de \$2/ha/planta/año.

A partir de la ecuación (9) se plantea el modelo propuesto por Faustman:

$$\text{Máx } VAN = pV(t)e^{-it} - K - R \int_0^t e^{-it} dt$$

Con la ecuación de equilibrio (10):

$$\frac{V'(t)}{V(t)} - \frac{R}{pV(t)} = i$$

Al sustituir en el modelo de Faustman los elementos del modelo de Hotelling y la renta de la tierra, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Máx } VAN = & 650(-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 \\ & - 0.0002883t^3)e^{-0.08(t)} - 38 - 2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt \end{aligned}$$

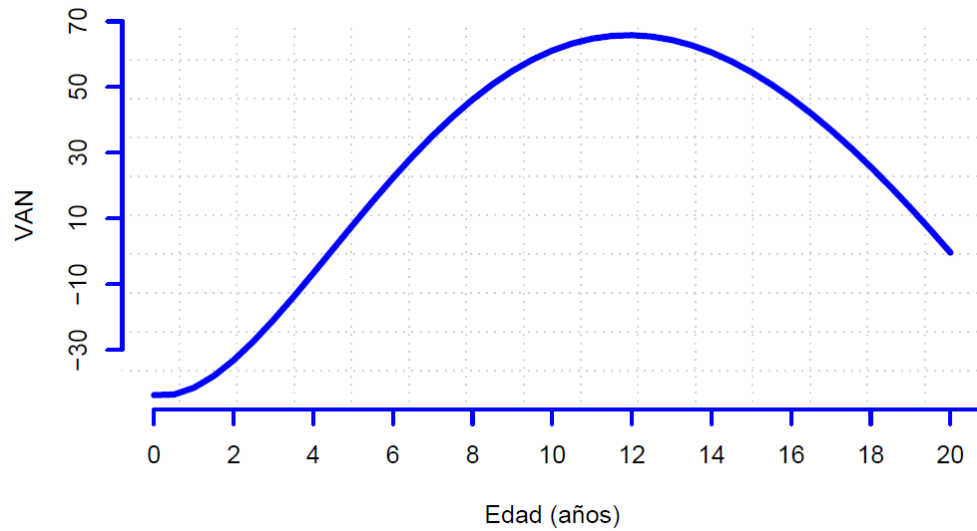


Figura 11: Curva del VAN (Faustman) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Sustituyendo en la condición de equilibrio

$$\frac{-0.0019162 + 2(0.0067913)t - 3(0.0002883)t^2}{-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 - 0.0002883t^2} = 0.08 \quad (38)$$

Resolviendo (38), se obtiene un valor para t de 11.76 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (34), se obtiene un volumen de 0.4391 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Faustman se alcanza a los 11.7 años, con una producción de 0.4391 m³/árbol (ver Figura 6).

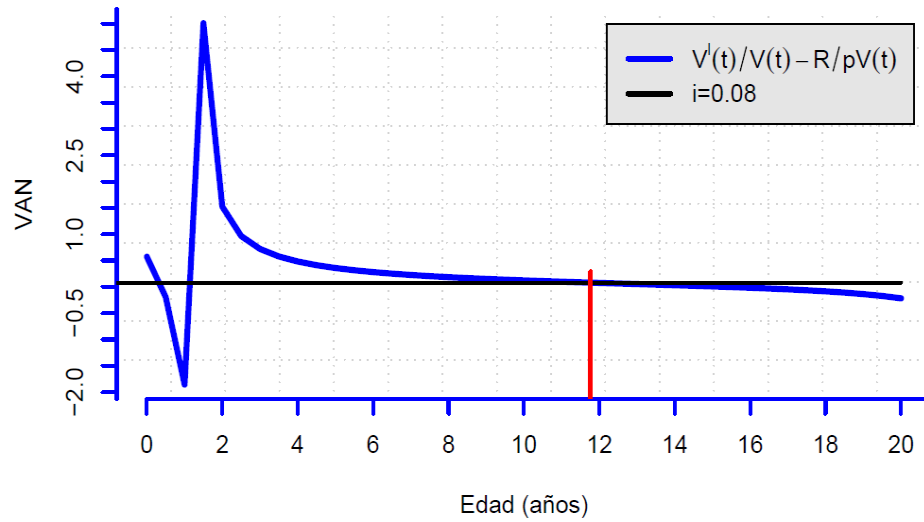


Figura 12: Curva de equilibrio de Faustman para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

4.1.1.3. Óptimo ambiental (Hartman)

Para el cálculo del óptimo de Hartman, se consideró el tipo de interés o descuento proporcionado por CETES (8%), un precio de la madera en rollo de \$650.00 por m³, un costo total de plantación y mantenimiento de \$38.00 por planta, una renta de la tierra de \$2.00/ha/planta/año y un precio del carbono de \$107.00 por tonelada de CO₂e.

A partir de la ecuación (18) se plantea el modelo propuesto por Hartman:

$$\text{Máx } VAN = pV(t)e^{-it} + \int_0^t g(t)e^{-it} dt - R \int_0^t e^{-it} dt - K$$

Con la condición de equilibrio (19):

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = i + \frac{R - g(t)}{pV(t)}$$

Donde la parte de ingresos derivados de la captura de carbono $g(t)$ es igual a la expresión (33), tal como se muestra a continuación:

$$\int_0^t g(t)dt = \pi_{CO_2} = p_c \cdot \alpha \left[V(t)e^{-it} + i \int_0^t V(t)e^{-it} dt \right] - p_c \cdot \alpha \cdot \beta \cdot V(t)e^{-it}$$

Para el precio del carbono (p_c) se consideró el tabulador más bajo usado por “European Climate Exchange Carbon”, una constante que expresa la proporción de CO₂e por m³ (α) de 0.919 y una proporción de descomposición de madera cosechada (β) de 0.10.

Por tanto, al sustituir estos valores, el modelo se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Máx VAN} = & 650(-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 \\
 & - 0.0002883t^3)e^{-0.08(t)} - 38 - 2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt + 107(0.919) \\
 & \left[(-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 - 0.0002883t^3)e^{-0.08(t)} \right. \\
 & \left. + 0.08 \int_0^t (-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 \right. \\
 & \left. - 0.0002883t^3)e^{-0.08(t)} dt \right] \\
 & - 107(0.919)(0.10)[(-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 \\
 & - 0.0002883t^3)e^{-0.08(t)}]
 \end{aligned}$$

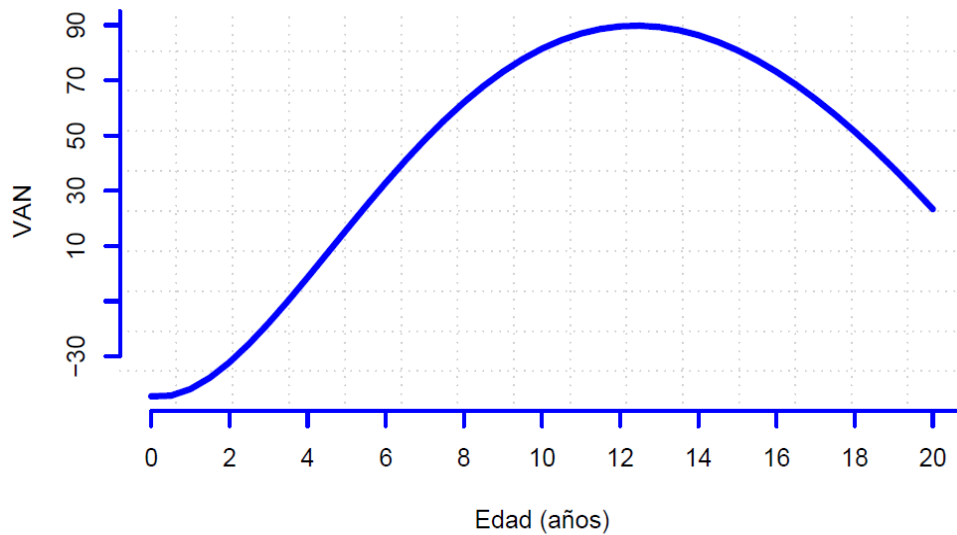


Figura 13: Curva del VAN (Hartman) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Y la función de equilibrio es:

$$\begin{aligned} & \frac{-0.0019162 + 2(0.0067913)t - 3(0.0002883)t^2}{-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 - 0.0002883t^3} \\ & - \frac{2}{650(-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 - 0.0002883t^3)} \\ & + \frac{98333e^{-\frac{2t}{25}}(5766t^3 + 1810199t^2 - 30522526t + 4486444)}{2500000000000} \\ & \quad + \frac{650(-0.0087497 - 0.0019162t + 0.0067913t^2 - 0.0002883t^3)}{2500000000000} \\ & = 0.08 \end{aligned} \quad (39)$$

Resolviendo (39), se obtiene un valor para t de 12.27 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (34), se obtiene un volumen de 0.4579 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hartman se alcanza a los 12.27 años, con una producción de 0.4579 m³/árbol (ver Figura 6).

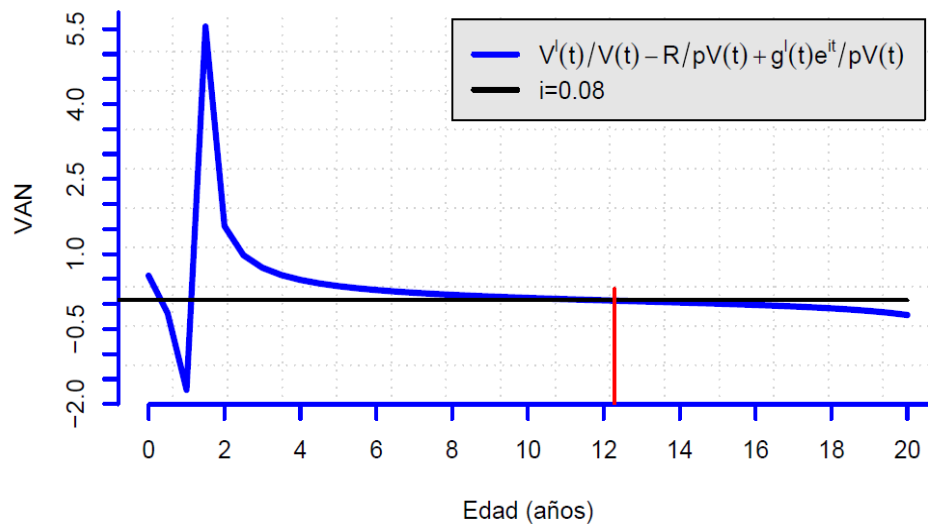


Figura 14: Curva de equilibrio de Hartman para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

4.1.2. Modelo Schumacher

4.1.2.1. Óptimos técnicos

Máxima producción total

Del Cuadro 8 se puede observar que la función de producción ajustada tipo Schumacher es:

$$V(t) = 1.040509e^{-10.249764\left(\frac{1}{t}\right)}; \forall t > 0 \quad (40)$$

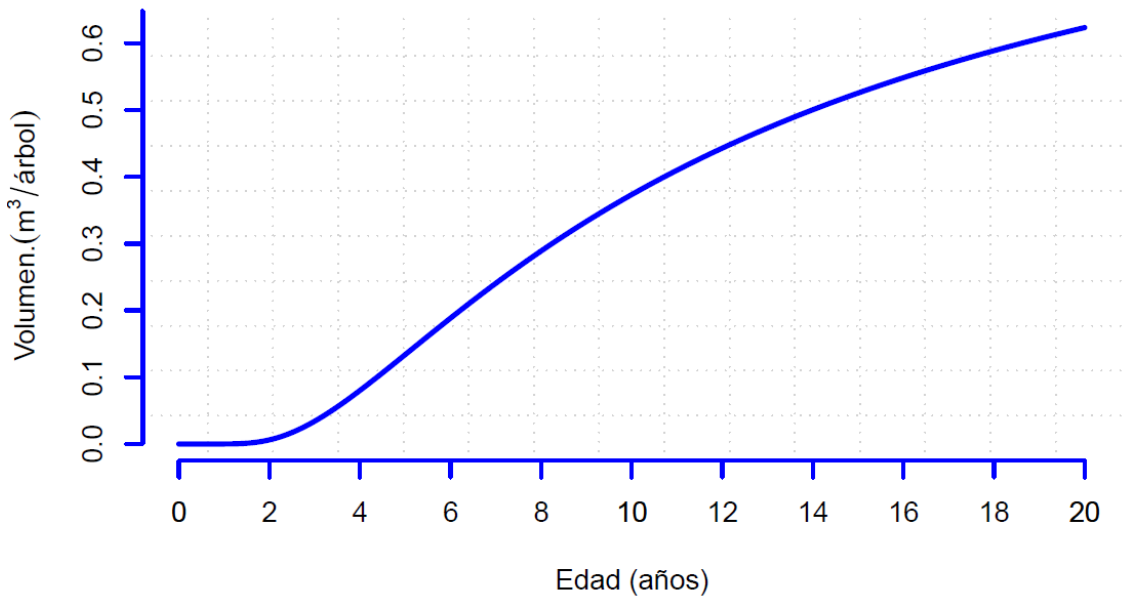


Figura 15: Función de producción para *Eucalyptus grandis*, empleando el modelo Schumacher ajustado.

Para determinar la máxima producción total se utilizó la función (40), se obtuvo la primera derivada y se igualó a cero.

$$V'(t) = \left[\frac{1.040509(10.249764)}{t^2} \right] e^{-10.249764\left(\frac{1}{t}\right)} = 0; \forall t > 0 \quad (41)$$

Se observa que esta expresión tiene una asíntota horizontal, ya que tanto la parte de la ecuación escrita entre corchetes como la parte exponencial nunca son iguales a cero, y por ello la solución se obtiene calculando el límite siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V'(t) = 0$$

Pero, como surge el problema de no poder mantener indefinidamente la plantación forestal, se calcula el límite de la producción máxima.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx 1.0405 \text{ m}^3/\text{árbol}$$

Y se discrimina un 10%.

$$(1 - \alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx (1 - 0.1)1.0405 \approx 0.93645 \text{ m}^3/\text{árbol}$$

Donde:

α = porcentaje de la producción a discriminar (10 % para este caso).

Igualando la ecuación (40) a 0.93645 y resolviendo con respecto a t , el valor de t es aproximadamente de 97.2 años. Es decir la máxima producción se alcanza a los 97.2 años de edad del árbol, con una producción de 0.93645 m³/árbol.

En este caso, la función de producción tipo Schumacher no resulta ser un buen modelo para el cálculo de la máxima producción total, debido a que el modelo ajustado solo pronostica 25% a futuro de acuerdo a lo establecido por Montgomery *et al.* (2007). Es decir, predice aceptablemente hasta el año 19.

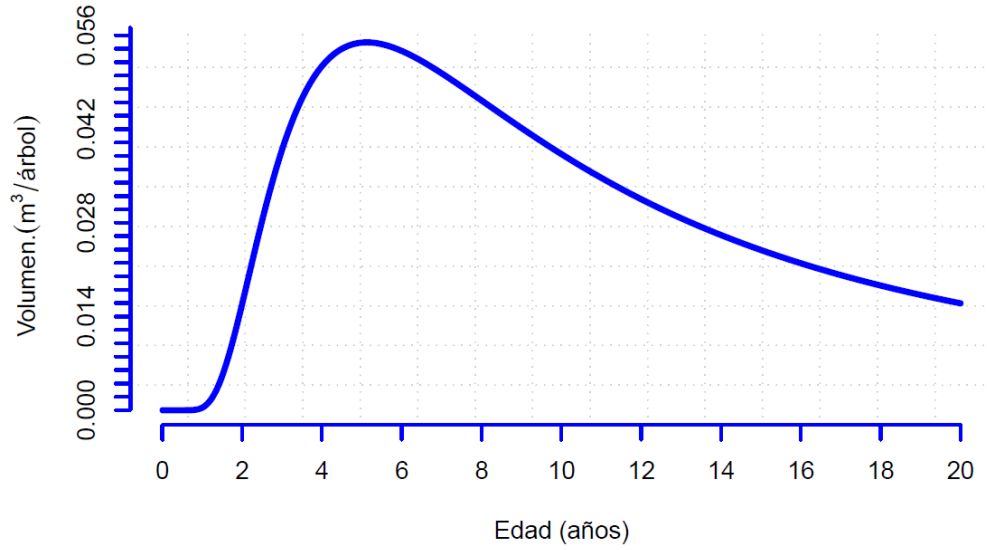


Figura 16: Curva de producción marginal para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Máxima producción media

Para obtener el turno de máxima producción media, se igualan las funciones de producto marginal (ecuación 41) y producto medio, a partir de la ecuación (40), o se calcula el máximo de la función del producto medio, como se muestra a continuación:

$$PMe = \frac{1.040509e^{-10.249764(1/t)}}{t}; \quad \forall t > 0 \quad (42)$$

Derivando:

$$PMe' = \frac{e^{-10.249764(\frac{1}{t})}}{t^2} \left[1 - \frac{10.249764}{t} \right] = 0 \quad (43)$$

Resolviendo (43), se obtiene un valor para t de 10.24 años. Sustituyendo este valor en la expresión (40), se obtiene una producción media máxima de 0.3824 m³/árbol. Es decir,

el aprovechamiento forestal se debe hacer a los 10.24 años después de la siembra para obtener la máxima producción media de 0.3824 m³/árbol (ver Figura 15).

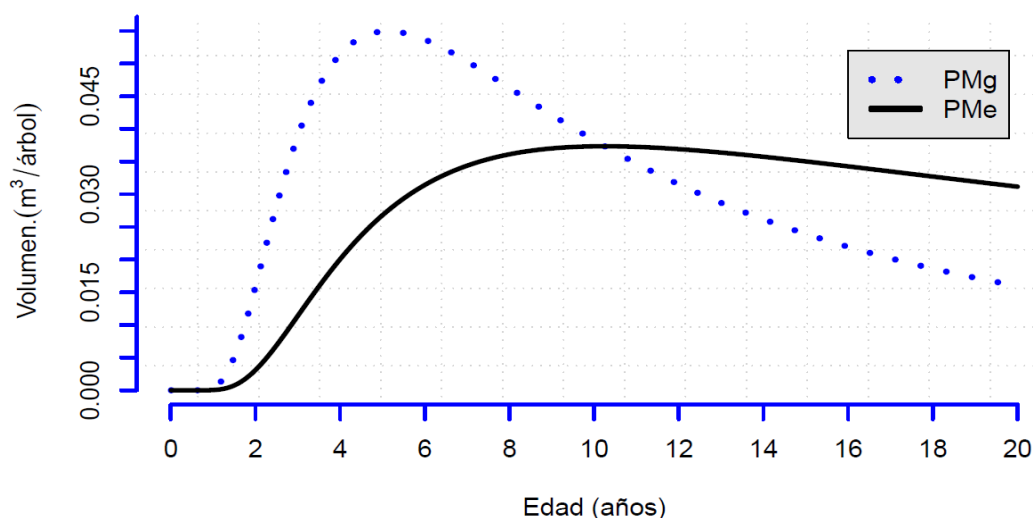


Figura 17: Curvas del producción marginal y producto medio para *Eucalyptus grandis*, derivadas de la función Schumacher ajustada.

4.1.2.2. Óptimos económicos

Óptimo de Hotelling

Al sustituir en el modelo de Hotelling la función de producción, el precio de la madera, la tasa de interés y los costos totales del establecimiento de la plantación, se tiene el problema siguiente:

$$\text{Máx } VAN = 650[1.040509e^{-10.249764(1/t)}]e^{-0.08(t)} - 38$$

Con la ecuación de equilibrio:

$$\frac{\left[\frac{1.040509(10.249764)}{t^2} \right] e^{-10.249764(1/t)}}{1.040509e^{-10.249764(1/t)}} = 0.08 \quad (44)$$

Resolviendo (44), se obtiene un valor para t de 11.319 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (40), se obtienes un volumen de $0.4207 \text{ m}^3/\text{árbol}$. Es decir, el óptimo de Hotelling se alcanza a los 11.3 años, con una producción de $0.4207 \text{ m}^3/\text{árbol}$ (ver Figura 15).

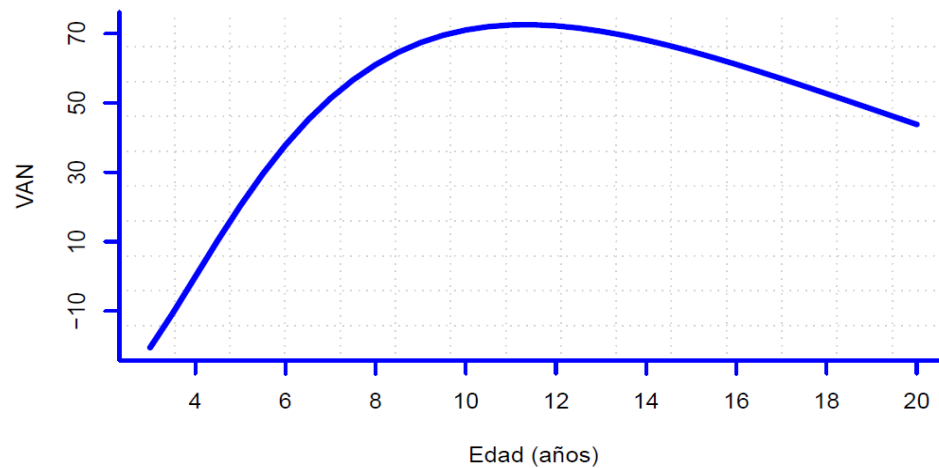


Figura 18: Curva del VAN (Hotelling) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Schumacher ajustada.

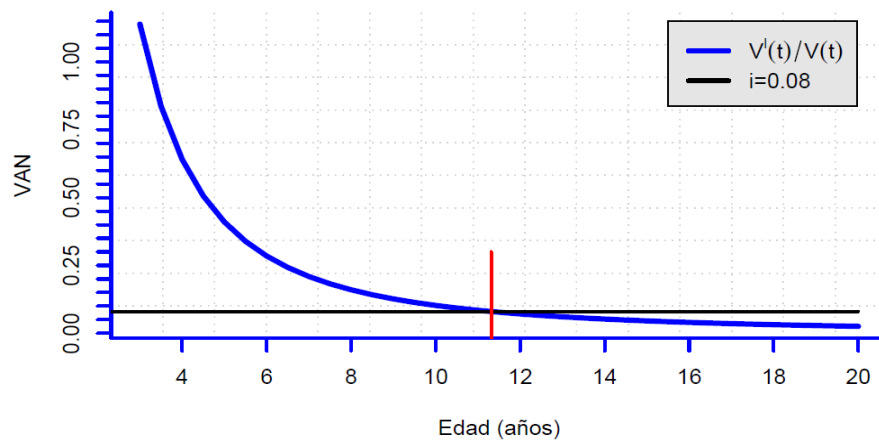


Figura 19: Curva de equilibrio de Hotelling para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Óptimo de Faustman

Al sustituir en el modelo de Faustman los elementos del modelo de Hotelling y la renta de la tierra, se tiene que:

$$\text{Máx VAN} = 650(1.040509e^{-10.249754(1/t)})e^{-0.08(t)} - 38 - 2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt$$

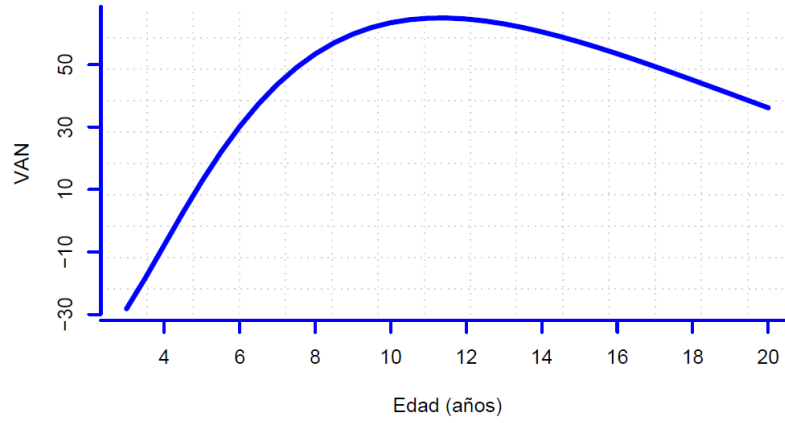


Figura 20: Curva del VAN (Faustman) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Con la condición de equilibrio:

$$\frac{\left[\frac{1.040509(10.249764)}{t^2} \right] e^{-10.249764\left(\frac{1}{t}\right)}}{1.040509e^{-10.249764\left(\frac{1}{t}\right)}} - \frac{2}{650 \left(1.040509e^{-10.249764\left(\frac{1}{t}\right)} \right)} = 0.08 \quad (45)$$

Resolviendo (45), se obtiene un valor para t de 10.815 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (40), se obtiene un volumen de 0.4033 m³/árbol. Es decir, el

óptimo de Faustman se alcanza a los 10.815 años, con una producción de 0.4033 m³/árbol (ver Figura 15).

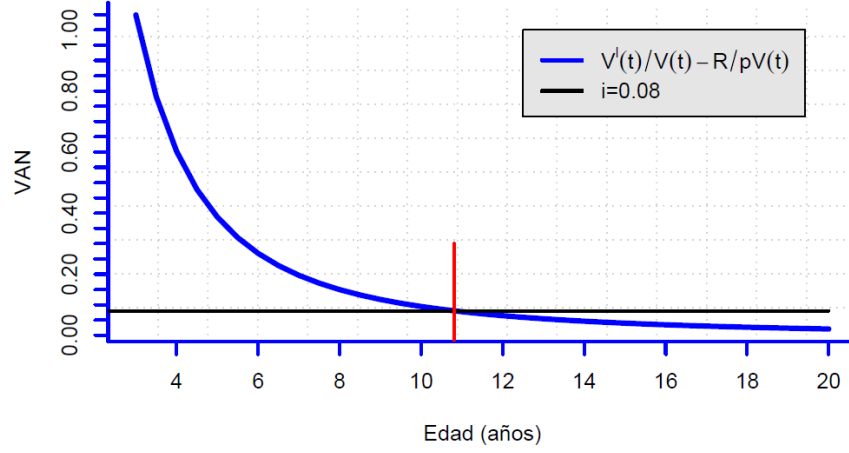


Figura 21: Curva de equilibrio de Faustman para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Schumacher ajustada.

4.1.2.3. Óptimo ambiental (Hartman)

Sustituyendo los valores de las componentes consideradas en la función de maximización del VAN propuesta por Hartman (p. 69), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \text{Máx VAN} = & 650(1.040509e^{-10.249754(1/t)})e^{-0.08(t)} - 38 - 2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt \\
 & + 107(0.919) \left[(1.040509e^{-10.249754(1/t)})e^{-0.08(t)} \right. \\
 & \left. + 0.08 \int_0^t (1.040509e^{-10.249754(1/t)})e^{-0.08(t)} dt \right] \\
 & - 107(0.919)(0.10) [(1.040509e^{-10.249754(1/t)})e^{-0.08(t)}]
 \end{aligned}$$

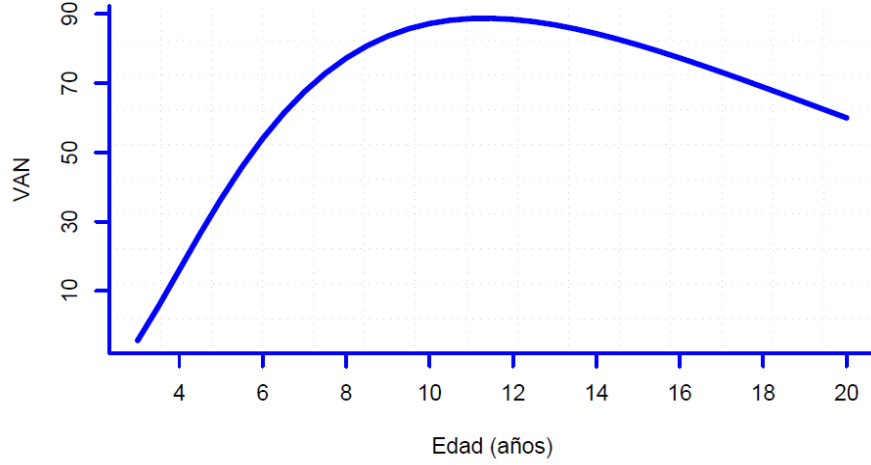


Figura 22: Curva del VAN (Hartman) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Con la condición de equilibrio:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{[1.040509(10.249764)]e^{-10.249764(\frac{1}{t})}}{t^2}}{1.040509e^{-10.249764(\frac{1}{t})}} - \frac{2}{650 \left(1.040509e^{-10.249764(\frac{1}{t})} \right)} \\ & + \frac{102316371497e^{-2t/25-2562441/(250000t)}(20000t^2 + 23061969)}{2500000000000000t^2} e^{0.08(t)} \\ & = 0.08 \end{aligned} \quad (46)$$

Resolviendo (46), se obtiene un valor para t de 11.641 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (40), se obtiene un volumen de 0.4314 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hartman se alcanza a los 11.614 años, con una producción de 0.4314 m³/árbol (ver Figura 15).

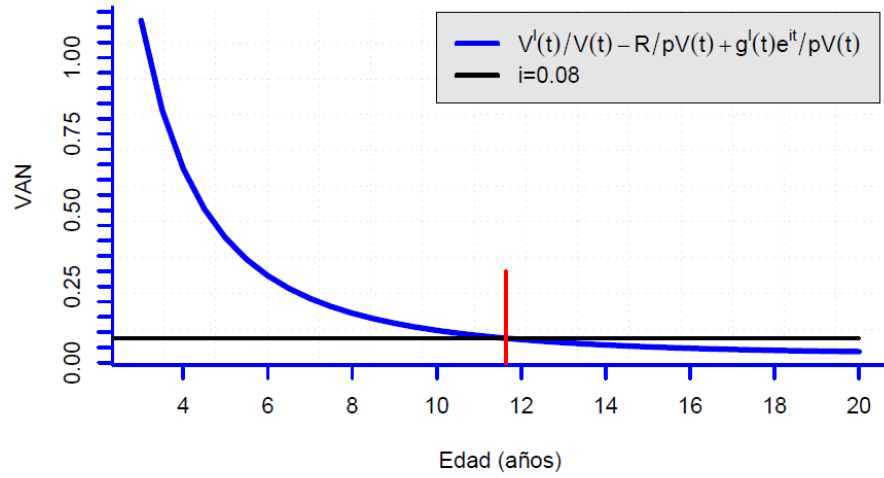


Figura 23: Curva de equilibrio de Hartman para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Schumacher ajustada

4.1.3. Modelo Chapman-Richards

4.1.3.1. Óptimos técnicos

Máxima producción total

Del Cuadro 8 se puede observar que la función de producción ajustada tipo Chapman-Richards es:

$$V(t) = 0.61682651(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}; \quad \forall t \geq 0 \quad (47)$$

Para determinar la máxima producción total se utilizó la función (47), se obtuvo la primera derivada y se igualó a cero.

$$V'(t) = \frac{0.6168265(0.2060685)(3.5761127)e^{-0.2060685t}}{1 - e^{-0.2060685t}}.$$

$$(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127} = 0; \quad \forall t \geq 0 \quad (48)$$

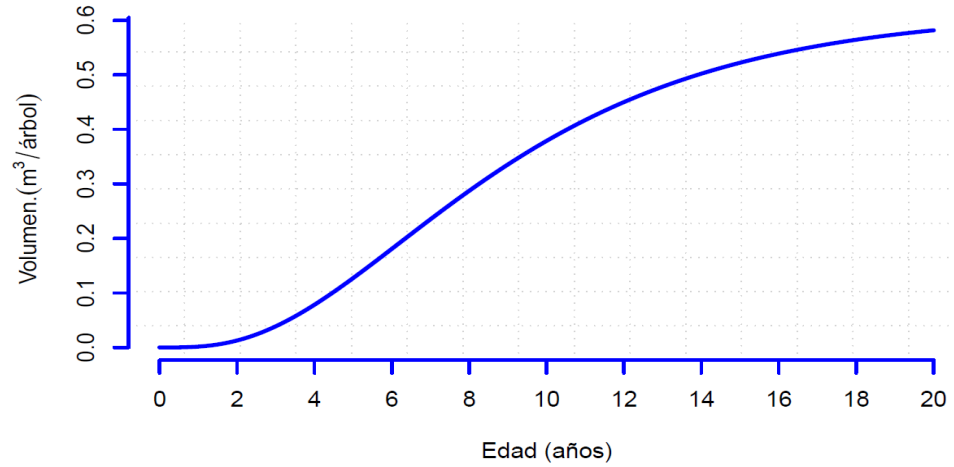


Figura 24: Función de producción para *Eucalyptus grandis*, empleando el modelo Chapman-Richards ajustado.

De la ecuación (48), se puede observar que se complica el cálculo del valor de t , como ocurrió en la función de Schumacher. El valor de t (para que se cumpla la igualdad) se obtiene cuando t tiende a infinito, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V'(t) = 0 \quad (49)$$

Al igual que en el caso de la función Schumacher, se calculó el valor del límite de la función de producción cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx 0.6168 \text{ m}^3/\text{árbol}$$

Y se discriminó un 10%:

$$(1-\alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx (1 - 0.1)0.6168 \approx 0.55512 \text{ m}^3/\text{árbol}$$

Donde:

α = porcentaje de la producción dispuestos a discriminar (10% para este caso).

Igualando la ecuación (47) a 0.55512 y resolviendo con respecto a t , este valor es aproximadamente de 17.1 años. Es decir la máxima producción se obtiene a los 17.1 años aproximadamente, con una producción de 0.55512 m³/árbol.

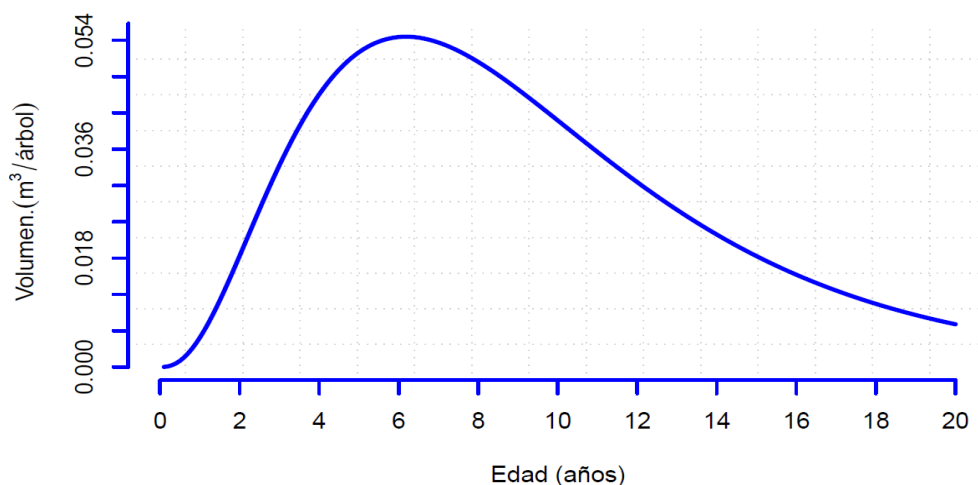


Figura 25: Curva de producción marginal para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada

Máxima producción media

Para obtener el turno de máxima producción media, se igualan las funciones de producto marginal (ecuación 48) y producto medio, a partir de la ecuación (47), como se muestra a continuación:

$$\frac{0.6168265(0.2060685)(3.5761127)e^{-0.2060685t}}{1 - e^{-0.2060685t}}(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127} = \frac{0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}}{t}; \forall t > 0$$

Resolviendo la ecuación anterior, se obtiene un valor de t de 10.5 años. Sustituyendo el valor de t en la expresión (47), se obtiene una producción media de 0.3986 m³/árbol. Es

decir, el aprovechamiento forestal se debe hacer a los 10.5 años después de la siembra para obtener la máxima producción media de 0.3986 m³/árbol (ver Figura 24).

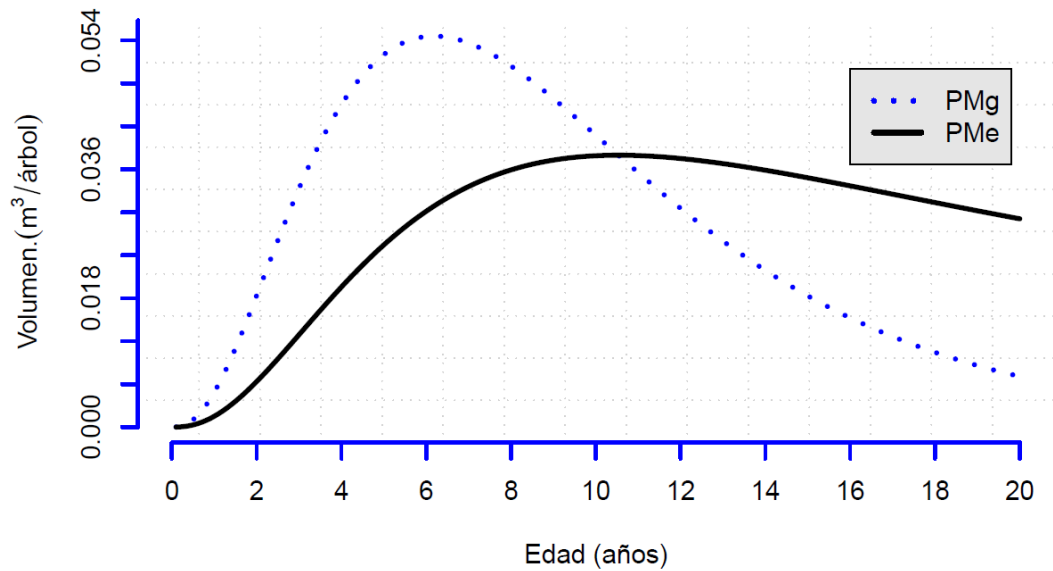


Figura 26: Curvas de producción marginal y producto medio para *Eucalyptus grandis*, derivadas de la función Chapman-Richards ajustada.

4.1.3.2. Óptimos económicos

Óptimo de Hotelling

Al sustituir la función de producción, el precio de la madera, la tasa de interés y los costos totales del establecimiento de la plantación, en el modelo propuesto por Hotelling, resulta el problema siguiente:

$$\text{Máx VAN} = 650[0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}]e^{-0.08t} - 38$$

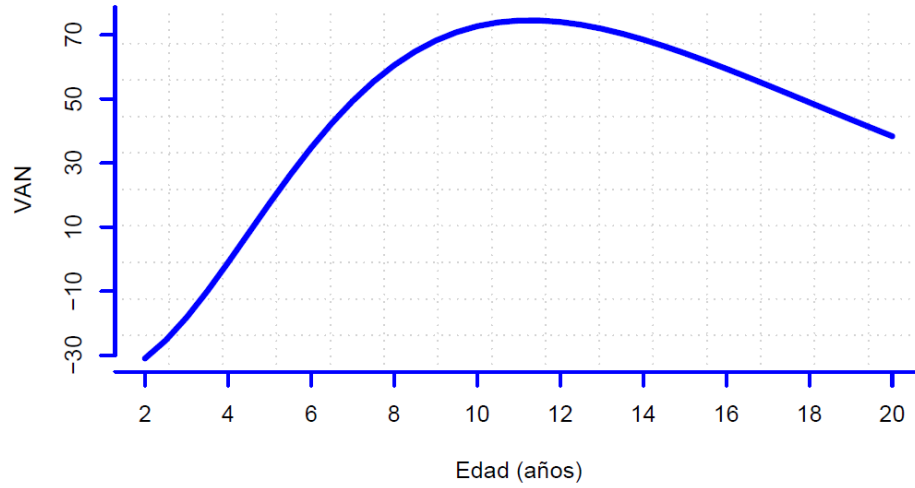


Figura 27: Curva del VAN (Hotelling) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Y la ecuación de equilibrio:

$$\frac{\frac{0.6168265(0.2060685)(3.5761127)e^{-0.2060685t}}{1 - e^{-0.2060685t}}(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}}{0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}} = 0.08 \quad (50)$$

Resolviendo (50), se obtiene un valor para t de 11.275 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (47), se obtiene un volumen de 0.4266 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hotelling se alcanza a los 11.275 años, con una producción de 0.4266 m³/árbol (ver Figura 24).

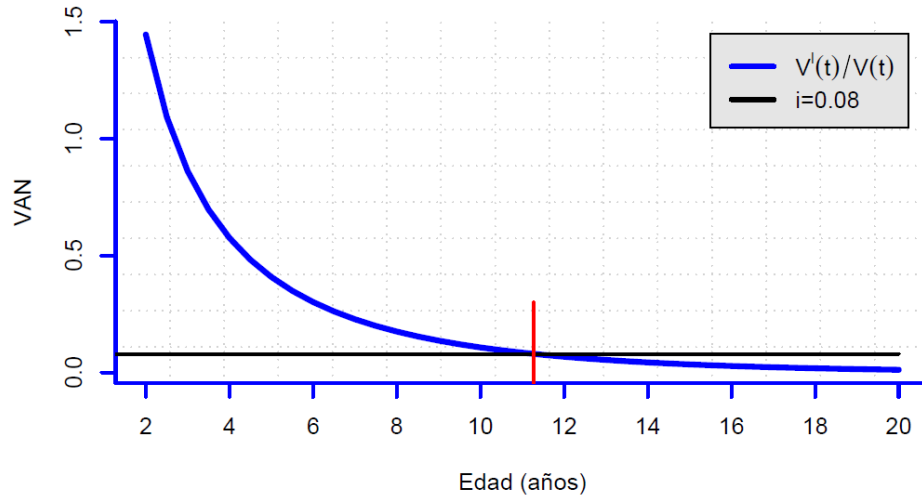


Figura 28: Curva de equilibrio de Hotelling para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Óptimo de Faustman

Al sustituir en el modelo de Faustman los elementos del modelo de Hotelling y la renta de tierra, se tiene que:

$$\text{Máx } VAN = 650[0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}]e^{-0.08t} - 38 - 2 \int_0^t e^{-0.08t} dt$$

Con la condición de equilibrio:

$$\frac{\frac{0.6168265(0.2060685)(3.5761127)e^{-0.2060685t}}{1 - e^{-0.2060685t}}(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}}{0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}} - \frac{2}{650(0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127})} = 0.08 \quad (51)$$

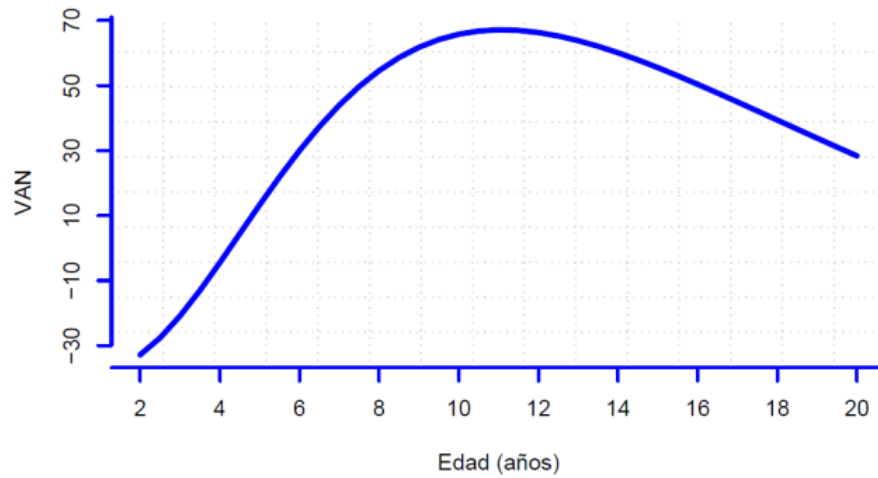


Figura 29: Curva del VAN (Faustman) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Resolviendo (51), se obtiene un valor para t de 10.889 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (47), se obtiene un volumen de $0.4131 \text{ m}^3/\text{árbol}$. Es decir, el óptimo de Faustman se alcanza a los 10.889 años, con una producción de $0.4131 \text{ m}^3/\text{árbol}$ (ver Figura 24).

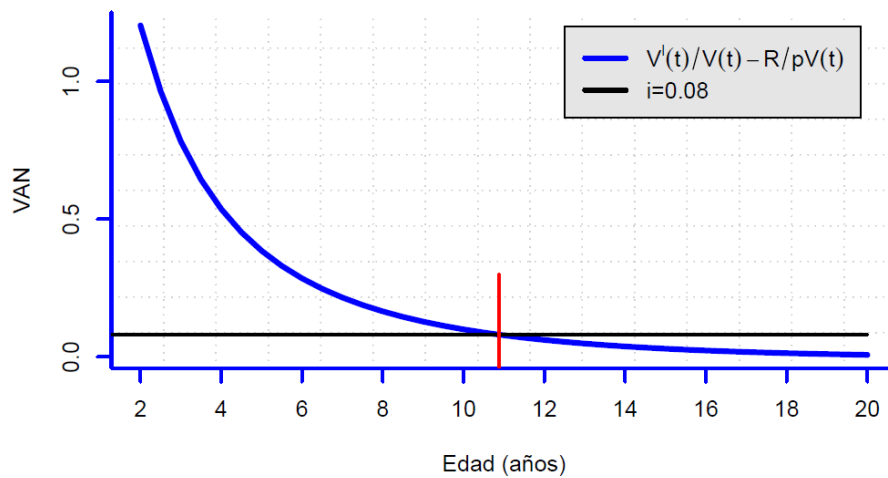


Figura 30: Curva de equilibrio de Faustman para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

4.1.3.3. Óptimo ambiental (Hartman)

Sustituyendo los valores de las componentes consideradas en la función de maximización del VAN propuesta por Hartman (p. 69), se tiene que:

$$\text{Máx VAN} = 650[0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}]e^{-0.08t} - 38 - 2 \int_0^t e^{-0.08t} dt$$

$$107(0.919) \left[(0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127})e^{-0.08t} + 0.08 \int_0^t (0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127})e^{-0.08t} dt \right]$$

$$-107(0.919)(0.10)[(0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127})e^{-0.08t}]$$

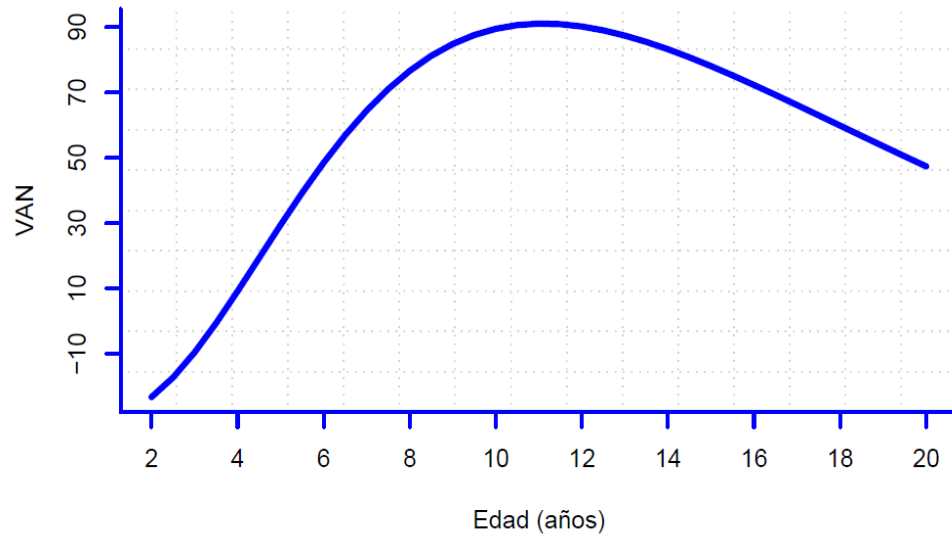


Figura 31: Curva del VAN (Hartman) para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Y la condición de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{0.6168265(0.2060685)(3.5761127)e^{-0.2060685t}}{1 - e^{-0.2060685t}}(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}}{0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127}} \\
 & - \frac{2}{650(0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127})} \\
 & + \frac{39.74268949e^{-0.8169241799t}(e^{0.2060685t} - 1)^{2.576112697}}{650(0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127})} \\
 & + \frac{0.4852352016 \cdot e^{-0.6108556799t}(e^{0.2060685t} - 1)^{2.576112693}}{650(0.6168265(1 - e^{-0.2060685t})^{3.5761127})} = 0.08 \quad (52)
 \end{aligned}$$

Resolviendo (52), se obtiene un valor para t de 11.525 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (47), se obtiene un volumen de 0.4350 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hartman se alcanza a los 11.525 años, con una producción de 0.4350 m³/árbol (ver Figura 24).

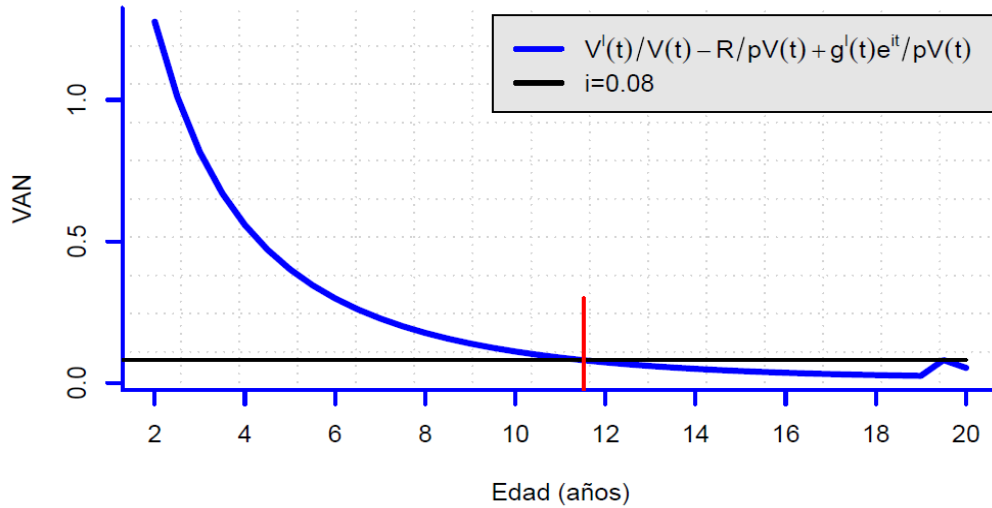


Figura 32: Curva de equilibrio de Hartman para *Eucalyptus grandis*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

4.1.4. Resumen

En el Cuadro 9 se presentan los resultados obtenidos para *Eucalyptus grandis*, de los cinco tipos de óptimos forestales, para los tres modelos de producción (crecimiento).

Cuadro 9: Óptimos Forestales obtenidos para *Eucalyptus grandis*, utilizando los tres modelos de crecimiento.

Óptimos	Tipo	Polinomial	Schumacher	Chapman-Richards
Técnicos	Máxima producción total	15.56	---	17.10
	Máxima producción media	11.88	10.24	10.50
Económicos	Hotelling	12.07	11.32	11.28
	Faustman	11.76	10.82	10.89
Ambiental	Hartman	12.27	11.64	11.53

4.2. Óptimos para *Gmelina arborea*

El procedimiento utilizado para el análisis de los datos fue similar al empleado para *Eucalyptus grandis* (p. 61).

Cuadro 10. Parámetros estimados, suma de cuadrados de los errores (*SCE*) y coeficiente de determinación (R^2) para los modelos de producción de *Gmelina arborea*.

Modelos	β_1	β_2	β_3	β_4	<i>SCE</i>	R^2
Polinomial	0.0756	-0.00246	0.00346	-0.00007433	0.00025	0.9968
Schumacher	0.4945922	5.4996829			0.0131	0.8355
Chapman-Richards	3.948423657	0.008540686	1.022817371		0.0430	0.82

Con los parámetros anteriores, se formularon las funciones de producción, que se muestran en el Cuadro 11.

Cuadro 11: Modelos ajustados para *Gmelina arborea*.

Modelos	Función de producción en m ³ /árbol
Polinomial	$V(t) = 0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3$
Schumacher	$V(t) = 0.4945922 e^{-5.4996829(1/t)}$
Chapman-Richards	$V(t) = 3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}$

4.2.1. Modelo polinomial

4.2.1.1. Óptimos técnicos

Máxima producción total

Del Cuadro 11 se observa que la función de producción ajustada tipo polinomial es:

$$V(t) = 0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3; \forall t \geq 0 \quad (53)$$

Para determinar la máxima producción total se utilizó la función (53), se obtuvo la primera derivada y se igualó a cero.

$$V'(t) = -0.00246 + 2(0.00346)t - 3(0.00007433)t^2; \forall t \geq 0 \quad (54)$$

Resolviendo la ecuación (54), se tiene que el valor de t es igual a 30.673 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (53), se obtiene una producción máxima de 1.110 m³/árbol. Es decir, para alcanzar la máxima producción se tiene que mantener la plantación 30 años y medio aproximadamente.

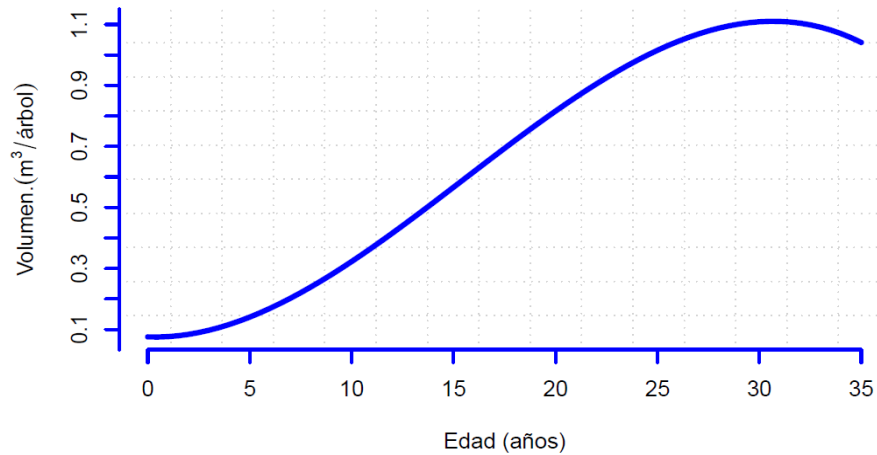


Figura 33: Función de producción para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

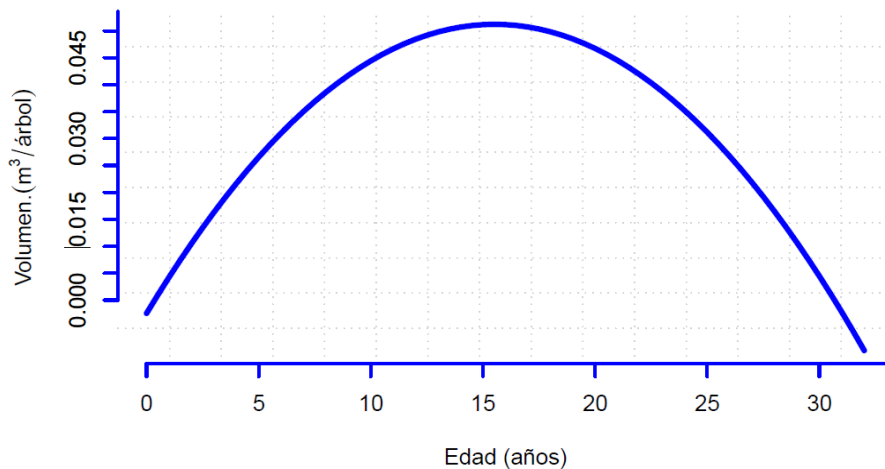


Figura 34: Curva de producción marginal para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Máxima producción media

Para determinar la máxima producción media, se igualan las funciones del producto marginal (ecuación 54) y el producto medio, a partir de la ecuación (53):

$$\begin{aligned}
 & -0.00246 + 2(0.00346)t - 3(0.00007433)t^2 \\
 & = \frac{0.0756}{t} - 0.00246 + 0.00346t - 0.00007433t^2 \quad (55)
 \end{aligned}$$

Resolviendo (55), se obtiene un valor para t de 22.247 años. Sustituyendo este valor en la expresión (53), se obtiene una producción media máxima de 0.915 m³/árbol. Es decir, el aprovechamiento forestal se debe hacer a los 22.247 años después de la siembra para obtener la máxima producción media de 0.915 m³/árbol (ver Figura 33).

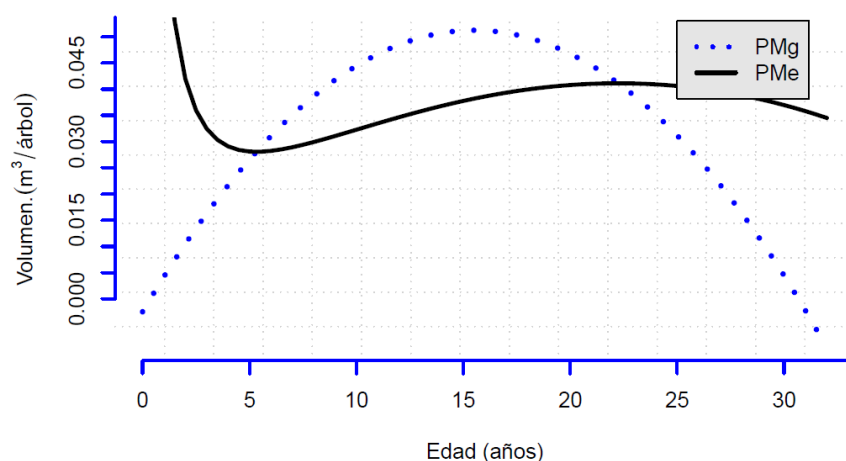


Figura 35: Curvas de producción marginal y producto medio para *Gmelina arborea*, derivadas de la función polinomial de tercer grado ajustada.

4.2.1.2. Óptimos económicos

Óptimos de Hotelling

Para el cálculo del óptimo de Hotelling, se consideró el tipo de interés o descuento proporcionado por CETES (8%), un precio de la madera en rollo de \$600.00 m³ y un costo total de \$40.00 por planta.

A partir de la ecuación (7) se plantea el modelo propuesto por Hotelling:

$$\text{Máx } VAN = pV(t)e^{-it} - K$$

Con la ecuación de equilibrio (8):

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = i$$

Al sustituir en el modelo de Hotelling la función de producción, el precio de la madera, la tasa de interés y los costos totales del establecimiento de la plantación, resulta el problema siguiente:

$$\text{Máx } VAN = 600(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)e^{-0.08(t)} - 40$$

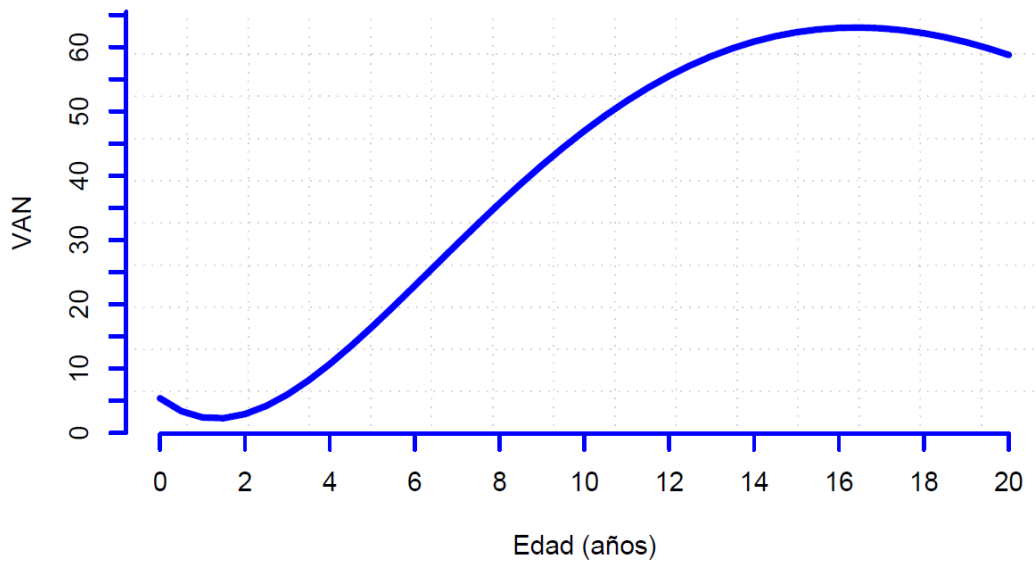


Figura 36: Curva del VAN (Hotelling) para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Sustituyendo en la condición de equilibrio:

$$\frac{-0.00246 + 2(0.00346)t - 3(0.00007433)t^2}{0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3} = 0.08 \quad (56)$$

Resolviendo (56), se obtiene un valor para t de 16.102 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (53), se obtiene un volumen de 0.638 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hotelling se alcanza a los 16.102 años, con una producción de 0.638 m³/árbol (ver Figura 33).

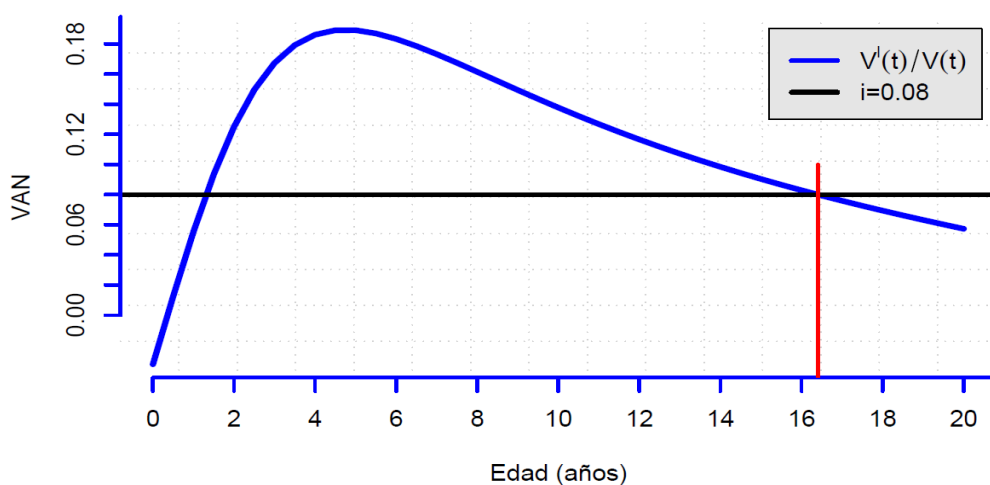


Figura 37: Curva de equilibrio de Hotelling para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Óptimo de Faustman

Para calcular el óptimo de Faustman, se consideró el tipo de interés o descuento proporcionado por *CETES* (8%), un precio de la madera en rollo de \$600.00 m³, un costo total de \$40.00 por planta y una renta de la tierra de \$2/ha/planta/año.

A partir de la ecuación (9) se plantea el modelo propuesto por Faustman:

$$\text{Máx } VAN = pV(t)e^{-it} - K - R \int_0^t e^{-0.08t}$$

Con la ecuación de equilibrio (10):

$$\frac{V'(t)}{V(t)} - \frac{R}{pV(t)} = i$$

Al sustituir en el modelo de Faustman los elementos del modelo de Hotelling y la renta de la tierra, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Máx } VAN = & 600(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)e^{-0.08(t)} - 40 \\ & - 2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt \end{aligned}$$

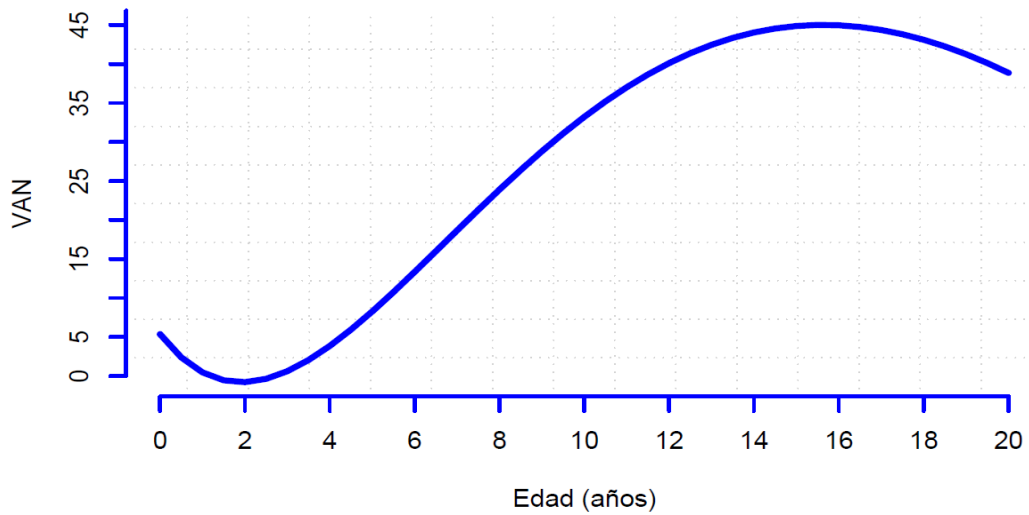


Figura 38: Curva del VAN (Faustman) para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Sustituyendo en la condición de equilibrio:

$$\frac{-0.00246 + 2(0.00346)t - 3(0.00007433)t^2}{0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3} - \frac{2}{600(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)} = 0.08 \quad (57)$$

Resolviendo (57), se obtiene un valor para t de 15.630 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (53), se obtiene un volumen de 0.599 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Faustman se alcanza a los 15.630 años, con una producción de 0.599 m³/árbol (ver Figura 33).

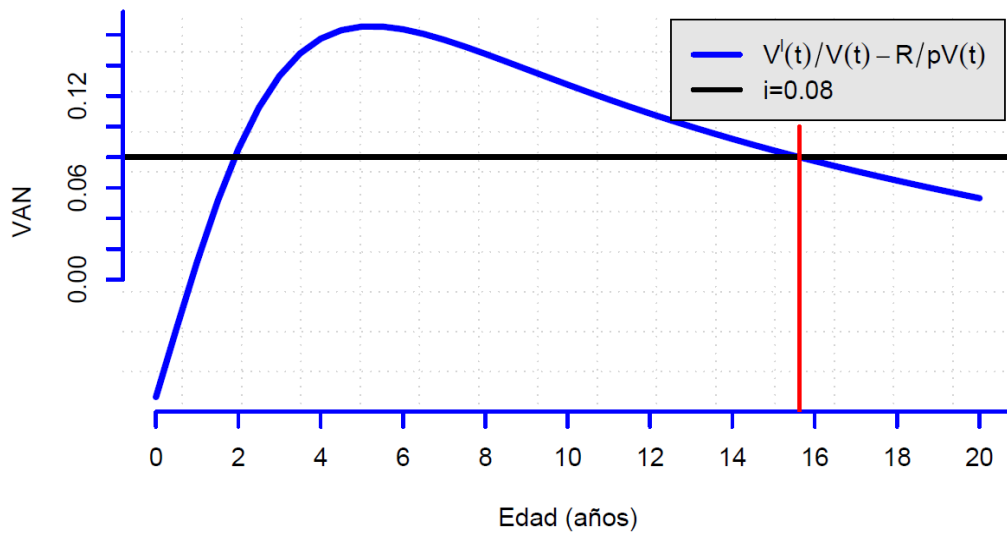


Figura 39: Curva de equilibrio de Faustman para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

4.1.1.3. Óptimo ambiental (Hartman)

Para el cálculo del óptimo de Hartman, se consideró el tipo de interés o descuento proporcionado por CETES (8%), un precio de la madera en rollo de \$600.00 por m³, un costo total de plantación y mantenimiento de \$40.00 por planta, una renta de la tierra de \$2.00/ha/planta/año y un precio del carbono de \$107.00 por tonelada de CO₂e.

A partir de la ecuación (18) se plantea el modelo propuesto por Hartman:

$$\text{Máx } VAN = pV(t)e^{-it} + \int_0^t g(t)e^{-it} dt - R \int_0^t e^{-0.08t} - K$$

Con la condición de equilibrio (19):

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = i - \frac{R - g(t)}{pV(t)}$$

Donde la parte de ingresos derivados de la captura de carbono $g(t)$ es igual a la expresión (37), tal como se muestra a continuación.

$$\int_0^t g(t)dt = \pi_{CO_2} = p_c \cdot \alpha \left[V(t)e^{-it} + i \int_0^t V(t)e^{-it} dt \right] - p_c \cdot \alpha \cdot \beta \cdot V(t)e^{-it}$$

Para el precio del carbono (p_c) se consideró el tabulador más bajo usado por “European Climate Exchange Carbon”, una constante que expresa la proporción de CO₂e por m³ (α) de 0.9486 y una proporción de descomposición de madera cosechada (β) de 0.10.

Por tanto, al sustituir estos valores, el modelo se expresa de la siguiente forma:

$$\text{Máx VAN} = 600(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)e^{-0.08(t)} - 4$$

$$-2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt$$

$$+107(0.9486) \left[(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)e^{-0.08(t)} \right. \\ \left. + 0.08 \int_0^t (0.0756 - 0.00246t \right. \\ \left. + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)e^{-0.08(t)} dt \right]$$

$$-107(0.9486)(0.10) \left[(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)e^{-0.08(t)} \right]$$

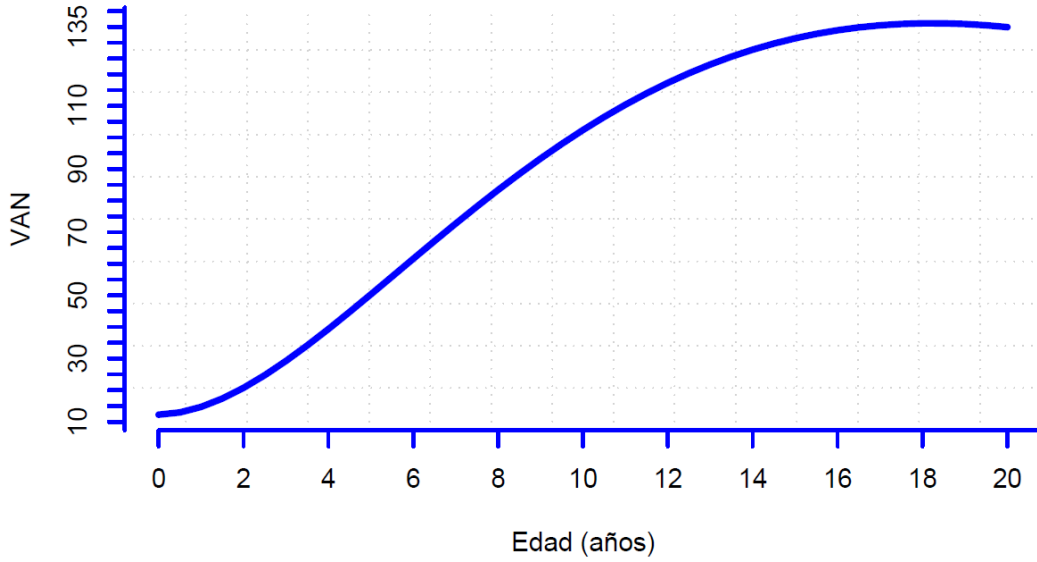


Figura 40: Curva del VAN (Hartman) para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

Sustituyendo en la condición de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-0.00246 + 2(0.00346)t - 3(0.00007433)t^2}{0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3} \\
 & - \frac{2}{600(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3)} \\
 & + \frac{-507501e^{-2t/25} (14866t^3 + 4325275t^2 - 155208000t + 40230000)e^{0.08t}}{12500000000000(600(0.0756 - 0.00246t + 0.00346t^2 - 0.00007433t^3))} \\
 & = 0.08 \tag{58}
 \end{aligned}$$

Resolviendo (58), se obtiene un valor para t de 17.523 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (53), se obtiene un volumen de 0.695 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hartman se alcanza a los 17.523 años, con una producción de 0.695 m³/árbol (ver Figura 33).

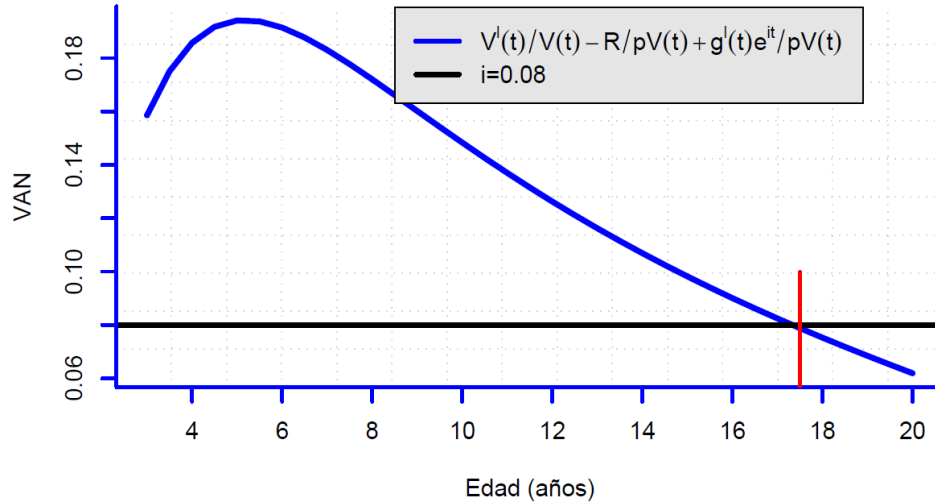


Figura 41: Curva de equilibrio de Hartman para *Gmelina arborea*, derivada de la función polinomial de tercer grado ajustada.

4.2.2. Modelo Schumacher

4.2.2.1. Óptimos técnicos

Máxima producción total

Del Cuadro 11, se puede observar que la función de producción ajustada tipo Schumacher es:

$$V(t) = 0.4945922 e^{-5.4996829\left(\frac{1}{t}\right)}; \forall t > 0 \quad (59)$$

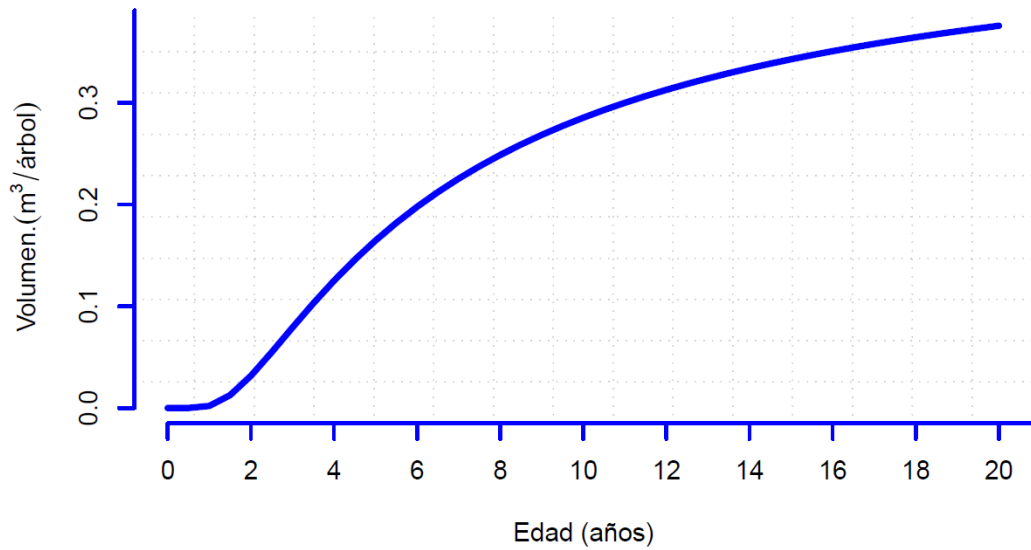


Figura 42: Función de producción para *Gmelina arborea*, empleando el modelo Schumacher ajustado.

Para determinar la máxima producción total se utilizó la función (59), se obtuvo la primera derivada y se igualó a cero.

$$V'(t) = \left[\frac{0.4945922(5.4996829)}{t^2} \right] e^{-5.4996829\left(\frac{1}{t}\right)}; \forall t > 0 \quad (60)$$

Se observa que esta expresión tiene una asíntota horizontal, ya que, tanto la parte de la ecuación escrita entre corchetes como la parte exponencial nunca son iguales a cero, y es por ello que la solución se obtiene calculando el límite siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V'(t) = 0 \quad (61)$$

Pero, como surge el problema de no poder mantener indefinidamente la plantación forestal, se calcula el límite de la producción máxima.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx 0.4945 \text{ m}^3/\text{árbol}$$

Y se discrimina un 10%:

$$(1 - \alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx (1 - 0.1)0.4945 \approx 0.42282/\text{árbol}$$

Donde

α = porcentaje de la producción a discriminar (10% para este caso).

Igualando la ecuación (59) a 0.42282 y resolviendo con respecto a t , el valor de t es aproximadamente de 35.07 años. Es decir la máxima producción se obtiene a los 35.07 años de edad, con una producción de 0.42282 m³/árbol.

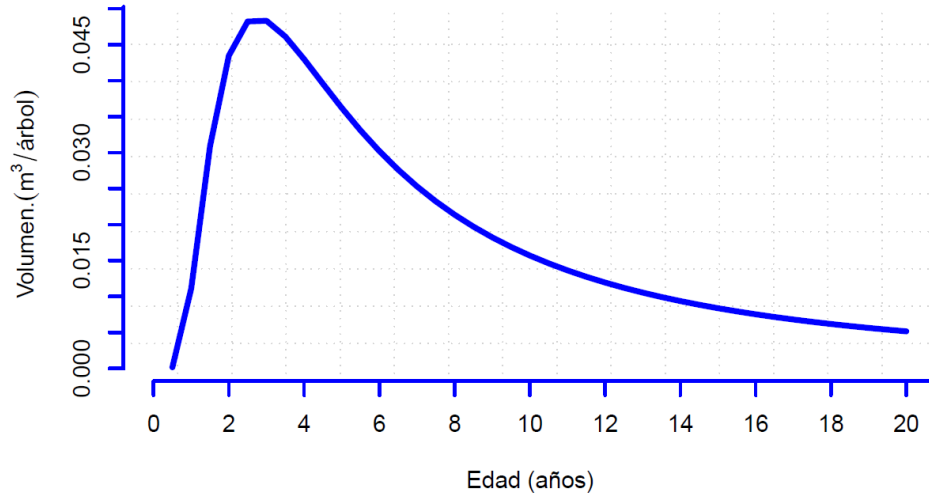


Figura 43: Curva de producción marginal para *Gmelina arborea*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Máxima producción media

Para obtener el turno de máxima producción media, se igualan las funciones del producto marginal (ecuación 60) y el producto medio, a partir de la ecuación (59), o se calcula el máximo de la función del producto medio, como se muestra a continuación:

$$PMe = \frac{0.4945922 e^{-5.4996829\left(\frac{1}{t}\right)}}{t}; \forall t > 0$$

derivando

$$PMe' = \frac{0.4945922 e^{-5.4996829\left(\frac{1}{t}\right)}}{t^2} \left[1 - \frac{5.4996829}{t} \right] = 0 \quad (62)$$

Resolviendo (62), se obtiene un valor para t de 5.499 años. Sustituyendo este valor en la expresión (59), se obtiene una producción media máxima de 0.182 m³/árbol. Es decir, el

aprovechamiento forestal se debe hacer a los 5.499 años después de la siembra para obtener la máxima producción media de 0.182 m³/árbol (ver Figura 42).

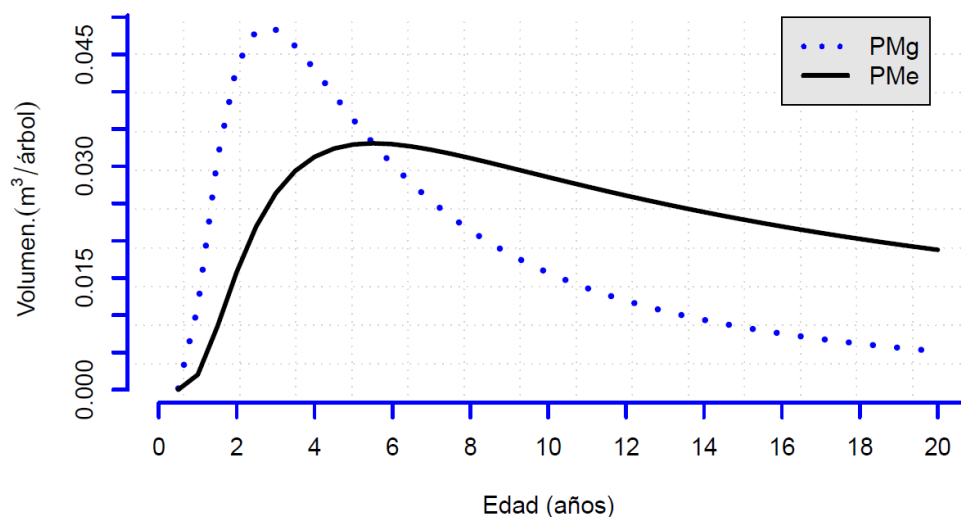


Figura 44: Curvas de producción marginal y producto medio para *Gmelina arborea*, derivadas de la función Schumacher ajustada.

4.2.2.2. Óptimos económicos

Óptimo de Hotelling

Al sustituir en el modelo de Hotelling la función de producción, el precio de la madera, la tasa de interés y los costos totales del establecimiento de la plantación, se tiene el problema siguiente:

$$\text{Máx } VAN = 600 \left(0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)} \right) e^{-0.08(t)} - 40$$

Y la ecuación de equilibrio:

$$\frac{\left[\frac{0.4945922(5.4996829)}{t^2} \right] e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)}}{0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)}} = 0.08 \quad (63)$$

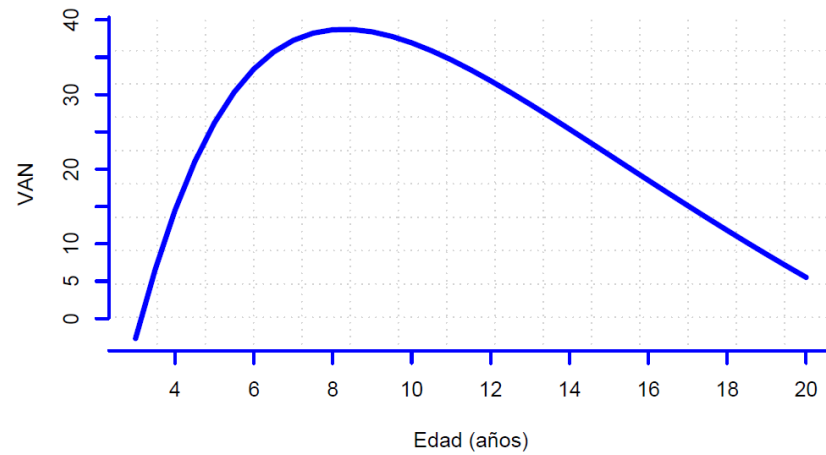


Figura 45: Curva del VAN (Hotelling) para *Gmelina arborea*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Resolviendo (63), se obtiene un valor para t de 8.291 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (59), se obtiene un volumen de $0.255 \text{ m}^3/\text{árbol}$. Es decir, el óptimo de Hotelling se alcanza a los 8.291 años, con una producción de $0.255 \text{ m}^3/\text{árbol}$ (ver Figura 42).

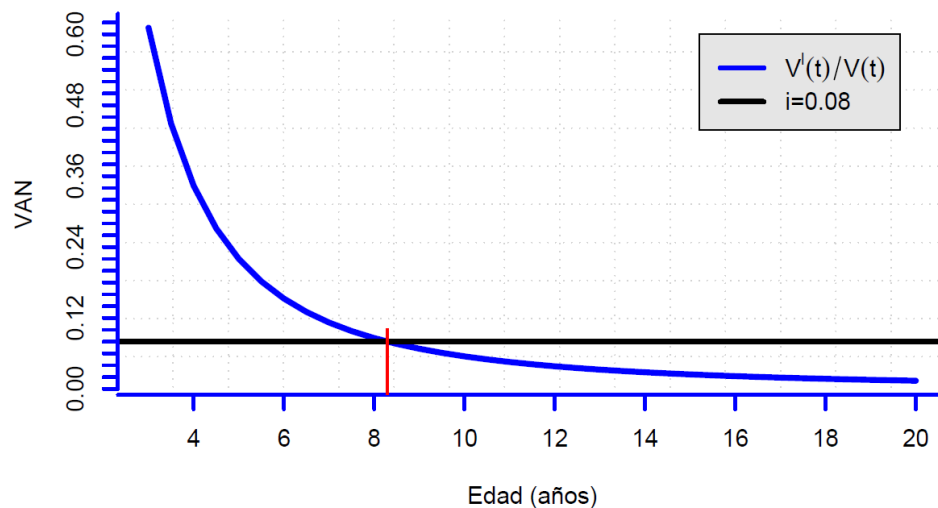


Figura 46: Curva de equilibrio de Hotelling para *Gmelina arborea*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Óptimo de Faustman

Al sustituir en el modelo de Faustman los elementos del modelo de Hotelling y la renta de la tierra, se tiene que:

$$\text{Máx VAN} = 600 \left(0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)} \right) e^{-0.08(t)} - 40 - 2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt$$

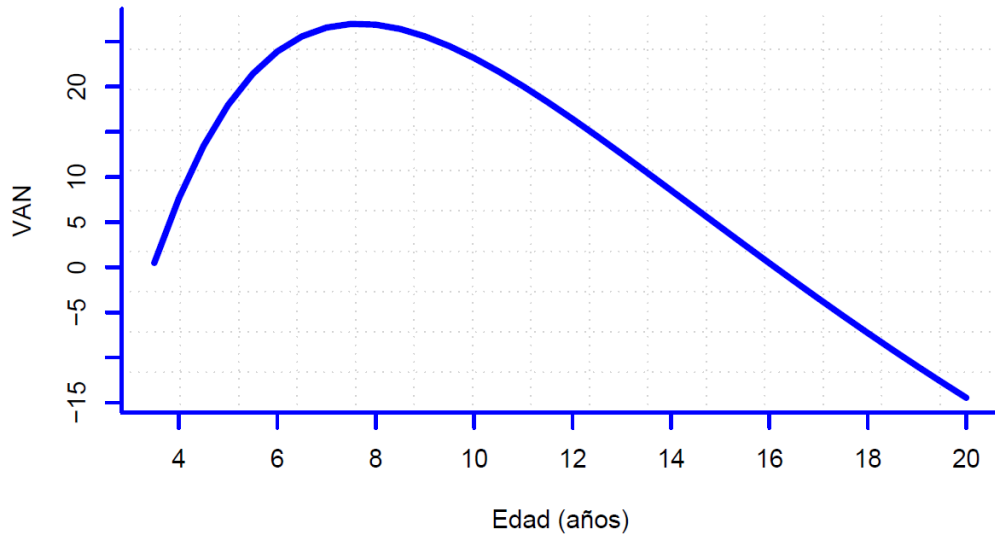


Figura 47: Curva del VAN (Faustman) para *Gmelina arborea*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Con la condición de equilibrio:

$$\frac{\left[\frac{0.4945922(5.4996829)}{t^2} \right] e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)}}{0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)}} - \frac{2}{600 \left(0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)} \right)} = 0.08 \quad (64)$$

Resolviendo (64), se obtiene un valor para t de 7.656 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (59), se obtiene un volumen de 0.241 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Faustman se alcanza a los 7.656 años, con una producción de 0.241 m³/árbol (ver Figura 42).

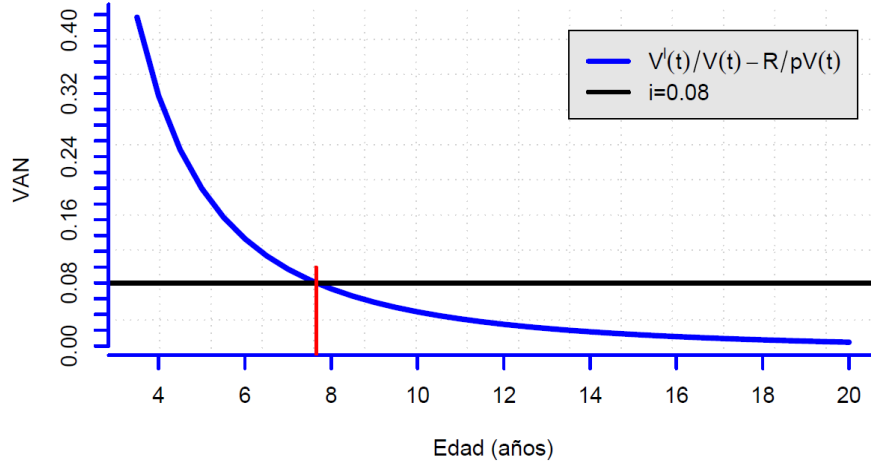


Figura 48: Curva de equilibrio de Faustman para *Gmelina arborea*, derivada de la función Schumacher ajustada.

4.2.2.3. Óptimo ambiental (Hartman)

Sustituyendo los valores de las componentes consideradas en la función de maximización del VAN propuesto por Hartman (p. 97), se tiene que:

$$\text{Máx VAN} = 600 \left(0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)} \right) e^{-0.08(t)} - 40 - 2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt$$

$$107(0.9486) \left[\left(0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)} \right) e^{-0.08(t)} + \right.$$

$$\left. 0.08 \int_0^t \left(0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)} \right) e^{-0.08(t)} dt \right] -$$

$$107(0.9486)(0.10) \left[\left(0.4945922 e^{-5.4996829 \left(\frac{1}{t} \right)} \right) e^{-0.08(t)} \right]$$

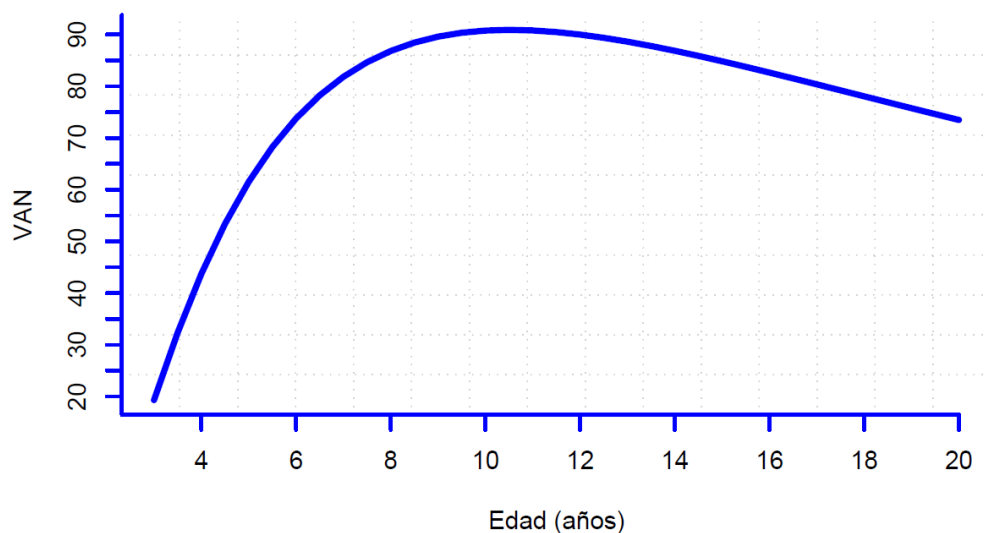


Figura 49: Curva del VAN (Hartman) para *Gmelina arborea*, derivada de la función Schumacher ajustada.

Y la condición de equilibrio:

$$\frac{\left[\frac{0.4945922(5.4996829)}{t^2} \right] e^{-5.4996829\left(\frac{1}{t}\right)}}{0.4945922 e^{-5.4996829\left(\frac{1}{t}\right)}} - \frac{2}{600 \left(0.4945922 e^{-5.4996829\left(\frac{1}{t}\right)} \right)} = 0.08 \quad (65)$$

Resolviendo (65), se obtiene un valor para t de 8.312 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (59), se obtiene un volumen de 0.255 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Hartman se alcanza a los 8.312 años, con una producción de 0.255 m³/árbol (ver Figura 42).

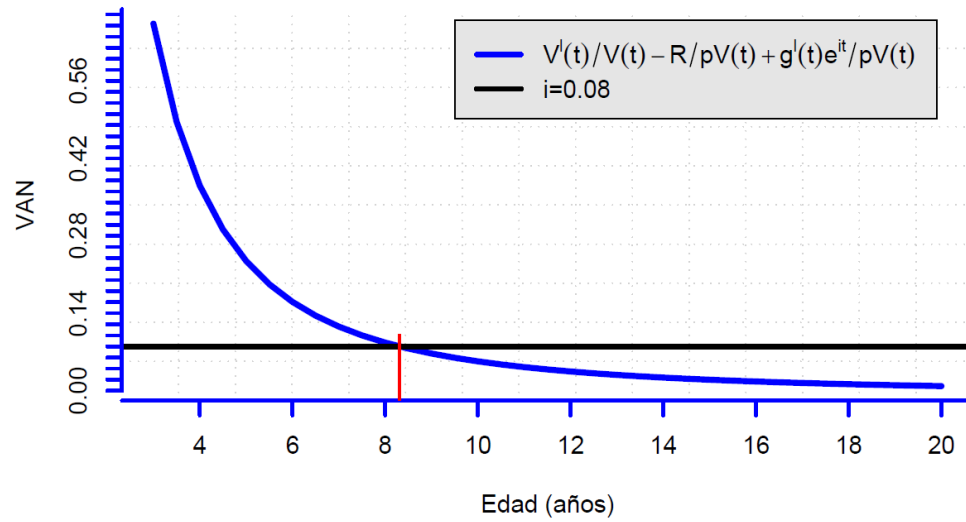


Figura 50: Curva de equilibrio de Hartman para *Gmelina arborea*, derivada de la función Schumacher ajustada.

4.2.3. Modelo Chapman-Richards

4.2.3.1. Óptimos técnicos

Máxima producción total

Del Cuadro 11, se puede observar que la función de producción ajustada tipo Chapman-Richards es:

$$V(t) = 3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}; \forall t \geq 0 \quad (66)$$

Para determinar la máxima producción total se utilizó la función (66), se obtuvo la primera derivada y se igualó a cero.

$$V'(t) = \frac{3.948423657(0.008540686)(1.022817371)e^{-0.008540686t}}{1 - e^{-0.008540686t}}$$

$$(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371} = 0; \forall t \geq 0 \quad (67)$$

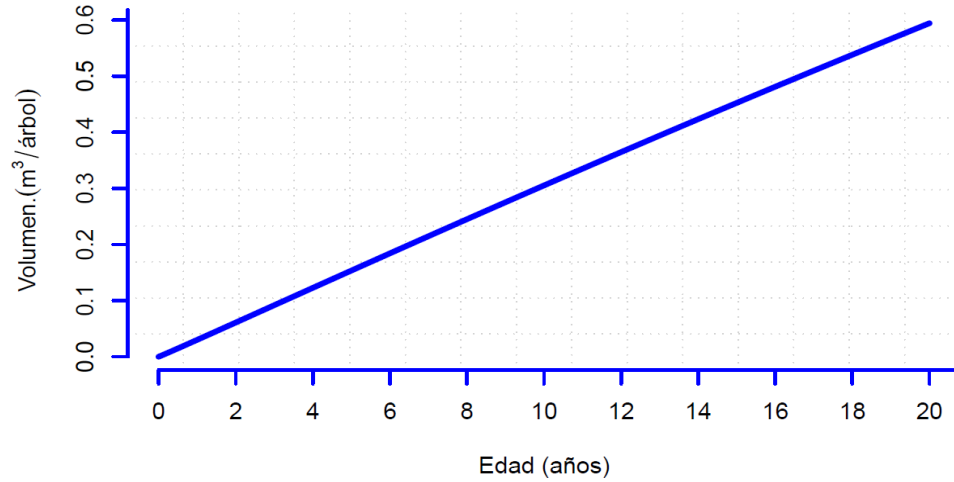


Figura 51: Función de producción para *Gmelina arborea*, empleando el modelo Chapman-Richards ajustado.

En esta ecuación, se puede observar que se complica el cálculo del valor de t , como ocurrió en la función de Schumacher. El valor de t (para que se cumpla la igualdad) se obtiene cuando t tiende a infinito, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V'(t) = 0 \quad (68)$$

Al igual que en el caso de la función Schumacher, al calcular el valor del límite de la función de producción cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx 3.948 \text{ m}^3/\text{árbol}$$

Y discriminar un 10% de la producción final, se tiene:

$$(1 - \alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) \approx (1 - 0.1)3.948 \approx 3.5532 \text{ m}^3/\text{árbol}$$

Donde

α = porcentaje de la producción a discriminar (10% para este caso).

Igualando la ecuación (66) a 3.5532 y resolviendo con respecto a t , este valor es aproximadamente de 200 años. Es decir la máxima producción se obtiene a los 200 años aproximadamente, con una producción de 3.5532 m³/árbol.

En este caso, la función de producción tipo Chapman-Richards no resulta ser un buen modelo para el cálculo de la máxima producción total, debido a que el modelo ajustado solo pronostica 25% a futuro de acuerdo a lo establecido por Montgomery *et al.* (2007). Es decir, predice aceptablemente hasta el año 13.

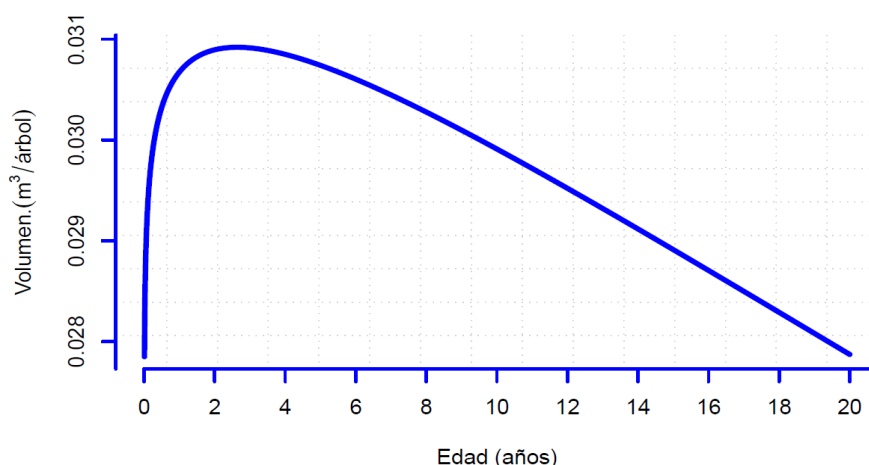


Figura 52: Curva de producción marginal para *Gmelina arborea*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Máxima producción media

Para el cálculo de la máxima producción media, se igualaron las funciones del producto marginal (ecuación 67) y el producto medio, a partir de la ecuación (66), como se muestra a continuación:

$$PMe = \frac{3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}}{t}; \forall t > 0$$

Igualando el PMg y el PMe , se tiene:

$$\frac{3.948423657(0.008540686)(1.022817371)e^{-0.008540686 t}}{1 - e^{-0.008540686 t}} = \frac{3.948423657(1 - e^{-0.008540686 t})^{1.022817371}}{t}; \forall t > 0$$

Resolviendo la ecuación anterior, se obtiene un valor de t de 5.263 años. Sustituyendo este valor en la expresión (66), se obtiene una producción media máxima de 0.085 m³/árbol. Es decir, el aprovechamiento forestal se debe hacer a los 5.263 años después de la siembra para obtener la máxima producción media de 0.085 m³/árbol (ver Figura 51).

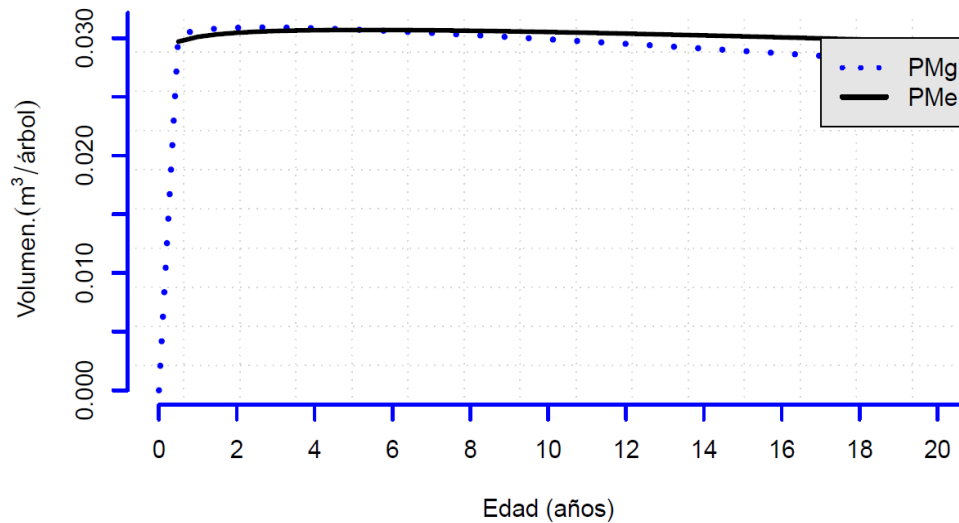


Figura 53: Curvas de producción marginal y producto medio para *Gmelina arborea*, derivadas de la función Chapman-Richards ajustada.

4.2.3.2. Óptimos económicos

Óptimo de Hotelling

Al sustituir la función de producción, el precio de la madera, la tasa de interés y los costos totales del establecimiento de la plantación en el modelo de Hotelling, se tiene el problema siguiente:

$$\text{Máx } VAN = 600[3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}]e^{-0.08(t)} - 40$$

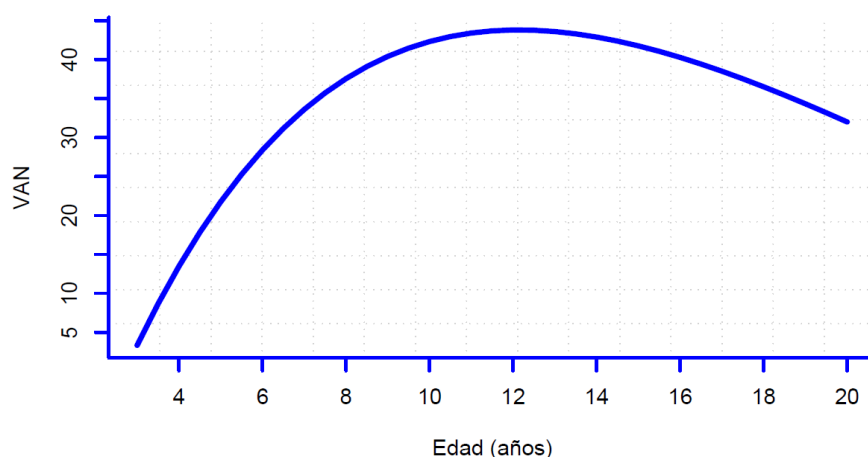


Figura 54: Curva del VAN (Hotelling) para *Gmelina arborea*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Y la ecuación de equilibrio:

$$\frac{3.948423657(0.008540686)(1.022817371)e^{-0.008540686t}}{1 - e^{-0.008540686t}}(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371} = 0.08$$

Resolviendo (69), se obtiene un valor para t de 12.134 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (66), se obtiene un volumen de 0.229 m³/árbol. Es decir, el

óptimo de Hotelling se alcanza a los 12.134 años, con una producción de 0.229 m³/árbol (ver Figura 51).

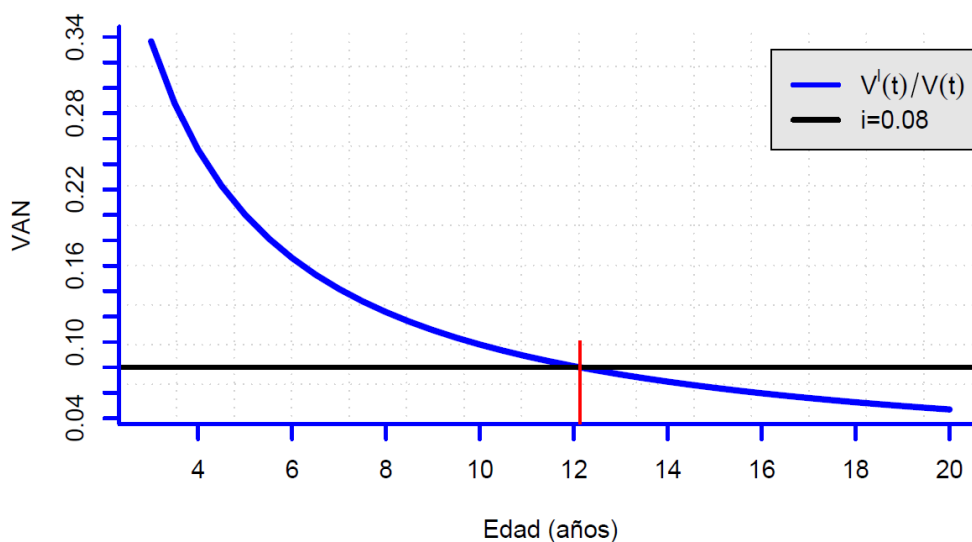


Figura 55: Curva de equilibrio de Hotelling para *Gmelina arborea*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Óptimo de Faustman

Al sustituir en el modelo de Faustman los elementos del modelo de Hotelling y la renta de la tierra, se tiene que:

$$\text{Máx } VAN = 600[3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}]e^{-0.08(t)} - 40$$

$$-2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt$$

Con la condición de equilibrio:

$$\frac{3.948423657(0.008540686)(1.022817371)e^{-0.008540686 t}}{1 - e^{-0.008540686 t}} (1 - e^{-0.008540686 t})^{1.022817371} = \frac{3.948423657(1 - e^{-0.008540686 t})^{1.022817371}}{1 - e^{-0.008540686 t}}$$

$$\frac{2}{600[3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}]} = 0.08 \quad (70)$$

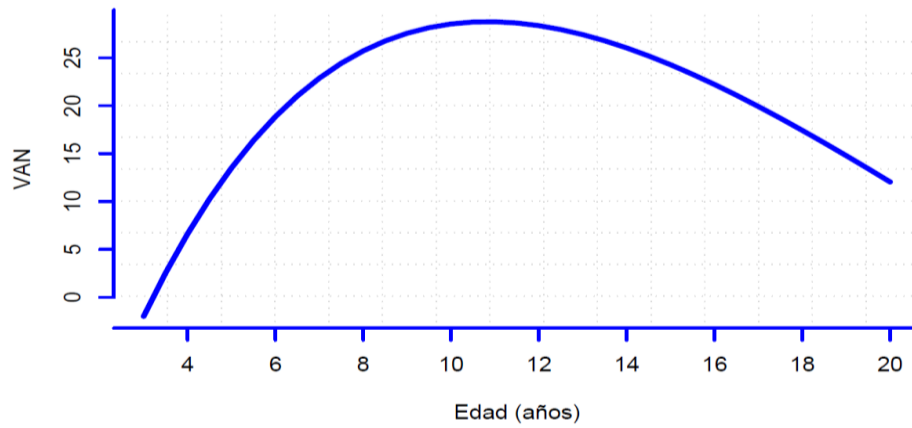


Figura 56: Curva del VAN (Faustman) para *Gmelina arborea*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

Resolviendo (70), se obtiene un valor para t de 10.835 años. Sustituyendo este valor en la función de producción (66), se obtiene un volumen de 0.201 m³/árbol. Es decir, el óptimo de Faustman se alcanza a los 10.835 años, con una producción de 0.201 m³/árbol (ver Figura 51).

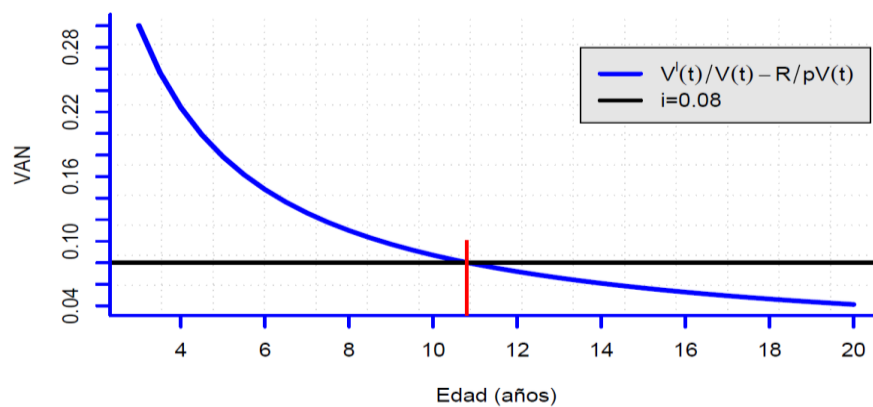


Figura 57: Curva de equilibrio de Faustman para *Gmelina arborea*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

4.2.3.3. Óptimo ambiental (Hartman)

Sustituyendo los valores de las componentes consideradas en la función de maximización del VAN propuesta por Hartman (p. 98), se tiene que:

$$\text{Máx VAN} = 600[3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}]e^{-0.08(t)} - 40$$

$$-2 \int_0^t e^{-0.08(t)} dt + 107(0.9486)[(3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371}) \cdot$$

$$e^{-0.08(t)} + 0.08 \int_0^t (3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371})e^{-0.08(t)} dt \Big]$$

$$-107(0.9486)(0.10)[(3.948423657(1 - e^{-0.008540686t})^{1.022817371})e^{-0.08(t)}]$$

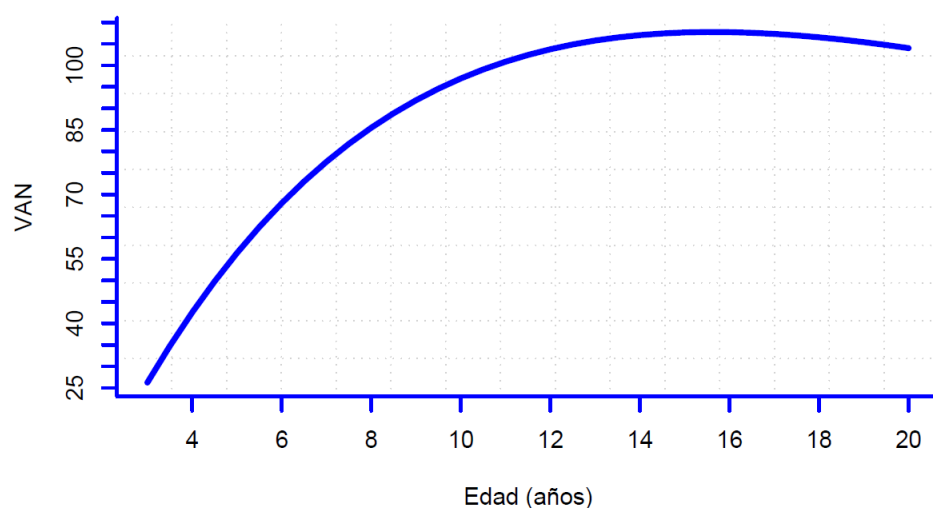


Figura 58: Curva del VAN (Hartman) para de *Gmelina arborea*, derivada de la función Chapman-Richards ajustada.

4.2.4. Resumen

En el Cuadro 12 se presentan los resultados obtenidos para *Gmelina arborea*, de los cinco tipos de óptimos forestales, para los tres modelos de producción (crecimiento).

Cuadro 12: Óptimos Forestales obtenidos para *Gmelina arborea*, utilizando los tres modelos de crecimiento.

Óptimos	Tipo	Polinomial	Schumacher	Chapman-Richards
Técnicos	Máxima producción total	30.673	35.07	---
	Máxima producción media	22.247	5.499	5.263
Económicos	Hotelling	16.402	8.291	12.134
	Faustman	15.630	7.656	10.835
Ambiental	Hartman	17.523	8.312	12.784

4.3. Discusión

Los óptimos forestales obtenidos para las especies analizadas *Eucalyptus grandis* y *Gmelina arborea*, son turnos cortos, comparados con los de otras especies destinadas para aserrío, debido a que ambas especies son de crecimiento rápido. A continuación se presenta una breve comparación de la relación que guardan los cinco óptimos considerados.

1. *Eucalyptus grandis*

- En general, los tres modelos de producción utilizados (Polinomial, Schumacher y Chapman-Richards) presentan buen nivel de ajuste. De los tres, el más sobresaliente es el modelo Schumacher, debido a que presenta la menor suma de

cuadrados de los errores (SCE), 0.00062, y el más alto coeficiente de determinación (R^2), 0.9989.

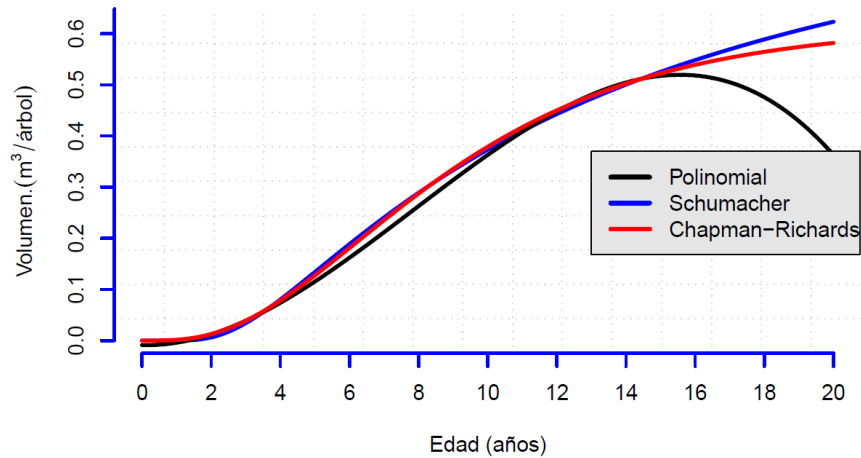


Figura 60. Comparación de los tres modelos de producción ajustados para *Eucalyptus grandis*.

- En el modelo polinomial, la relación que guardan los tipos de óptimos, ordenados de menor a mayor, es: óptimo de Faustman (OF), máxima producción media (MPM), óptimo de Hotelling (OH), óptimo ambiental-Hartman (OA) y máxima producción total (MPT).

$$OF < MPM < OH < OA < MPT$$

- Los modelos Schumacher y Chapman-Richards, presentaron valores similares y la misma relación en los tipos de óptimos, la cual es: máxima producción media (MPM), óptimo de Faustman (OF), óptimo de Hotelling (OH), óptimo ambiental-Hartman (OA) y máxima producción total (MPT).

$$MPM < OF < OH < OA < MPT$$

- Se observa que al comparar este resultado con el del modelo polinomial, solo se invierte la relación entre el óptimo de Faustman (*OF*) y el de máxima producción media (*MPM*).
- Comparando el óptimo de Hartman con el de Hotelling y el de Faustman, se aprecia que al incorporar aspectos ambientales el turno experimenta un incremento que va desde 2.5 hasta 9.9 meses.

2. *Gmelina arborea*

- De los tres modelos de producción, el polinomial presenta el mejor ajuste, con una $SCE=0.00025$ y un $R^2=0.9968$. Los óptimos forestales calculados para este, no están dentro del poder de predicción del modelo ajustado, debido a que pronostica 25% a futuro como máximo, es decir, pronostica aceptablemente hasta el año 13, de acuerdo a lo estipulado por Montgomery *et al.* (2007). Turnos similares fueron obtenidos por Cubero y Rojas (1999), mostrando que los resultados para este modelo son una buena alternativa de aproximación.

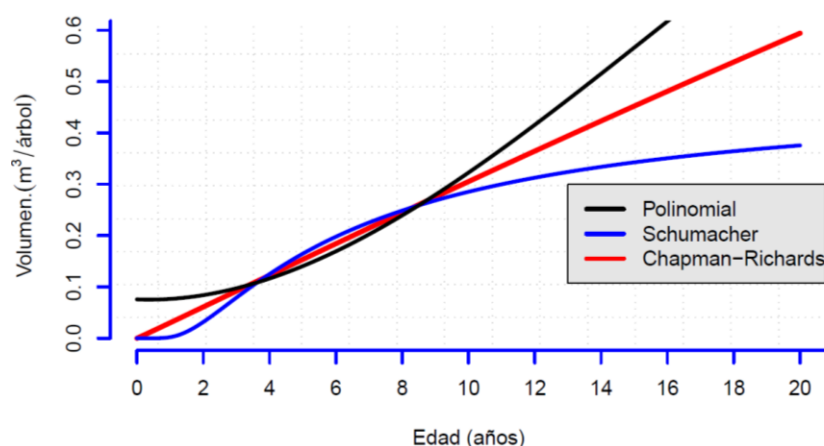


Figura 61. Comparación de los tres modelos de producción ajustados para *Gmelina arborea*.

- En el modelo polinomial, la relación entre óptimos es: óptimo de Faustman (*OF*), óptimo de Hotelling (*OH*), óptimo ambiental-Hartman (*OA*), Máxima producción media (*MPM*) y máxima producción total (*MPT*).

$$OF < OH < OA < MPM < PMT$$

- Los modelos Schumacher y Chapman-Richards, arrojaron resultados similares a los de *Eucalyptus grandis*, la relación obtenida es: máxima producción media (*MPM*), óptimo de Faustman (*OF*), óptimo de Hotelling (*OH*), óptimo ambiental-Hartman (*OA*) y máxima producción total (*MPT*).

$$MPM < OF < OH < OA < MPT$$

- Comparando el óptimo de Hartman con el de Hotelling y el de Faustman, se aprecia que al incorporar aspectos ambientales el turno experimenta un incremento que va desde 1 hasta 23.4 meses

En términos generales, el turno forestal va disminuyendo a medida que se consideran más aspectos económicos en su determinación (vistos como costos), y al incluir aspectos ambientales y recreativos (vistos como ingresos), el turno forestal aumenta.

Para el caso de *Eucalyptus grandis*, datos similares fueron obtenidos en España por Alonso *et al.* (2006) para el óptimo de Faustman, que reportan un turno de 16.34 años, Téllez *et al.* (2008) reportan que para el Estado de Oaxaca, los óptimos económicos oscilaban entre 9 y 13.58 años, y que al incorporar un ingreso por captura de carbono el turno aumentaba entre 12 y 20 meses. De las especies *Eucalyptus grandis* y *Gmelina arborea* la primera presenta crecimiento más acelerado a partir del año 5, provocando óptimos más largos.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Los óptimos normalmente varían, dependiendo de la función de producción (crecimiento) que se esté utilizando, por lo cual es importante contar con datos de producción confiables y a partir de ellos determinar el modelo de mejor ajuste para obtener valores adecuados de los parámetros.

La incorporación de aspectos económicos tales como la tasa de interés, el precio de la madera, los costos de la plantación, el mantenimiento y la extracción, así como el valor de la renta de la tierra, posibilita la obtención de óptimos más realistas y con un mejor impacto en los planes de administración forestal.

Eucalyptus grandis y *Gmelina arborea* son especies exóticas de crecimiento rápido, que registran turnos muy similares en las tres funciones de crecimiento. Solo hay diferencias entre la función polinomial, y las funciones Schumacher y Chapman-Richards para el óptimo de máxima producción media (MPM), debido a que las dos últimas funciones tienen una asíntota horizontal, que alarga el turno forestal.

De ambas especies, la más recomendada es *Eucalyptus grandis*, debido a que presenta crecimiento más acelerado, generando mayor volumen de madera, así como, mayor cantidad de carbono capturado.

Para la función de producción polinomial, la especie que presentó turnos óptimos más cortos es *Eucalyptus grandis*; para la función Schumacher, *Gmelina arborea* presentó

turnos más reducidos; y para la función Chapman-Richards, ambas especies presentaron resultados muy parecidos.

Para ambas especies y para los modelos de producción Schumacher y Chapman-Richards, la relación que guardan los óptimos forestales es la siguiente: máxima producción media (*MPM*), óptimo de Faustman (*OF*), óptimo de Hotelling (*OH*), óptimo ambiental-Hartman (*OA*) y máxima producción total (*MPT*).

$$MPM < OF < OH < OA < MPT$$

En términos económicos, el óptimo de Faustman resulta ser la mejor opción, debido a que se incorporan funciones de gastos más completas en el análisis de optimización.

El ciclo de corta disminuye a medida que se considera un mayor número de aspectos económicos. Sin embargo, aunque el óptimo de Faustman es más completo que el óptimo de Hotelling, se debe tener cuidado en que el ciclo sea viable en términos técnicos y biológicos.

En todos los casos el óptimo de Faustman (*OF*) es menor que el óptimo de Hotelling (*OH*) y éste, a su vez, es menor que el óptimo ambiental (*OA*).

En términos generales, el óptimo de Hartman es la opción más adecuada para un aprovechamiento forestal sustentable, debido a que retoma los aspectos de la propuesta de Faustman e incorpora el valor de servicios ambientales y recreativos que proporciona la plantación. Para el caso estudiado al cuantificar y valorar el carbono capturado (CO_2), se obtuvieron turnos forestales más largos que el turno técnico de *MPM* y los turnos económicos.

El incentivo de los beneficios económicos por la captura de carbono se traduce en un alargamiento del turno, lo cual incrementa el volumen de biomasa, con la posibilidad de obtener más madera para celulosa, y carbono capturado, incrementándose con ello el beneficio social.

5.2. Recomendaciones

Se recomienda realizar estudios posteriores, en los que se incorporen más servicios ambientales al problema propuesto por Hartman, y proponer mejores metodologías para la valoración económica de los bienes y servicios ambientales.

También se recomienda ajustar otro tipo modelos de crecimiento a los datos presentados en los anexos, así, como obtener series de datos más amplias, para comparar los resultados que se obtengan con los presentados en esta investigación.

6. REFERENCIAS

- Arteaga M., B. 2008. Plantaciones forestales en el sureste. Chapingo, México. 174 p.
- Barrios, J. A. *et al.* 2005. Análisis de funciones en economía y empresa. Un enfoque interdisciplinar. Ediciones Díaz de Santos. España. 538 pp.
- Brown, A.G. *et al.* 1997. Plantations for the tropics - Their role, extent and nature. In: Nambiar, E.K.S. and Brown, A.G. (eds.) Management of soil, water and nutrients in tropical plantation forests. Australian Centre for International Agricultural Research (ACIAR), Monograph 43, Canberra. Pp: 1-23.
- Cerdá, E. 2001. Optimización dinámica. Editorial Prentice Hall. Madrid.
- Clutter, J.L. *et al.* 1983. Timber management a quantitative approach. Wiley, New Cork. 333 p.
- Cruz, L. M. 2008. Inclusión de modelos de crecimiento en el método mexicano de ordenación de montes. Tesis de maestría. Universidad Autónoma Chapingo. México. 104 p.
- Cuberos, J. A.; S. R. Rojas. 1999. Fijación de carbono en plantaciones de melina (*Gmelina arborea Roxb*), teca (*Tectona grandis L.f.*) y pochote (*Bombacopsis quinata Jacq.*) en los cantones de Hojancha y Nicoya, Guanacaste, Costa Rica. San José, Costa Rica. 86 p.
- Cumplido, O. R. 2002. Tablas de Volúmenes y de incrementos para tres especies de genero *pinus* de tres predios del estado de Chihuahua, México. Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma Chapingo. México. 114 p.

- De Jong, B.H.J.; G. Montoya-Gómez. 1994. Sustainable management of forest resource: a proposal for the highlands of Chiapas, Mexico. Simposium de análisis de sistemas forestales: administración de una economía global. Pp: 7-17.
- Díaz, B. L. 1997. Turno Forestal Económicamente óptima: una revisión. Revista Española de Economía Agraria, 180. Pp: 181-224.
- Díaz, B. L. 1998. Fundamentos económicos de turno forestal optimo al incorporar diversos bienes y servicios. Revista Española de Estudios Agrosociales y Pesqueros, 184. Pp: 159-182.
- Daly, H.; J. Farley. 2003. Ecological Economics: Principles and applications. Island Press, Washington, DC.
- Enciclopedia de los municipios de Tabasco, México. Disponible en: <http://www.e-local.gob.mx/work/templates/enciclo/tabasco/>. Diciembre de 2010.
- Gay, C.; J, Martínez. 1995. Mitigation of Emissions of Greenhouse Gases in Mexico. Interciencia, 20:6, México D.F. México. Pp. 336-342.
- IPCC, 2007: Cambio climático 2007: Informe de síntesis. Contribución de los Grupos de trabajo I, II y III al Cuarto Informe de evaluación del Grupo Intergubernamental.
- Klepac, D. 1983. Crecimiento e incremento de árboles y masas forestales. Universidad Autónoma Chapingo. Chapingo, México. 365 p.
- Masera, O. 1991. México y el cambio climático global: un balance crítico. Ciencia y Desarrollo. Vol.17.

- Masera, O. 1995. Carbon Mitigation Scenarios for Mexican Forests: Methodological Considerations and Results. *Interciencia*, 20:6. Pp: 388-395.
- Masera, O. 1995. Los Bosques y El Cambio Climático Global. Universidad de México, 536-537. Pp. 43-47.
- Montgomery, D. C., *et al.* 2007. Introducción al análisis de regresión lineal. Tercera edición. Editorial Patria. México. 588 p.
- Montoya, G. 2008. Desarrollo forestal sustentable: Captura de carbono en las zonas tzeltal y tojolabal del estado de Chiapas. Instituto Nacional de Ecología. Edimburgo. 50 p.
- Pienaar, L. V.; K. L. Turnbull. 1973. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's growth model for basal área growth and yield in even-age stands. *For. Sci* 19:2-22.
- Presidencia de la República. Quinto Informe de Gobierno. Anexo Estadístico, 2005.
- Ramírez, M.H.; B. M. Zepeda. 1994. Rendimientos madereros de especies forestales, actualidades de México. Memorias de la IV Reunión Nacional de Plantaciones Forestales. SFFS-INIFAP. México.
- Randall, A. 1985. Economía de los recursos naturales y política ambiental. Primera edición. Editorial Limusa. México DF. 474 p.
- Rentería G, I. 2008. Determinación y análisis económico de óptimos forestales. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma Chapingo. México. 96 p.

- Romero, C. 1997. Economía de los recursos ambientales y naturales. Segunda edición. Alianza editorial. Madrid, España. 214 p.
- Romero, C. 2001. Uso múltiple del bosque: una perspectiva económica. VII ciclo de conferencias Forestales, ETSI montes. Disponible en: <http://da.montes.upm.es/seminarios/siete/usomultiple.htm>. Noviembre de 2010.
- Smith, T.M. *et. al.* 1993. The Global Terrestrial Carbon Cycle. Terrestrial Biospheric Carbon Fluxes: Quantification and Sources of CO₂. Kluwer Academic Publishers, Netherlands. Pp: 19-37.
- Téllez, M. E. *et al.* 2008. Rotación optima en plantaciones de eucalipto al incluir ingresos por captura de carbono en Oaxaca, México. Revista de Fitotecnia. México. Vol. 31(2): 173-182.
- Varian, H. R. 1992. Análisis microeconómico. Traducción: María Esther R, Luis Toharia. 3ª edición. Ed. Antonio Bosch. 637 p.
- Zamudio, S. F. J.; L. D. Ayerde. 1997. Modelos de crecimiento. Revista Chapingo. 3(1): 79-87.
- Zeide, B. 1993. Analysis of growth equations. Forest Science. 39(3): 594-616.

7. ANEXOS

Anexo1: Tabla de Volumen (m³) para *Eucalyptus grandis*.

Edad	Volumen promedio con certeza	Valores estimados de los modelos ajustados		
		Polinomial	Schumacher	Chapman-Richards
0.3	0.00003805000	-0.00872	0.00000	0.00003
1.3	0.00061217047	-0.00040	0.00039	0.00348
1.5	0.00003805000	0.00268	0.00112	0.00541
2.3	0.01840070309	0.01926	0.01207	0.01892
2.8	0.01000000000	0.03280	0.02676	0.03232
4.3	0.10000000000	0.08566	0.09595	0.09220
10.3	0.39000000000	0.37697	0.38465	0.39093
10.8	0.41013972033	0.39952	0.40279	0.40987
12.3	0.43923818600	0.45865	0.45221	0.45905
13	0.47000000000	0.48067	0.47297	0.47833
14	0.50000000000	0.50442	0.50037	0.50222
15	0.53000000000	0.51754	0.52539	0.52229

Fuente: Elaboración propia con datos del Inventarios forestales 2009 y datos de campo de 2010.

Anexo 2: Tabla de Volumen (m³) para *Gmelina arborea*.

Edad	Volumen promedio con corteza	Valores estimados de los modelos ajustados		
		Polinomial	Schumacher	Chapman-Richards
1.3	0.079667203	0.07809	0.00719	0.03934
2.3	0.081315620	0.08734	0.04527	0.07020
2.8	0.093552615	0.09421	0.06938	0.08566
3.3	0.109710637	0.10249	0.09343	0.10112
4.3	0.124800971	0.12309	0.13765	0.13198
5.3	0.145887404	0.14869	0.17522	0.16274
5.8	0.158408070	0.16322	0.19162	0.17808
6.3	0.178741248	0.17884	0.20660	0.19338
7.3	0.221292602	0.21311	0.23284	0.22385
8.3	0.244189929	0.25104	0.25496	0.25417

9.3	0.295749917	0.29219	0.27379	0.28430
10.3	0.335150991	0.33611	0.28997	0.31425

Fuente: Elaboración propia con datos del Inventarios forestales 2009 y datos de campo de 2010.

Anexo 3: Costos de establecimiento de una plantación de *Eucalyptus grandis* y *Gmelina arborea*.

Actividad	<i>Eucalyptus grandis</i>	<i>Gmelina arborea</i>
	Costo(\$/ha)	Costo(\$/ha)
Preparación del terreno	\$1,400.00	\$1,400.00
Apertura de cepas	\$2,600.00	\$2,600.00
Adquisición de planta	\$2,000.00	\$2,500.00
Transporte y acarreo de planta	\$600.00	\$600.00
Plantación	\$1,400.00	\$1,400.00
Mantenimiento 1	\$1,000.00	\$1,000.00
Protección	\$800.00	\$1,000.00
Tratamientos	\$500.00	\$1,130.00
Asistencia técnica	\$2,000.00	\$2,000.00
Carga social	\$1,200.00	\$1,200.00
Administración	\$1,500.00	\$1,500.00
Mantenimiento 2	\$1,000.00	\$1,000.00
Mantenimiento 3	\$500.00	\$500.00
Poda (aserrío)	\$1,500.00	\$1,500.00
Raleo (aserrío)	\$800.00	\$800.00

Cosecha	\$3,700.00	\$3,700.00
Total	\$22,500.00	\$23,830.00

Anexo 4: Costo de herramientas en Balancán, Tabasco, Méx.

Herramientas	Unidad	Costo unitario	Costo total
Pala recta	8	\$70.00	\$560.00
Pala cuchara	8	\$70.00	\$560.00
Abre-hoyos	5	\$400.00	\$2,000.00
Barreta	5	\$100.00	\$500.00
Motosierra	3	\$4,000.00	\$12,000.00
Machete	5	\$60.00	\$300.00
Serrucho	5	\$50.00	\$250.00
Total			\$16,170.00
