

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

**DIVISIÓN DE CIENCIAS FORESTALES
PROGRAMA DE POSGRADO**

**USO DE ESTADÍSTICOS DE ORDEN PARA
CONSTRUIR CURVAS DE ÍNDICE DE SITIO**

T E S I S

**QUE COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN CIENCIAS
EN CIENCIAS FORESTALES**



P R E S E N T A:

JOSÉ AMBROSIO BOJORGES SOSA

**Chapingo, México, Edo. de México
Diciembre de 2000**

1313 94696

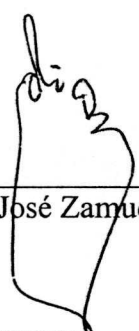


USO DE ESTADÍSTICOS DE ORDEN PARA CONSTRUIR CURVAS DE ÍNDICE DE SITIO

Tesis realizada por **José Ambrosio Bojorges Sosa** bajo la dirección del Comité Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIAS FORESTALES

DIRECTOR:



Dr. Francisco José Zamudio Sánchez

ASESOR:



Dr. Hugo Ramírez Maldonado

ASESOR:



Dr. Aurelio Manuel Fierros González

4.37743

USO DE ESTADÍSTICOS DE ORDEN PARA CONSTRUIR CURVAS DE ÍNDICE DE SITIO

El jurado que revisó y aprobó el examen de grado de **José Ambrosio Bojorges Sosa** autor de la presente tesis de Maestría en Ciencias en Ciencias Forestales estuvo constituido por:

PRESIDENTE:



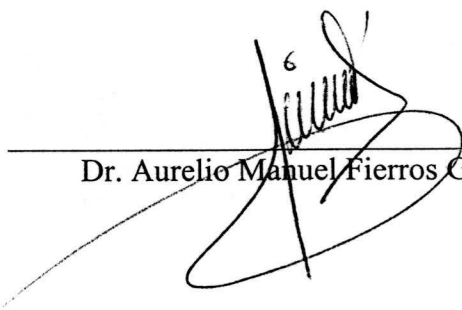
Dr. Francisco José Zamudio Sánchez

ASESOR:



Dr. Hugo Ramírez Maldonado

ASESOR:



Dr. Aurelio Manuel Fierros González

AGRADECIMIENTOS

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme brindado el apoyo económico que fue fundamental para que me preparara aún más en mi vida profesional y sin el cual no hubiese sido posible.

A la División de Ciencias Forestales de la Universidad Autónoma Chapingo, por permitirme realizar mis estudios de posgrado.

Al Dr. Francisco J. Zamudio Sánchez por la codirección, el apoyo brindado y el tiempo que me dedicó al desarrollar este trabajo. Además le agradezco sinceramente el darme la oportunidad de realizar el trabajo de investigación, que fue una idea de él.

Al Dr. Hugo Ramírez Maldonado por la codirección, el apoyo brindado y el tiempo que me dedicó, para que me superara. Agradezco su apoyo con gran respeto, ya que de no ser por su insistencia en mi superación yo no hubiera logrado realizar y concluir esta etapa de mi preparación.

Al Dr. Aurelio M. Fierros González, por la amistad que me ha brindado y su apoyo en la revisión del documento final.

Al Ing. Carlos Francisco Romahn de la Vega, por la gran amistad que tenemos, por sus sugerencias realizadas al documento y su valioso apoyo incondicional.

Al M. C. Baldemar Arteaga Martínez, por su gran apoyo en mis estudios y la amistad que me ha brindado.

A los profesores del Departamento de la División de Ciencias Forestales del Programa de Posgrado, por su gran aportación educativa.

DEDICATORIA

A mis padres Reyes y Georgina por brindarme todo su apoyo incondicional e inducirme a mi superación y que gracias a ellos logré realizar todos mis estudios de preparación profesional.

A mi esposa Margarita por su gran comprensión y el apoyo brindado en todo momento.

A mis hijas Cinthia, Indira, Kenya y Lupita; las cuales son la adoración de mi vida y mi estímulo de superación.

A mis hermanos y sobrinos, a los cuales quiero.

A mis compañeros de la generación 1998-1999 del posgrado, por la amistad que nos unió y los tiempos difíciles que compartimos durante nuestra preparación.

DATOS BIOGRÁFICOS

El autor nació el día 7 de diciembre de 1960, en Santa María Chiconcuac, Estado de México. Desde su infancia radica en Texcoco, Estado de México.

Realizo sus estudios en:

- Primaria: Centro Escolar Netzahualcoyotl de 1967 a 1973.
- Secundaria: Escuela Secundaria Federal “Ignacio Ramírez” de 1973 a 1976.
- Preparatoria: Escuela Preparatoria Texcoco de 1976 a 1979.
- Universidad: Universidad Autónoma Chapingo de 1979 a 1984.

Después de terminar en la Universidad Autónoma Chapingo con la especialidad de Ingeniero Agrónomo Especialista en Bosques en el año 1984, entra a trabajar a PROFORMEX (Productos Forestales Mexicanos) en el Estado de Durango, como Jefe del Departamento de Abastecimiento Forestal hasta el año 1988.

Más tarde, de 1990 hasta la fecha se encuentra laborando en la Universidad Autónoma Chapingo.

RESUMEN

USO DE ESTADÍSTICOS DE ORDEN PARA CONSTRUIR CURVAS DE ÍNDICE DE SITIO

José Ambrosio Bojorges Sosa

División de Ciencias Forestales, Universidad Autónoma Chapingo

Diciembre de 2000

(Bajo la dirección de los CC. Dr. Francisco José Zamudio Sánchez)

Una de las herramientas que contribuyen al mejor manejo de un bosque es el conocimiento de la calidad del sitio. La forma común de calificarla actualmente es el índice de sitio, que es la altura de los árboles dominantes y codominantes de un rodal a cierta edad base.

En el presente estudio se generaron curvas anamórficas y polimórficas de índice de sitio para oyamel (*Abies religiosa* Schl. et Cham.), con una edad base de 50 años en la Estación Forestal Experimental Zoquiapan (EFEZ), estado de México. Se trabajó con datos de análisis troncal de 30 árboles dominantes, los que generaron 432 observaciones altura-edad.

Las curvas se obtuvieron por el método de la curva guía, usando el modelo de crecimiento Weibull, ajustado por regresión no-lineal. Con el modelo ajustado se construyeron curvas de índice de sitio anamórficas y polimórficas.

La curva guía es el ajuste que se obtiene para la esperanza de la altura dada una edad, en particular para la edad base. Al identificar la distribución de las alturas en la edad base como Weibull nos permite conocer la distribución correspondiente a cada estadístico de orden de las alturas en la edad base, como estos están relacionados con la esperanza de las alturas en la edad mencionada (de hecho en cualquier edad) se pueden usar para construir otras curvas ordenadas, fundamentalmente la asociada al máximo y mínimo estadístico de orden.

Con los datos de altura en una vecindad de la edad base se obtuvieron estimadores de los parámetros de esa distribución y se obtuvieron estimadores de las medias de los estadísticos de orden de esa distribución. Se ensayo el mismo procedimiento con una vecindad menor y los resultados fueron análogos, aunque el intervalo de las medias de los estadísticos de orden se acortó.

El procedimiento resultó adecuado para sugerir la posición de las curvas de crecimiento en altura de los árboles que tienen la edad base en la muestra. Estas sugerencias son auxiliares en la fijación de los índices de sitio que se emplean en el manejo forestal.

Palabras clave: Calidad de sitio, índice de sitio, crecimiento, curvas anamórficas y polimórficas, *Abies religiosa* Schl. et Cham., oyamel.

ABSTRACT

USE OF ORDER STATISTICS TO BUILD SITE INDEX CURVES

José Ambrosio Bojorges Sosa

División de Ciencias Forestales, Universidad Autónoma Chapingo

December of 2000

(Direction of Dr. Francisco José Zamudio Sánchez)

One of the main tools in forest management involves the knowledge of site quality. The usual approach to qualify site quality is the site index criteria, which is defined as the height of dominant and codominant trees at a certain age.

Anamorphic and polymorphic curves were generated for sacred fir (*Abies religiosa* Schl. et Cham.), base age 50 years, on the Experimental Forest Station Zoquiapan (EFSZ), state of Mexico. Stem analysis data of 30 dominant trees were used, generating 432 observations height-age.

The curves were obtained by the guide curve method, using the Weibull pattern of growth, linear adjusted by non-linear regression. The adjusted equations were used to build anamorphic and polymorphic site index curves.

The guide curve is the expected height at a certain age, in particular at base age. Identifying the distribution of height at base age as a Weibull it is possible to know the corresponding distribution of each order statistics are related to the expected value of the heights at that age (in fact to any age) it is possible to use then to build other curves, basically those associated with the smallest and the larger order statistics.

At base age a Weibull distribution was proposed for the tree heights. With data of height in a vicinity of base age the parameters of that distribution were obtained. The estimates of the order statistics for that distribution were obtained. The statistics of order allow to suggest the points where the growth curves would pass. We tried a shorter vicinity and the results were similar, suggesting that the method is quite robust.

The procedure was appropriate to suggest the position of the growth curves in height of the trees that have the base age on the sample. These suggestions are auxiliary in the fixation of the place indexes used in forest management.

Key words: site quality, site index, growth, anamorphic curves and polymorphic curves, *Abies religiosa* Schl. et Cham., sacred fir, oyamel.

ÍNDICE

RESUMEN.....	vii
ABSTRACT.....	viii
ÍNDICE DE CUADROS.....	xii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xiii
ÍNDICE DEL APÉNDICE.....	xiv
1 INTRODUCCIÓN	1
2 REVISIÓN DE LITERATURA.....	4
2.1 De la especie	4
2.2 Concepto de modelo matemático	5
2.2.1 Importancia de los modelos matemáticos en el crecimiento.....	5
2.3 Funciones de crecimiento.....	6
2.3.1 Modelo de Schumacher.....	7
2.3.2 Modelo de Chapman–Richards	7
2.3.3 Modelo Weibull	8
2.4 Del índice de sitio y métodos de evaluación.....	10
2.4.1 Calidad del sitio	11
2.4.2 Métodos para estimar calidad de sitio.....	13
2.4.3 Método del índice de sitio	15
2.4.4 Curvas de índice de sitio	15
2.4.4.1 Métodos para coleccionar datos de campo	17
2.4.5 Métodos de ajuste de curvas de índice de sitio	19
2.5 Ecuaciones utilizadas para construir familias de curvas de índice de sitio.....	20
2.5.1 Curvas anamórficas por el método de curva guía	20
2.5.1.1 Ecuación de Schumacher	20
2.5.1.2 Ecuación de Chapman–Richards.....	21
2.5.1.3 Ecuación Weibull	22
2.5.2 Curvas polimórficas con método de curva guía.....	23
2.5.2.1 Ecuación de Schumacher	23
2.5.2.2 Ecuación de Chapman–Richards.....	24
2.5.2.3 Ecuación Weibull	24
2.5.3 Curvas anamórficas con método de diferencia algebraica.....	25
2.5.3.1 Ecuación de Schumacher	25
2.5.3.2 Ecuación de Chapman–Richards.....	25
2.5.3.3 Ecuación Weibull	26
2.5.4 Curvas polimórficas con método de diferencia algebraica	26

2.5.4.1	Ecuación de Schumacher	26
2.5.4.2	Ecuación de Chapman–Richards.....	28
2.5.4.3	Ecuación Weibull	29
2.5.5	Curvas polimórficas con método de predicción de parámetros	30
2.5.6	Curvas polimórficas con método de ecuaciones diferenciales.....	31
2.6	Estudios sobre índice de sitio en México	33
2.6.1	Estudios epidométricos en oyamel.....	37
2.7	Estadísticos de orden.....	39
2.7.1	Estadísticos de orden en la función de distribución Weibull	40
2.7.1.1	Definición y comentarios históricos	41
2.7.1.2	Génesis	42
2.7.1.3	Propiedades	43
2.7.1.4	Caracterización.....	47
2.7.1.5	Estadísticos de orden.....	47
2.7.1.6	Estimación.....	49
2.7.1.6.1	Máxima verosimilitud	49
3	DESCRIPCIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO	53
3.1	Situación geográfica.....	53
3.2	Topografía	53
3.3	Clima	54
3.4	Geología	54
3.5	Hidrología	55
3.6	Suelos	55
3.7	Vegetación	55
4	MÉTODOS	57
4.1	Selección del arbolado	57
4.2	Derribo y seccionamiento	58
4.3	Materiales y equipo	58
4.4	Trabajo de gabinete	59
4.4.1	Análisis troncal	59
4.4.2	Procesamiento de datos	59
4.4.3	Curvas de índice de sitio	59
5	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	62
5.1	Análisis troncal	62
5.2	Base de datos.....	63
5.3	Curvas de índice de sitio forma tradicional.....	63
5.3.1	Ajuste de la curva guía empleando el modelo de Weibull.....	63
5.3.2	Asignación arbitraria de etiquetas.....	65
5.3.3	Asignación referida a la amplitud dada por la muestra.....	66
5.3.4	Asignación de etiquetas basándose en una distribución normal	67
5.4	Curvas de índice de sitio con estadísticos de orden	72
5.4.1	Construcción de curvas de índice de sitio, usando estadísticos de orden	81
5.4.2	Weibull anamórfica.....	82
5.4.3	Weibull polimórfica	92

5.4.4	Schumacher anamórfica	99
5.4.5	Schumacher polimórfica	99
5.4.6	Chapman Richards anamórfica	100
5.4.7	Chapman Richards polimórfica.....	101
5.4.8	Un modelo de crecimiento en general.....	102
6	CONCLUSIONES	104
7	LITERATURA CITADA	105
8	APÉNDICE.....	113

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1. Momentos de la distribución Weibull.	46
Cuadro 2. Distribución de frecuencias de los 432 pares de datos.	63
Cuadro 3. Análisis de la varianza y parámetros estimados para la curva guía con PROC NLIN, Método Marquardt de SAS.	64
Cuadro 4. Datos de altura en la vecindad de edad 48 a 52 años.	67
Cuadro 5. Valores de “t” y sus correspondientes etiquetas (Índices de Sitio).	69
Cuadro 6. Valores de “t” y sus correspondientes etiquetas (Índices de Sitio).	70
Cuadro 7. Valores de “t” y sus correspondientes etiquetas (Índices de Sitio).	71
Cuadro 8. Datos de altura en la vecindad de edad 49 a 51 años.	72
Cuadro 9. Comparación de estimadores de parámetros de la función de distribución de probabilidades Weibull, para 21 árboles de <i>Abies religiosa</i> en Zoquiapan, México.	75
Cuadro 10. Comparación de estimadores de parámetros de la función de distribución de probabilidades Weibull, para 11 árboles de <i>Abies religiosa</i> en Zoquiapan, México.	76
Cuadro 11. Valores de Δ_r para las estimaciones (Dubey) obtenidas en los Cuadros 9 y 10.	87
Cuadro 12. Índices de sitio obtenidos con los estadísticos de orden.	87
Cuadro 13. Valores en alturas de las curvas de <i>Abies religiosa</i> originadas por la ecuación (93) del tipo anamórfico, con 21 árboles.	88
Cuadro 14. Valores en alturas de las curvas de <i>Abies religiosa</i> originadas por la ecuación (93a) del tipo anamórfico, con 11 árboles.	89
Cuadro 15. Valores en alturas de las curvas de <i>Abies religiosa</i> originadas por la ecuación (100) del tipo polimórfico, con 21 árboles.	95
Cuadro 16. Valores en alturas de las curvas de <i>Abies religiosa</i> originadas por la ecuación (100a) del tipo polimórfico, con 11 árboles.	96

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Función de densidad Weibull.	44
Figura 2. Grafica de dispersión de los 30 árboles.	62
Figura 3. Índice de sitio para <i>Abies religiosa</i> Schl. et Cham. con etiquetas asignadas arbitrariamente.	65
Figura 4. Índice de sitio para <i>Abies religiosa</i> Schl. et Cham. referida a la amplitud dada por la muestra.	66
Figura 5. Familia de curvas de índice de sitio producidas con los datos del Cuadro 6....	71
Figura 6. Familia de curvas de índice de sitio producidas con los datos del Cuadro 7....	72
Figura 7. Graficas obtenidas con el Cuadro 9, para 21 árboles.....	77
Figura 8. Distribución Weibull, obtenida con la ecuación (82).	78
Figura 9. Grafica de la distribución Weibull y el primer estadístico de orden.	80
Figura 10. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 21$ y Curva guía).	90
Figura 11. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 5, 18, 21$ y Curva guía).	90
Figura 12. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 11$ y Curva guía).	91
Figura 13. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 4, 8, 11$ y Curva guía).	91
Figura 14. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 21$ y Curva guía).	97
Figura 15. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 5, 18, 21$ y Curva guía).	97
Figura 16. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 11$ y Curva guía).	98
Figura 17. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 4, 8, 11$ y Curva guía).	98

ÍNDICE DEL APÉNDICE

Cuadro 1. Datos de análisis troncales de 30 árboles <i>Abies religiosa</i> en Zoquiapan, México.	112
--	-----

1 INTRODUCCIÓN

México es un país de aptitud forestal, que por su ubicación geográfica posee los tres principales ecosistemas reconocidos en el mundo: bosques, selvas y desiertos. Por la extensión de su cobertura vegetal ocupa el decimotercer lugar en el contexto internacional y el cuarto por su biodiversidad (Subsecretaría Forestal y de Fauna Silvestre, 1994).

El 72 % de la superficie del país es forestal con un total de 141.7 millones de hectáreas. La superficie total arbolada nacional se calculó para 1994 en 56.8 millones de hectáreas, la cual se integra por bosques de coníferas y hojosas que cubren 30.4 millones de hectáreas y por selvas altas, medianas y bajas en una extensión de 26.4 millones de hectáreas (Subsecretaría Forestal y de Fauna Silvestre, 1994).

La producción de madera en México está basada principalmente en el aprovechamiento de coníferas. El Inventario Nacional Periódico reporta que en 1994 se produjeron 7.7 millones de metros cúbicos en rollo (m^3r) de productos maderables; de ese volumen el 86.8 % correspondió a coníferas, dentro de las cuales la mayor proporción fue del género *Pinus* con 83 %. Por otra parte, del género *Abies* (oyamel) se aprovecharon 252,605 m^3r , que representan un 3.3 % del volumen total y 3.8 % del volumen de coníferas. Si bien este volumen representa una proporción baja, su relevancia es mayor si se considera la superficie de bosques de oyamel que existen en el país es reducida. En México el oyamel se encuentra distribuido entre los 17° 30' y 21° 00' latitud Norte y

entre los 97-104° longitud Oeste, ocupando una superficie aproximada de 50,000 ha (Manzanilla, 1974). Relacionando esos datos se tiene un aprovechamiento aproximado de 5 m³r/ha/año. Su uso principal es para la producción de pasta para papel y escuadria.

A pesar de que el oyamel ha sido aprovechado desde hace mucho tiempo y aporta volúmenes considerables en relación a las superficies aprovechadas, no existen aún en México trabajos de investigación orientados a fundamentar métodos de manejo para bosques de ese tipo. Básicamente, la mayoría de los esfuerzos se han orientado a los bosques de pino, extrapolando sus resultados para el manejo de las masas de oyamel.

El conocimiento del comportamiento de los rodales de oyamel habrá de propiciar un aprovechamiento más racional de esos bosques. Para proponer esquemas de manejo es necesario generar información acerca del crecimiento en diferentes dimensiones del arbolado; básicamente altura, diámetro y volumen (Bojorges, 1990).

Uno de los factores más importantes que influyen en el crecimiento de los rodales forestales es la calidad de estación, que es la capacidad productiva de un terreno para cierta especie. Una forma de calificar la calidad de estación es a través del *índice de sitio*, que es la altura que los árboles dominantes y codominantes alcanzan a cierta edad (Clutter y otros, 1992).

Actualmente el manejo de los recursos forestales se ha intensificado ya que la demanda de productos y servicios crece rápidamente. Pero al mismo tiempo se exige la sustentabilidad y por ello crece la importancia de la cuantificación del rendimiento potencial de diferentes especies, en diferentes lugares y bajo diferentes alternativas de manejo; el conocer la magnitud de esa cuantía es, sin duda, el primer paso para el adecuado manejo de los recursos naturales.

OBJETIVO

En vista de la importancia que *Abies religiosa* Schl. et Cham. en la producción forestal y en la conservación de esos recursos, es necesario generar información que fundamente el manejo adecuado de los bosques de esta especie, por lo que este trabajo tiene como objetivo generar un procedimiento para elaborar curvas de índice de sitio, mediante el uso de estadísticos de orden para determinar los límites superior e inferior de esas curvas y la amplitud que tendrá cada una de las categorías que se formen, para bosques de la Estación Forestal Experimental Zoquiapan de la Universidad Autónoma Chapingo.

Objetivo específico

El uso de los estadísticos de orden, para determinar el rango de amplitud que tendrá cada índice de sitio.

2 REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 De la especie

Humboldt y Bonpland clasificaron la especie por primera vez en 1803. La descripción original se encuentra en Humboldt, Bonpland y Kunth (1817) bajo la denominación *Pinus religiosa*. El nombre actual, *Abies religiosa*, fue dado por primera vez por Schlechtendahl y Chamisso en 1830. El género tiene de 6 a 8 especies distribuidas en México (Martínez, 1963; Rzedowski, 1983).

Abies religiosa (H. B. K.) Schl. et Cham. (oyamel), es la especie más importante económicamente. Según Martínez (1963), el oyamel se distribuye en el Distrito Federal y en los estados de Hidalgo, Puebla, Veracruz, Michoacán, Jalisco, Morelos, México, Guerrero y Tlaxcala. Otros autores incluyen a San Luis Potosí, Nuevo León y Sinaloa, (Standley, 1920; Palmer, 1880; Ortega, 1962; citados por Manzanilla, 1974). Se encuentra en altitudes desde 2,100 hasta 3,600 msnm (Madrigal, 1967).

El oyamel prospera en áreas sombreadas y húmedas con cierta pendiente, como las barrancas con alta humedad ambiental. Los rodales de oyamel se presentan puros en pequeños manchones y a veces mezclados principalmente con diversas especies del género *Pinus*, aunque también ocurren *Quercus* spp., *Alnus* spp., *Arctostaphylos* spp., y *Arbutus* spp. (Manzanilla, 1974).

La madera de oyamel se usa principalmente para la elaboración de pasta para papel. También puede dedicarse para usos diversos por carecer de sabor, olor y tener un bajo contenido de resina. Se ha reportado el uso de oyamel para obtener chapa. En construcciones rurales se usa para tablillas de techado (tejamanil).

2.2 Concepto de modelo matemático

El concepto de modelo matemático podríamos definirlo como una representación teórica que simula el comportamiento o la actividad de un sistema, proceso o fenómeno, el cual incluye el uso de ecuaciones matemáticas y herramientas de cómputo. En el caso que nos ocupa los modelos se usan principalmente para describir el crecimiento de los árboles a través del tiempo.

2.2.1 Importancia de los modelos matemáticos en el crecimiento

Tanto en la silvicultura como en la biología, sociología y economía, se han intentado gran número de formas de expresar el crecimiento con una fórmula matemática. Una de las razones que motivan lo anterior es la adecuada planeación a largo plazo que la silvicultura requiere con información confiable acerca del rendimiento y crecimiento de las masas forestales (Prodan, 1968).

Algunos autores han cuestionado la aplicación de las ecuaciones y modelos matemáticos en la investigación del crecimiento, indicando que el fenómeno del crecimiento difícilmente puede ser expresado por medio de una función matemática. Mendoza en 1983 señala que las ecuaciones matemáticas que a veces parecen muy complejas, en

realidad ofrecen mayor accesibilidad al entendimiento humano de los fenómenos biológicos.

El incremento de árboles y masas forestales se ve afectado en gran medida por diversos factores, muchos de los cuales son difíciles de medir y más complejo aún, determinar e interpretar su influencia sobre el crecimiento (Ramírez, 1983).

2.3 Funciones de crecimiento

Todos los seres vivos son capaces de crecer en varias etapas de su vida, en condiciones adecuadas pueden cambiar principalmente en tamaño, forma y/o número (Hunt, 1990). Sin embargo, el crecimiento se refiere comúnmente a los cambios que presenta un sistema orgánico, como un aumento en tamaño que puede ser medido en longitud, diámetro o peso (Bertalanffy, 1951; citado por Prodan, 1968). De acuerdo al tipo de variable, el crecimiento puede ser unidireccional (altura, diámetro) bidireccional (área basal) y/o tridimensional (volumen).

Al analizar aspectos de desarrollo de las plantas es difícil definir si han crecido o no. Un ejemplo de lo anterior, es cuando una semilla se desarrolla en una plántula o cuando una planta alcanza la etapa reproductiva y comienza a producir flores y frutos y se pierde biomasa; algo similar pasa si una planta produce varios vástagos y muere, y la suma de la biomasa de todos ellos es menor que la biomasa de la planta madre (Franco, 1983).

Dentro de las funciones más utilizadas para predecir el crecimiento de diversos organismos, han estado los modelos de Schumacher, Chapman-Richards y Weibull, principalmente para modelar diámetro (D), altura (h) y altura dominante (H) para construir curvas de índice de sitio (Ramírez, 1981).

2.3.1 Modelo de Schumacher

Schumacher (1939) desarrolló un modelo que relaciona el volumen de la madera de un árbol con su edad. El principal supuesto del modelo es que el crecimiento relativo (o proporcional) varía inversamente a la edad. Lo anterior implica que a medida que la edad aumenta, la tasa de crecimiento disminuye. Por su comportamiento, el modelo puede usarse también con otras variables del árbol.

De acuerdo con Clutter y otros (1992), el modelo de Schumacher es muy utilizado para generar curvas anamórficas de índice de sitio, expresando la ecuación como:

$$H = \beta_1 e^{-\beta_2 \left(\frac{1}{E}\right)} \quad (1)$$

donde:

H = altura dominante (m)

E = edad (años)

e = base de los logaritmos naturales

β_i = parámetros a ser estimados

2.3.2 Modelo de Chapman-Richards

El modelo de Chapman-Richards se considera como una generalización del modelo de crecimiento de Von Bertalanffy, mismo que es una expresión matemática de una hipótesis que implica las causas esenciales del fenómeno de crecimiento; además, los parámetros en el modelo tienen interpretación biológica o fisiológica (Pienaar y

Turnbull, 1973), características deseables para representar el crecimiento biológico de los árboles a través de una ecuación.

Richards (1959) en estudios de crecimiento de plantas y Chapman (1961) en crecimiento de peces, respectivamente, discutieron que la relación alométrica de Von Bertalanffy de $2/3$ era muy restrictiva para aplicarla a diferentes formas de vida. Ambos autores sugirieron que el valor de la constante debe ser indefinido. Ellos propusieron una generalización del modelo, el cual tuviera amplias aplicaciones en estudios biológicos (Pienaar y Turnbull, 1973; Zamudio y Ayerde, 1997).

El modelo de crecimiento de Chapman-Richards, aplicado a índice de sitio, suele representarse de la forma siguiente (Clutter y otros, 1992):

$$H = \beta_1 (1 - e^{-\beta_2 E})^{\beta_3} \quad (2)$$

donde:

H = altura dominante (m)

E = edad (años)

e = base de los logaritmos naturales

β_i = parámetros a ser estimados

2.3.3 Modelo Weibull

Las curvas de crecimiento e incremento típicas, se parecen a una función de distribución acumulativa (fda) y a una función de densidad (fd), respectivamente. Así como una función de distribución acumulativa es la integral de su función de densidad, la función

de crecimiento de un organismo es el valor acumulativo de su incremento (Yang y otros, 1978).

La analogía entre una curva de crecimiento sigmoideal y una función de distribución acumulativa, fue descrita por Prodan (1968), concluyendo que es posible su adaptación a estudios de crecimiento y rendimiento.

Una función de distribución de probabilidad tiene valores entre 0 y 1, por lo que al agregar un factor de proporcionalidad (multiplicador) a la función se puede describir el crecimiento de un organismo. Comúnmente, el factor de escala es el valor superior asintótico que alcanza un organismo en la característica estudiada y determinado por la naturaleza genética y los factores ambientales limitantes (Yang y otros, 1978).

Fisher y Tippett en 1928 derivaron una función de distribución al desarrollar estudios sobre valores extremos (Magaña y otros, 1992). Esta misma función fue derivada y presentada por Weibull (1939a) como una función adecuada para el estudio de confiabilidad de materiales. A partir de entonces se le han encontrado propiedades para modelar el crecimiento de los árboles (Bailey y Dell, 1973).

La función de distribución acumulativa Weibull está dada por:

$$F_X(x) = 1 - e^{\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} \quad (3)$$

donde:

a = parámetro de localización b = parámetro de escala o proporcionalidad

c = parámetro de forma x = variable bajo estudio

e = base de los logaritmos naturales

Para estudios de crecimiento se toma a la variable “ x ” como el tiempo (edad) y F como la variable del organismo que incrementa con el aumento de “ x ”. Como el valor de F se incrementa entre cero y uno, estos valores son multiplicados por cierta asíntota A , originando la ecuación modificada siguiente:

$$F_x(x) = A \left(1 - e^{\left(\frac{x-a}{b} \right)^c} \right) \quad (4)$$

Esta misma ecuación puede ser redefinida, para $a=0$, como

$$H = \beta_1 \left(1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}} \right) \quad (5)$$

Que es el modelo de crecimiento de Weibull, donde H será igual a la altura dominante cuando se construyen ecuaciones de índice de sitio y E es la edad.

2.4 Del índice de sitio y métodos de evaluación

En la terminología forestal, el sitio incluye tanto la posición en el espacio que ocupa un bosque a parte de él, así como las condiciones del ambiente asociado. El término sitio lleva primeramente a una connotación de localización geográfica y su significado envuelve también a la totalidad de las condiciones del ambiente (bióticas, edáficas y climáticas) que existen en una localidad particular. Esta distinción puede visualizarse mejor desde el punto de vista ecológico, donde una localidad no puede existir sin una asociación con el ambiente, y un ambiente no puede manifestarse sin que exista una localidad en particular.

La Sociedad Americana de Forestales define al sitio como un área considerada en términos de un ambiente particularmente determinado por el tipo y calidad de la

vegetación que soporta (Ford-Robertson, 1971). El término sitio se emplea también como la capacidad para soportar el crecimiento de las especies forestales (Spurr, 1952). Por otra parte el sitio puede ser clasificado en *tipos de sitio*, a través de su clima, suelo y vegetación o cuantitativamente en *clases de sitio* a través de su potencial para producir productos primarios, derivados de las especies arbóreas maderables (Avery y Burkhardt, 1983).

2.4.1 Calidad del sitio

La calidad del sitio se puede definir como la capacidad de un área determinada para permitir el crecimiento de árboles de algunas especies. Es la respuesta cuantitativa, en el desarrollo de una determinada especie, a la totalidad de las condiciones ambientales (edáficas, climáticas y bióticas) existentes en un determinado lugar. Su conocimiento resulta fundamental en la ingeniería forestal para elegir los mejores sitios, para plantar la especie apropiada en el lugar adecuado y para cambiar sus características. Anteriormente sólo se estaba supeditado a cambios en el manejo, especialmente en la densidad del rodal; sin embargo, actualmente pueden modificarse también sus características físicas, a través de la fertilización, irrigación y preparación del suelo.

La productividad es un concepto biológico integrador y difícilmente puede expresarse matemáticamente. Por ello, se ha optado por representar la calidad del sitio a través de un valor o índice denominado *índice de sitio* e índice de productividad, ambos muy populares porque son una expresión de la calidad del sitio.

Las palabras "bueno" y "pobre" frecuentemente son utilizados como calificadores de la calidad de sitio y simplemente implican un potencial productivo elevado en contraste con un potencial bajo (Clutter y otros 1992).

La altura de los árboles es una variable determinante para estimar la calidad de sitio, ya que su medición es fácil y es menos influenciada por otros factores, por ejemplo la densidad; se le ha considerado como un indicador de la calidad de sitio, conociéndosele como índice de sitio, que es la altura que alcanzan los árboles dominantes del rodal a una edad determinada o base.

Considerando que la altura dominante es un indicador de la calidad de sitio, podemos ordenar los datos obtenidos de parcelas permanentes o de análisis troncales en alturas por clases de edad; si muestran una distribución homogénea, podremos considerar a la altura dominante como un buen indicador de la calidad de sitio; el ordenamiento de estos datos tiene sentido al realizarlo para una edad de referencia (edad base). Al graficarlos por medio de una función de crecimiento nos permitirá ver que los árboles con menor altura a la edad base indican que la calidad de sitio es pobre y viceversa.

Clutter y otros (1992) mencionan que la productividad podemos definirla por las tasas de crecimiento o diferencial de altura contra edad, las cuales se pueden determinar por dos factores:

- Capacidad productiva del sitio.
- Cantidad y composición de las existencias del sitio.

El silvicultor difícilmente podría manipular la calidad del sitio; sin embargo, su evaluación es de gran importancia para analizar el crecimiento de los árboles que integran una masa forestal, dicha evaluación permite comparar y explicar las

dimensiones como la altura, el diámetro y el volumen, para bosques creciendo en diferentes calidades de sitio.

2.4.2 Métodos para estimar calidad de sitio

Los métodos para medir la productividad de la calidad de sitio por lo general se agrupan en métodos directos e indirectos, ya sea que el cálculo se base en alguna medición de la comunidad o bien en algunos rasgos del ambiente local. Sin embargo, a no ser por recolección total de una comunidad madura, no existe realmente ningún método directo para medir la productividad del sitio. Lo que generalmente se mide es cierto aspecto cuantitativo, o índice de la productividad forestal (Spurr y Barnes, 1980).

Los métodos directos son:

- Determinación de volumen o altura del rodal. Es difícil de interpretar, salvo que el rodal se encuentre cercano a una edad base o rotación usada como comparación.
- Registro histórico de desarrollo y rendimiento. Cada vez es más frecuente que las empresas conserven toda la información de inventarios sucesivos y también de las cosechas de los rodales. Estos datos están desprovistos de todo supuesto y su error es reducido.
- Interpretación basada en la medición de longitudes internodales de un cierto número de años de crecimiento, después de que el árbol haya alcanzado 1.30 m. Algunos autores recomiendan alturas mayores que 2 y 3 m.
- Análisis fitosociológico y/o fisionómico de la vegetación presente en el área.

Los métodos indirectos son:

- Medición de uno o más factores del medio que se consideran como íntimamente relacionados con el crecimiento de los árboles.
- Determinación de características propias de los árboles o del rodal consideradas sensibles a la calidad del sitio.
- Una combinación de las anteriores.
- Relación altura-edad (índice de sitio).
- Vegetación indicadora.
- Factores del ambiente.

Estos, además de que son muy sencillos y relativamente de bajo costo, estiman la calidad de una manera muy precisa y han sido un predictor efectivo de crecimiento de los árboles en numerosos estudios del crecimiento (Carmean y Lenthall, 1988; Jones, 1969; Wykoff y Monserud, 1987).

La finalidad prioritaria de la mayor parte de los sistemas de clasificación en términos de “producción potencial de volumen de madera”, ha sido evaluar de manera precisa el hábitat en función de dicha producción potencial (Pritchett, 1986). Sin embargo, es difícil medir con algún grado de exactitud y está sujeta a fluctuaciones amplias debido a diferencias en la composición de especies, densidad y otros factores (Curtis, 1964).

El principal problema para evaluar la calidad de un bosque, es la integración de los diversos factores que intervienen en la productividad. Los métodos más exitosos para predecir la calidad de sitio han sido aquellos que combinan a un número de factores en ecuaciones de predicción del volumen o crecimiento en altura (Zedaker, y otros, 1987).

2.4.3 Método del índice de sitio

El índice de sitio se determina para cada especie bajo el supuesto de que la altura de los árboles dominantes y codominantes del sitio expresa la máxima altura alcanzable, viéndose escasamente afectada por la densidad del rodal (Braathe, 1978; Spurr y Barnes, 1980).

Daniel y otros (1982) y Clutter y otros (1992) definen al índice de sitio como la altura de los árboles dominantes a una edad base o edad de referencia.

Una de las ventajas que ofrece este método es que puede emplearse en la cuantificación de la producción, ya que es una expresión numérica, su medición es fácil y libre de la influencia de la densidad del rodal (Curtis, 1964; Hägglund, 1981; Spurr y Barnes, 1980). Sin embargo, Borders y otros (1984) hacen la aclaración que los extremos de densidad si afectan al índice de sitio.

Se han propuesto diferentes métodos para desarrollar funciones de índice de sitio, que varían según el principio aplicado, el tipo de datos, el método de construcción y el modelo empleado.

2.4.4 Curvas de índice de sitio

Las curvas de índice de sitio pueden derivarse de mediciones donde se toma la altura de los árboles dominantes seleccionados y la edad; pretenden describir el ritmo de crecimiento en altura de árboles hipotéticos o de un índice de sitio específico.

Una familia de curvas de índice de sitio es simplemente un grupo de patrones de desarrollo en altura con un símbolo cualitativo o número asociado con la curva para

propósitos de referencia (Clutter y otros, 1992). También se indica que las ecuaciones pueden usarse para predecir la altura total como una función de la edad del rodal, a partir de la altura promedio de los árboles dominantes y el mismo índice de sitio.

Dentro del método del índice de sitio se reconocen dos variantes, según sea la naturaleza de las familias de curvas de altura-edad que se generan: a) curvas anamórficas y b) polimórficas. Estas últimas divididas en articuladas y desarticuladas (Clutter y otros, 1992).

Las curvas anamórficas cuando se representan en escala logarítmica son rectas paralelas, con pendiente igual pero con distinta ordenada al origen. En escala lineal son curvas que guardan proporcionalidad entre sí, esto es que una curva con respecto a otra siempre es una proporción constante, independientemente del punto en la abscisa en que se haga la comparación. Se caracterizan por presentar la misma forma, ya que son proporcionales y la pendiente de las curvas a cualquier edad guarda una relación constante entre ellas (Clutter y otros, 1992) y tienen un punto de inflexión a la misma edad para todas ellas. Es decir, las curvas de índice de sitio son anamórficas si hay una tasa relativa de crecimiento constante para todos los índices de sitio a una edad específica y el punto de inflexión se presenta a la misma edad para todas ellas (Borders y otros, 1984; Zepeda y Rivero, 1984).

Las polimórficas, por su parte, son familias de curvas con pendiente variable, que no guardan una relación de paralelismo entre ellas y no son proporcionales por no depender unas de otras: por esta razón sus puntos de inflexión ocurren a edades diferentes. En ellas se observa que la culminación del crecimiento en altura es más temprana en sitios de buena calidad (Acosta, 1991; Bailey y Clutter, 1974; Clutter y otros, 1992; Zepeda y Rivero, 1984).

Por lo anterior, la tasa relativa de crecimiento es variable para todos los índices a cada edad. Las curvas polimórficas al no ser proporcionales unas de otras, indican que existen distintos hábitos de crecimiento para las diferentes clases de índice de sitio (Clutter y otros, 1992).

Existen dos tipos de curvas polimórficas, conocidas como articuladas y desarticuladas, las articuladas son curvas que guardan una cierta relación, aunque no proporcional, no llegan a cruzarse en los rangos de edad de interés, mientras que las desarticuladas no tienen ninguna relación entre ellas y pueden llegar a cruzarse dentro del rango de interés (Clutter y otros, 1992).

2.4.4.1 Métodos para coleccionar datos de campo

Las curvas de índice de sitio se obtienen de mediciones de la altura y la edad de los árboles elegidos; los datos pueden provenir de análisis troncales o de mediciones en sitios temporales o permanentes.

Para el caso de los datos provenientes de análisis troncales o de sitios permanentes se toma la altura y la edad de los árboles elegidos en diferentes periodos de tiempo; y para las mediciones temporales los datos de altura y edad se obtienen en un tiempo y en un lugar, de un gran número de árboles de un rango de edades diferentes.

Los datos provenientes de sitios temporales y de análisis troncales son más usados por su bajo costo, pero el uso de estos datos involucra el supuesto de que el total de rangos de índice de sitio y edades está bien representado en la muestra. En menor grado se utilizan los sitios permanentes, debido al gran período de tiempo de observaciones,

mediciones y su alto costo; tienen la ventaja de representar una buena fuente de datos para desarrollar las ecuaciones (Clutter y otros, 1992).

Bailey y Clutter (1974) consideran que es posible obtener curvas no proporcionales (polimórficas), con un par de datos altura-edad por sitio. Zamudio y Ryszard (1987) utilizando los mismos argumentos de Bailey y Clutter mencionan que es posible obtener curvas de sitio polimórficas con una observación por sitio. En este método se toman únicamente datos de edad con virutas de incremento y altura de árboles dominantes (Clutter y otros, 1992), donde se deben cubrir todos los rangos de edades representando la totalidad de los índices de sitio (Curtis, 1964). Sin embargo tiene la desventaja de que un solo par de datos altura-edad representa sólo una parte de la información de la curva y los ajustes no son buenos.

Los datos obtenidos a través de análisis troncales, proporcionan datos muy similares a los obtenidos en sitios permanentes. Este tipo de datos, además de que no son tan costosos tienen la ventaja de que la información puede obtenerse inmediatamente y utilizarse para desarrollar modelos tanto de tipo anamórfico como polimórfico.

De los dos últimos métodos descritos anteriormente, el de análisis troncales proporciona predicciones de la productividad del sitio más precisas (Curtis, 1964). Los datos de análisis troncales se emplean generalmente para construir funciones polimórficas, y es posible agruparlos con datos de parcelas permanentes.

2.4.5 Métodos de ajuste de curvas de índice de sitio

Se han creado diferentes técnicas para el ajuste de curvas de índice de sitio; la mayoría de estas técnicas pueden ser vistas como casos especiales de cuatro métodos de desarrollo general de ecuaciones:

- 1) Método de la curva guía.
- 2) Método de la diferencia algebraica.
- 3) Método de predicción de parámetros.
- 4) Método de ecuaciones diferenciales.

Los tres primeros métodos son mencionados por Clutter y otros (1992) y el último por Devan y Burkhart (1982). Estos modelos pueden construirse con datos de altura dominante-edad provenientes de parcelas temporales o permanentes y de análisis troncales.

Los cuatro métodos generales de ecuaciones para construir curvas de índice de sitio, utilizan información proveniente de parcelas temporales, árboles muestra o parcelas permanentes y análisis troncales (Clutter y otros, 1992).

Debido a que el índice de sitio es una representación gráfica que describe la relación altura dominante-edad de un rodal o árbol individual, para modelar dicha relación, existen diferentes modelos y técnicas de ajuste de los mismos. La construcción de las curvas de índice de sitio se pueden realizar por métodos gráficos o analíticos y en ambos procedimientos pueden emplearse tanto para curvas anamórficas como polimórficas (Alder, 1980; Clutter y otros, 1992; Curtis, 1964).

2.5 Ecuaciones utilizadas para construir familias de curvas de índice de sitio

2.5.1 Curvas anamórficas por el método de curva guía

Las familias de curvas se construyen despejando los parámetros de valor asintótico o de forma de los modelos, ya que éstos determinan el tipo de familias de curvas. Para este caso, de la ecuación de índice de sitio se despeja el parámetro asintótico y su expresión se sustituye en la ecuación original, con lo que el valor asintótico se considera implícito y el o los parámetros de forma son comunes para todos los sitios. Variando la edad y el índice de sitio deseado y manteniendo constante la edad base, se genera la familia de curvas anamórficas.

2.5.1.1 Ecuación de Schumacher

Con la ecuación de crecimiento de Schumacher (ecuación 1: $H = \beta_1 e^{-\beta_2 \left(\frac{1}{E}\right)}$) ajustada a la base de datos se genera la curva guía. Cuando la edad (E) se hace igual a la edad base (E_0), entonces la altura dominante (H) será igual al índice de sitio (IS), tal como se muestra:

$$IS = \beta_1 e^{-\beta_2 \left(\frac{1}{E_0}\right)} \quad (6)$$

donde:

IS = índice de sitio

E_0 = edad base

β_1 y β_2 = parámetros a ser estimados

Como β_l es un parámetro dependiente del sitio y el IS es igual a la altura dominante a la edad base, para graficar la familia de curvas, se despeja β_l de la ecuación (6) y se sustituye en (1) y se obtiene la ecuación (7), que en su forma exponencial adopta la expresión:

$$H = IS e^{-\beta_l \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)} \quad (7)$$

donde:

H = altura

Con esta ecuación se construye la familia de curvas anamórficas de índice de sitio para la ecuación de Schumacher, sustituyendo las etiquetas del índice de sitio deseado.

Para calificar el sitio para un rodal determinado, conocida la edad y la altura dominante, se despeja IS de la ecuación (7) y se genera (8), con la que es posible calificar el índice de sitio para un rodal específico.

$$IS = He^{\beta_l \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)} \quad (8)$$

2.5.1.2 Ecuación de Chapman–Richards

A partir de la ecuación (2): $H = \beta_1 \left(1 - e^{-\beta_2 E} \right)^{\beta_3}$, se procede igual que con la ecuación de Schumacher, quedando las ecuaciones como sigue para generar la curva guía:

$$IS = \beta_1 \left(1 - e^{-\beta_2 E_0} \right)^{\beta_3} \quad (9)$$

Con la ecuación (10) se genera la familia de curvas anamórficas y para calificar el índice de sitio para un rodal específico, se utiliza la ecuación (11).

$$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E}}{1 - e^{-\beta_2 E_0}} \right)^{\beta_3} \quad (10)$$

$$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E_0}}{1 - e^{-\beta_2 E}} \right)^{\beta_3} \quad (11)$$

2.5.1.3 Ecuación Weibull

Con la ecuación de crecimiento Weibull (ecuación 5: $H = \beta_1 (1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}})$) ajustada a la base de datos se genera la curva guía.

Cuando la edad (E) se hace igual a la edad base (E_0), entonces la altura (H) será igual al índice de sitio (IS), tal como se muestra en la ecuación (12).

$$IS = \beta_1 (1 - e^{-\beta_2 E_0^{\beta_3}}) \quad (12)$$

Como β_1 es un parámetro dependiente del sitio y el IS es igual a la altura a la edad base, para graficar la familia de curvas, de la ecuación (12), se despeja β_1 y se sustituye en (5) y se obtiene (13), ecuación con la que se genera la familia de curvas.

$$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 E_0^{\beta_3}}} \right) \quad (13)$$

De esta ecuación (13) se despeja el IS para calificar a cada rodal específico, generando la ecuación (14).

$$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E_0^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}}} \right) \quad (14)$$

2.5.2 Curvas polimórficas con método de curva guía

A diferencia de las curvas anamórficas, en donde para generar las familias de curvas se considera implícita la asíntota, en este caso, como los β 's de los exponentes son parámetros dependientes del sitio y representan la velocidad de crecimiento y el IS es igual a la altura a la edad base, para graficar la familia de curvas polimórficas, de las ecuaciones anteriores, se despeja alguno de los β 's de los exponentes y se obtienen las ecuaciones que adoptan las expresiones que se describen a continuación, las cuales sirven para generar las familias de curvas polimórficas y calificar el índice de sitio de un rodal o masa forestal específica. En este caso se considera que el valor asintótico es constante para todos los sitios y lo que varía es la velocidad de crecimiento.

2.5.2.1 Ecuación de Schumacher

De la ecuación (6: $IS = \beta_1 e^{-\beta_2 \left(\frac{1}{E_0} \right)}$), previamente ajustada a la base de datos se despeja β_2 y se sustituye en (1: $H = \beta_1 e^{-\beta_2 \left(\frac{1}{E} \right)}$), con lo que se obtiene la ecuación (15) que genera la familia de curvas polimórficas mediante el método de la curva guía.

$$H = \beta_1 \left(\frac{IS}{\beta_1} \right)^{\frac{E_0}{E}} \quad (15)$$

Para calificar el índice de sitio se utiliza la ecuación (16).

$$IS = \beta_1 \left(\frac{H}{\beta_1} \right)^{\frac{E}{E_0}} \quad (16)$$

2.5.2.2 Ecuación de Chapman–Richards

De la misma forma que en el caso anterior, de (9: $IS = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E_0})^{\beta_3}$), se despeja β_3 y se sustituye en (2: $H = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E})^{\beta_3}$), con lo que se obtiene la ecuación (17) que genera la familia de curvas polimórficas.

$$H = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E})^{\left(\frac{\ln\left(\frac{IS}{\beta_1}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 E_0})} \right)} \quad (17)$$

El índice de sitio para una plantación o rodal se califica con (18).

$$IS = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E_0})^{\left(\frac{\ln\left(\frac{H}{\beta_1}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 E})} \right)} \quad (18)$$

2.5.2.3 Ecuación Weibull

De la ecuación (12: $IS = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E_0^{\beta_3}})$), se despeja β_2 y se sustituye en (5: $H = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}})$), con lo que se obtiene la ecuación (19) que genera la familia de curvas polimórficas para la ecuación Weibull y el método de la curva guía.

$$H = \beta_1 \left(1 - e^{\left(\frac{E}{E_0} \right)^{\beta_3} \ln\left(1 - \frac{IS}{\beta_1}\right)} \right) \quad (19)$$

El índice de sitio se califica con (20).

$$IS = \beta_1 \left(1 - e^{\left(\frac{E_0}{E} \right)^{\beta_3} \ln\left(1 - \frac{H}{\beta_1}\right)} \right) \quad (20)$$

2.5.3 Curvas anamórficas con método de diferencia algebraica

2.5.3.1 Ecuación de Schumacher

$$H_2 = H_1 e^{-\beta_2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right)} \quad (21)$$

La familia de curvas anamórficas se genera con la siguiente ecuación:

$$H = IS e^{-\beta_2 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)} \quad (22)$$

De igual forma, para calificar el índice de sitio para un rodal específico, se utiliza la ecuación (23).

$$IS = H e^{\beta_2 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)} \quad (23)$$

2.5.3.2 Ecuación de Chapman-Richards

De la misma forma que con la ecuación de Schumacher, por manipulación algebraica se obtiene la siguiente ecuación:

$$H_2 = H_1 \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E_2}}{1 - e^{-\beta_2 E_1}} \right)^{\beta_3} \quad (24)$$

Esta ecuación se ajusta a los datos experimentales y se obtiene la siguiente ecuación para generar las familias de curvas anamórficas:

$$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E}}{1 - e^{-\beta_2 E_0}} \right)^{\beta_3} \quad (25)$$

El índice de sitio para un rodal específico se califica utilizando la ecuación (26).

$$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E_0}}{1 - e^{-\beta_2 E}} \right)^{\beta_3} \quad (26)$$

2.5.3.3 Ecuación Weibull

La función de crecimiento Weibull, y considerando dos periodos de tiempo, se manipula algebraicamente para obtener la formulación anamórfica.

$$H_2 = H_1 \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E_2^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 E_1^{\beta_3}}} \right) \quad (27)$$

La familia de curvas se genera con la ecuación (28).

$$H = IS \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 E_0^{\beta_3}}} \right) \quad (28)$$

Para calificar el índice de sitio para un rodal específico, se utiliza la ecuación (29) al despejar IS en (28).

$$IS = H \left(\frac{1 - e^{-\beta_2 E_0^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}}} \right) \quad (29)$$

2.5.4 Curvas polimórficas con método de diferencia algebraica

2.5.4.1 Ecuación de Schumacher

La ecuación de crecimiento de Schumacher se manipula algebraicamente para obtener la formulación polimórfica.

Considerando la expresión original del modelo (ecuación 1: $H = \beta_1 e^{-\beta_2 E_1^{-1}}$) y suponiendo a β_2 específica para cada calidad de sitio y β_1 para todo el rango de calidades, las curvas generadas son de tipo polimórfico, dado que cada una presenta diferente tasa de crecimiento (Bailey y Clutter, 1974; Borders y otros, 1984).

Si se consideran dos mediciones de pares de datos edad - altura dominante para un mismo individuo:

$$H_1 = \beta_1 e^{-\beta_2 E_1^{-1}} \quad \text{y} \quad H_2 = \beta_1 e^{-\beta_2 E_2^{-1}}$$

Despejando β_1 en ambas expresiones se tiene:

$$\left(\frac{H_1}{\beta_1} \right)^{E_1} = e^{-\beta_2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{H_2}{\beta_1} \right)^{E_2} = e^{-\beta_2}$$

Igualando ambas ecuaciones y despejando para H_2 obtenemos (30):

$$H_2 = \beta_1 \left(\frac{H_1}{\beta_1} \right)^{\frac{E_1}{E_2}} \quad (30)$$

Con esta ecuación, donde se sustituye el valor de la edad base, se construye la familia de curvas polimórficas de índice de sitio para la ecuación de Schumacher.

$$H = \beta_1 \left(\frac{IS}{\beta_1} \right)^{\frac{E_0}{E}} \quad (31)$$

La ecuación (32) se utiliza para calificar el índice de sitio de un rodal específico.

$$IS = \beta_1 \left(\frac{H}{\beta_1} \right)^{\frac{E}{E_0}} \quad (32)$$

2.5.4.2 Ecuación de Chapman–Richards

Con la ecuación de crecimiento original (ecuación 2: $H = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E})^{\beta_3}$), por manipulación algebraica se obtiene la formulación polimórfica de este modelo, considerando implícito cualquiera de los parámetros β_2 o β_3 , ya que ambos determinan la forma de las curvas.

Considerando implícito a β_3 en el modelo y para dos mediciones edad-altura dominante en el mismo individuo:

$$\beta_3 = \frac{\ln\left(\frac{H_1}{\beta_1}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 E_1})} \quad \text{y} \quad \beta_3 = \frac{\ln\left(\frac{H_2}{\beta_1}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 E_2})}$$

donde:

$\ln$ = logaritmo natural

La solución aquí empleada corresponde a la propuesta por Madrigal (1995), la cual se obtiene igualando las expresiones y resolviendo para H_2 .

$$H_2 = \beta_1 \left(\frac{H_1}{\beta_1} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-\beta_2 E_2})}{\ln(1 - e^{-\beta_2 E_1})} \right)} \quad (33)$$

En esta misma ecuación (33) se sustituye el valor de las etiquetas de los índices de sitio a obtener y la edad base y se genera la ecuación (34), con la que se construye la familia de curvas polimórficas.

$$H = \beta_1 \left(\frac{IS}{\beta_1} \right)^{\left(\frac{\ln(1 - e^{-\beta_2 E})}{\ln(1 - e^{-\beta_2 E_0})} \right)} \quad (34)$$

La ecuación (35) se utiliza para calificar el índice de sitio de un rodal en particular.

$$IS = \beta_1 \left(\frac{H}{\beta_1} \right)^{\left(\frac{\ln(1-e^{-\beta_2 E_0})}{\ln(1-e^{-\beta_2 E})} \right)} \quad (35)$$

2.5.4.3 Ecuación Weibull

La función acumulativa de crecimiento Weibull ($H = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E^{\beta_3}})$) y a partir de dos mediciones de edad-altura dominante en los mismos individuos, se manipula algebraicamente para despejar β_2 y así obtener la formulación polimórfica (ecuación 36).

$$H_2 = \beta_1 \left(1 - \left[1 - \frac{H_1}{\beta_2} \right]^{\left(\frac{E_2}{E_1} \right)^{\beta_3}} \right) \quad (36)$$

La familia de curvas se genera cuando, por manipulación algebraica, se tiene la ecuación (37).

$$H = \beta_1 \left(1 - \left[1 - \frac{IS}{\beta_1} \right]^{\left(\frac{E}{E_0} \right)^{\beta_3}} \right) \quad (37)$$

El índice de sitio se califica con la ecuación (38), en donde se introduce la edad conocida y el promedio de la altura dominante de los árboles.

$$IS = \beta_1 \left(1 - \left[1 - \frac{H}{\beta_1} \right]^{\left(\frac{E_0}{E} \right)^{\beta_3}} \right) \quad (38)$$

2.5.5 Curvas polimórficas con método de predicción de parámetros

De acuerdo con Clutter y otros (1992), para cada árbol de análisis troncal se ajusta el modelo de Chapman-Richards (ecuación 2: $H = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E_0})^{\beta_3}$), con lo que estamos en posibilidad de conocer sus parámetros y proponer a cada uno como una función del índice de sitio para cada árbol a la edad base determinada.

Con lo anterior se obtienen valores de los parámetros para cada árbol y se obtiene así mismo el índice de sitio para cada árbol a la edad base determinada, con la siguiente ecuación (9: $IS = \beta_1(1 - e^{-\beta_2 E_0})^{\beta_3}$).

En este procedimiento, generalmente se usa el modelo de Chapman-Richards como la ecuación básica para modelar la relación altura dominante-edad.

$$H = \theta_1 \left(1 - e^{-\left[\frac{\theta_2}{E} \right]} \right)^{\theta_3} \quad (39)$$

donde:

θ_1, θ_2 y θ_3 = parámetros a ser estimados

Cada uno de los parámetros de esta ecuación son hipotetizados como una función del índice de sitio, mediante funciones como:

$$\theta_1 = \beta_1 + \beta_2 IS \quad (40)$$

$$\theta_2 = \beta_3 + \beta_4 IS + \beta_5 IS^2 \quad (41)$$

$$\theta_3 = \beta_6 + \beta_7 IS + \beta_8 IS^2 \quad (42)$$

Los valores de los parámetros estimados se sustituyen en la expresión (39).

De otra forma, los parámetros vuelven a ser ajustados por regresión no lineal, para lo cual se utiliza la misma expresión de la ecuación de Chapman-Richards expresada como (43):

$$H = (\beta_1 + \beta_2 IS) \left(1 - e^{-(\beta_3 + \beta_4 IS + \beta_5 IS^2)E} \right)^{\left(\frac{1}{\beta_6 + \beta_7 IS + \beta_8 IS^2} \right)} \quad (43)$$

Teniendo las estimadas de los parámetros, a esta expresión se le inserta la etiqueta del índice de sitio y la edad base y se obtiene la altura alcanzada a una edad determinada.

$$H = (\beta_1 + \beta_2 IS) \left(1 - e^{-(\beta_3 + \beta_4 IS + \beta_5 IS^2)E_0} \right)^{\left(\frac{1}{\beta_6 + \beta_7 IS + \beta_8 IS^2} \right)} \quad (44)$$

Después de que las ecuaciones 40 a 42 son desarrolladas, una ecuación para altura dominante-edad como la ecuación 43 puede resultar para H , dados IS y E ; tal solución es usada para graficar las curvas de índice de sitio. Sin embargo, para muchas funciones de altura dominante-edad, en particular la función de Chapman-Richards, el equivalente de la ecuación 43 no puede ser resuelto explícitamente para IS , dados H y E . En esta situación, el índice de sitio sólo puede ser determinado por interpolación gráfica o por iteraciones (Clutter y otros, 1992).

2.5.6 Curvas polimórficas con método de ecuaciones diferenciales

Un ejemplo de estas ecuaciones son las desarrolladas por Clutter y Lenhart (1968), citadas por Devan y Burkhart (1982).

$$\frac{dy}{dx} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y \quad (45)$$

donde:

$\frac{dy}{dx}$ = proporción instantánea de crecimiento en altura

$\beta_0, \beta_1, y \beta_2$ = parámetros a ser estimados

x = edad del árbol cuando $\frac{dy}{dx}$ ocurre y se calcula como
$$\left(\frac{\left[\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right]}{2} \right)$$

y = edad del árbol cuando $\frac{dy}{dx}$ ocurre y se calcula como
$$\left(\frac{\left[\frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_1} \right]}{2} \right)$$

E_1 y E_2 = edades entre dos mediciones sucesivas de altura

H_1 y H_2 = dos mediciones sucesivas de altura

Devan y Burkhardt (1982), al igual que en el caso anterior, desarrollaron curvas polimórficas de índice de sitio a partir de la forma integrada de modelos de incremento en altura ajustados por técnicas de regresión segmentada. La tasa instantánea de crecimiento en altura $\frac{dH}{dA}$ fue aproximada por diferencias finitas del logaritmo natural de la altura H y el inverso de la edad E . Se consideraron dos segmentos polinomiales de segundo grado y un punto de unión expresado en función de la edad. Las formas integradas de los modelos son las siguientes:

$$y = y_0z + b(z-1) + c(x_0z - x) + d(x_0^2z - x^2) \quad x \leq l \quad (46)$$

$$= y_0z + e(z-1) + f(x_0z - x) + g(x_0^2z - x^2) \quad x > l \quad (47)$$

donde:

y = logaritmo natural de la altura

$$z = e^{(a(x-x_0))}$$

x = 1/edad

x_0 = 1/edad base

y_0 = logaritmo natural de la altura alcanzada a la edad base

l = 1/ JP

JP = punto de unión de los segmentos

2.6 Estudios sobre índice de sitio en México

En México se han realizado varios estudios de calidad de sitio. Castaños (1962), evaluó la calidad de sitio para *Pinus patula* Schl. et Cham. en Oaxaca, basándose en características edáficas. Después de ese trabajo no se continuó de manera significativa ese tipo de estudios. Más recientemente, se ha intentado la evaluación de la calidad de sitio a través del índice de sitio.

Orantes y Musálem (1982) establecieron relaciones entre características dasométricas y edáficas de la localidad para calificar calidades de estación en base a índices de sitio, encontrando una correlación del incremento medio anual en altura con el contenido de materia orgánica. Estableciendo cuatro calidades de estación (rico, medianamente rico, medianamente pobre y pobre), para *Pinus hartwegii* Lindl., en Zoquiapan, México.

Rodríguez (1982), construyó índices de sitio para *Pinus montezumae* Lamb en Puebla. Sus índices de sitio tienen otras variables independientes además de la edad. Para el ajuste de modelos utilizó datos de análisis troncales de 81 árboles. También realizó

muestreos de suelos para cada combinación de altitud, exposición y pendiente de los lugares donde se obtuvieron los árboles para los análisis troncales. El modelo que probó fue:

$$Y = aX_1^b X_2^c X_3^d \dots X_n^h \quad (48)$$

donde:

Y = altura de árboles dominantes

X_i = variables explicatorias (edáficas, edad y fisiográficas)

a, b, c, d, h = parámetros

El modelo fue linealizado para su ajuste. Las variables explicatorias de mayor significancia para las condiciones generales fueron: edad, pH, % de limo, y el % de arcilla medidos en tres profundidades. En el análisis por exposición se incluyeron algunas de las variables mencionadas.

Aguilar (1983) con estudios de análisis troncales en *Pinus douglasiana* Mtz. y *Pinus lawsonii* Roesl., seleccionó 20 árboles por especie, para elaborar curvas de índice de sitio en el C. E. F. Barranca de Cupatitzio; éstas fueron elaboradas con el modelo de Schumacher, concluyéndose que las curvas de crecimiento tienen un buen ajuste.

Maldonado (1983) realizó un estudio de índice de sitio para *Pinus oaxacana* Mirov. en la región "Los Coatlán", Oaxaca, utilizando 468 árboles, de 150 sitios de muestreo sobre rodales puros y coetáneos; del cual se derivaron siete curvas polimórficas de índice de sitio.

Aguirre y Zepeda (1985) probaron siete modelos para generar curvas de índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl, con datos de análisis troncales, y concluye que la función de Richards modificada es la más adecuada para construir curvas polimórficas.

Zepeda y Rivero (1984) por medio del método de la curva guía, construyeron curvas anamórficas, definiendo una curva promedio y cuatro proporcionales, con 25 análisis troncales de *Pinus hartwegii* Lindl. en Zoquiapan, México; utilizando el modelo de Backman:

$$A = e^{(b_0 + b_1 \ln t + b_2 \ln^2 t)} \Leftrightarrow A = \alpha_0 t^{b_1 + \ln t} \quad (49)$$

donde:

A = altura

t = edad

$\ln$ = logaritmo natural

e = base de los logaritmos naturales

b_0, b_1, b_2 = coeficientes de regresión

Aguirre (1984) obtuvo para *Pinus patula*, la siguiente expresión que corresponde al modelo de Chapman-Richards anamórfico:

$$S = H_d \left[\frac{(1 - e^{-0.076942 t_c})}{(1 - e^{-0.076942 t})} \right]^{1.95618} \quad (50)$$

Aguirre (1984) aplicó para *Pinus patula* la modificación del modelo de Richards, también basados en un análisis troncal de 72 árboles. Ajustaron siete modelos, de los cuales el de Richards, modificado, proporcionó los mejores resultados. La función es polimórfica y con una edad base de 50 años.

Función resultante:

$$H_d = 1.5846 S^{0.9349} (1 - e^{-0.035t})^{0.78554} S^{-1.95618} \quad (51)$$

Arteaga (1985) también usó análisis troncales, además de barrenaciones con el taladro de Pressler, para la determinación de índice de sitio para *Pinus patula* Schl. et Cham. en

Chignahuapan, Puebla, utilizando la función de Richards para generar curvas polimórficas:

$$H = aS^b(1 - e^{cE})^{(dS)^f} \quad (52)$$

donde:

H = altura dominante

E = edad

a, b, c, d, f = parámetros

S = índice de sitio

e = base de los logaritmos naturales

Además expresó la altura dominante en función de cinco variables del sitio, dos de ellas también incluidas como su cuadrado, dando siete variables explicatorias. Las variables del sitio incluidas fueron: profundidad del horizonte A, pedregosidad, posición en la pendiente, altitud, exposición por pendiente, y precipitación anual.

Benavides (1987) determinó índices de sitio para *Pinus michoacana* Mtz. y *Pinus oocarpa* Schiede. en Jalisco, México, utilizando 27 análisis troncales y el modelo de Schumacher generalizado, el cual se muestra en seguida:

$$H = ae^{-bE^c} \quad (53)$$

donde:

H = altura dominante

E = edad

e = base de los logaritmos naturales

a, b, c = parámetros

Zepeda y otros (1990) construyeron curvas polimórficas para tres especies: *Pinus durangensis* Mtz., *Pinus engelmanni* Car. y *Pinus arizonica* Engl., del estado de Chihuahua, con el método de la “diferencia algebraica”, utilizando el modelo de Schumacher generalizado, ya descrito en el párrafo anterior.

Fierros y Ramírez (1989) generaron curvas de índice de sitio para *Pinus caribaea* var. *hondurensis* en “La Sabana” Oaxaca, empleando la “diferencia algebraica”. Concluyeron que la formulación anamórfica del modelo de Richards presenta un buen ajuste y una configuración sencilla:

$$IS = H \left[\frac{(1 - e^{-0.06899 A_b})}{(1 - e^{-0.06899 A_1})} \right]^{1.72275} \quad (54)$$

donde:

H = altura dominante

IS = índice de sitio

A_b = edad base

A_1 = edad del rodal

2.6.1 Estudios epidométricos en oyamel

Son pocos los trabajos publicados sobre crecimiento del oyamel. Madrigal (1967) aporta contribuciones sobre la ecología. Manzanilla (1974) proporciona el antecedente más relevante al presente estudio. González (1985) estudió la germinación y el crecimiento inicial de oyamel. Aunque existen otros trabajos respecto a la especie de interés, los anteriores son los más directamente asociados a este estudio.

Manzanilla (1974) usó el taladro de Pressler para obtener información sobre crecimiento. Él propone nueve clases de tipo de estructura de bosques de oyamel. Además, aporta un esquema de la dinámica de esas estructuras, i. e., alternativas de sucesión de una clase a otra. Sus resultados sobre estructuras indican la presencia de estratos en altura del arbolado (pisos). Concluye que las estructuras de bosque virgen están formadas por estratos arbóreos de diferentes edades, aunque la distribución diamétrica es típica de selección. Estima un incremento en volumen de 12 a 39 m³r/ha/año, valores impactantes por la alta productividad que implican.

Gómez (1989) estudió la relación del crecimiento potencial de dos coníferas (*Abies religiosa* (H. B. K.) Schel. et Cham. y *Pinus hartwegii* Lindl.) en el Cerro Tláloc, con algunas variables dasométricas, topográficas y condiciones edáficas con los índices de sitio y de terreno, en 40 sitios circulares de 0.1 ha en oyamel; en base a mediciones de edad, diámetro normal y altura total del arbolado, se calculó el índice de sitio y de terreno. Por regresión obtuvo ecuaciones para predecir la productividad, considerando como variables dependientes a los índices de sitio y de terreno. Concluye que los mejores sitios de oyamel presentan suelos muy profundos, alto contenido de arena y menor cantidad de arcilla en el subsuelo.

Cabe aclarar que el índice de terreno según Mc Lintock y Bickford en 1957 y Pflugbeil en 1960 citados por Daniel y otros (1982), es la altura de un árbol dominante que tiene un cierto diámetro y que esta forma de determinación es preferible en los casos en que la edad carece de sentido debido a que los árboles han sufrido un largo periodo de supresión.

Fuera del país existen algunos trabajos relacionados al índice de sitio de *Abies* spp, entre los que se encuentran:

Cochran (1979) al Este de las cascadas de Oregon y Washington, realizó estudios de índice de sitio y curvas de crecimiento en altura en masas coetáneas y manejadas de *Abies grandis* (Dougl.) Lindl., por medio de análisis troncales. Utilizando sitios circulares de 1/5 de acre, ubicados en masas puras y mezcladas; tomó una edad base de 50 años para la elaboración de curvas y graficó para cada sitio la altura de los cinco árboles dominantes como una función de la edad a la altura de 1.30 m para cada árbol.

Conn en 1958 citado por Rodríguez (1980) realizó análisis troncales en *Abies grandis* (Dougl.) Lindl. en una masa pura del bosque de Baronscourt en Nueva Irlanda, indicando que presentó rápido crecimiento después de los 19 años y sus volúmenes mayores de $0.594 \text{ m}^3/\text{r/año}$; también Zimmerman en 1960 citado por el mismo autor realizó análisis troncales en *Abies alba* Mill. estudiando altura, diámetro, forma, etc., determinando que el IMA aún no culminaba a los 175 años de edad.

Bojorges (1990) generó curvas anamórficas y polimórficas de índice de sitio para *Abies religiosa*, empleando la “diferencia algebraica”, concluyendo que el modelo de Chapman-Richards anamórfico presentó el mejor ajuste y además presentó una formulación más sencilla.

2.7 Estadísticos de orden

Muchos de los métodos estudiados para analizar la información suministrada por una muestra aleatoria dependen de algunas suposiciones, tales como:

- a) La muestra aleatoria proviene de una población, cuya función de distribución de probabilidad es continua.

- b) La distribución de probabilidad de la normal, o al menos la distribución de algunos estimadores es normal, recurriendo al teorema central de límite, o bien alguna otra distribución límite cuyas propiedades son conocidas.
- c) El tamaño de la muestra es suficientemente grande, de tal modo que ciertas funciones de las variables aleatorias definidas en la muestra (por ejemplo, la media muestral) tienen una distribución que pueden ser aproximadas por distribuciones límite.

Entre las funciones que se pueden definir en una muestra están los estadísticos de orden, que se pueden definir como:

Dejemos que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sean las variables aleatorias muestrales de una muestra aleatoria de tamaño n , de la distribución de una variable aleatoria continua X , cuya función de distribución es $F_X(x) = P(X < x)$.

Dejemos que Y_1 denote la más pequeña de las variables aleatorias muestrales, Y_2 la segunda más pequeña, y así sucesivamente, de tal modo que Y_n sea la mayor. Las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ son los estadísticos de orden de la muestra.

Cada una es una función de las variables aleatorias muestrales y, por tanto, una estadística; la razón para el término estadístico de orden es claro, ya que $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$.

Desatendemos la posibilidad lógica de que dos o más sean iguales, ya que esto sólo puede pasar con probabilidad cero.

2.7.1 Estadísticos de orden en la función de distribución Weibull

Para el caso del presente estudio, se empleará la distribución Weibull. Por lo que se hace una reseña sobre los estadísticos de orden de la distribución Weibull.

2.7.1.1 Definición y comentarios históricos

Una variable aleatoria X tiene una distribución de Weibull si sus valores de los parámetros $c > 0$, $\alpha > 0$ y ξ_0 tal que:

$$Y = \left\{ \frac{X - \xi_0}{\alpha} \right\}^c \quad (55)$$

tiene la distribución exponencial, con la función de densidad de probabilidad,

$$p_Y(y) = e^{-y} \quad (0 < y) \quad (56)$$

La función de densidad de probabilidad de X es

$$p_X(x) = c\alpha^{-1} \left\{ \frac{x - \xi_0}{\alpha} \right\}^{c-1} e^{-\left\{ \frac{x - \xi_0}{\alpha} \right\}^c} \quad (\xi_0 < x) \quad (57)$$

(La distribución estándar de Weibull se obtiene poniendo $\alpha = 1$, $\xi_0 = 0$, - vea (59).)

La distribución se llama así en honor a Waloddi Weibull, un físico sueco que la usó en 1939 para representar la distribución de la fuerza a la ruptura de materiales (Weibull, 1939a; Weibull, 1939b). En la literatura rusa se llama a veces la distribución de Weibull-Gnedenko (Gnedenko y otros, 1965). Algunos comentarios sobre la historia y también sobre la relación entre las distribuciones del valor extremo y la de Weibull están en Mann (1967).

El uso de la distribución en trabajos de confiabilidad y control de calidad se documenta en Kao (1958 y 1959). A finales de los años cincuenta y principio de los sesenta empezaron a aparecer artículos sobre esta distribución en la revista *Industrial Quality Control* (Berrettoni, 1964). Alguna indicación de la popularidad de la distribución de Weibull se ve en la tesis de Splitstone (1967). La distribución es a menudo conveniente

donde las condiciones de “aleatoriedad estricta” de la distribución exponencial no se satisfacen.

2.7.1.2 Génesis

Cuando se incorporan ciertas suposiciones de independencia a un modelo teórico, se puede llegar a una distribución exponencial para representar la variación de un estadístico observable, esta distribución puede ser remplazada por una distribución Weibull (al menos en los pasos iniciales del análisis) para permitir cierta inexactitud en el modelo. Usualmente no hay ningún razonamiento teórico explícito que indique que una distribución de Weibull debe usarse, simplemente es que una transformación práctica y conveniente para introducir un poco de flexibilidad en el modelo.

Hay situaciones en que la distribución Weibull puede derivarse por argumentos probabilísticos. Por ejemplo, si $c=2$ y $\xi_0 = 0$, entonces

$$p_x(x) = 2\alpha^{-1} \left(\frac{x}{\alpha} \right) e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \quad (x > 0) \quad (58)$$

X se distribuye como $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \times (Ji\text{-cuadrada con dos grados de libertad})\right)$. Gnedenko y otros (1965) mostraron que una distribución de esta forma surge como una distribución límite en el caso siguiente: Considere un dispositivo que consiste en n pares de elementos. Para cada par, el fracaso ocurre cuando ambos elementos han fallado. El dispositivo falla si por lo menos un par falla. Se supone que la distribución de vida (t) para cada elemento en el par j -ésimo es exponencial con $\Pr[t > t_0] = e^{-\lambda_j t_0}$ y todos los tiempos de vida son mutuamente independientes. Si n se aumenta indefinidamente y las λ 's son variadas de

tal manera que $\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = \lambda^2$ (fijo), mientras $\sum_{j=1}^n \lambda_j^3 \rightarrow 0$, entonces el tiempo de vida del dispositivo tiene una distribución límite de la forma (58) con $\alpha = \lambda^{-1}$. Un ejemplo adicional es la conexión entre las distribuciones Weibull y la de valor extremo. Tales ejemplos de bases probabilísticas para la distribución Weibull no se encuentran normalmente en situaciones en que la distribución, de hecho, se emplea. Sin embargo Gittus (1967), describió situaciones en que es probable que la distribución de Weibull surja.

2.7.1.3 Propiedades

Algunas gráficas de la función de densidad de probabilidad (57), para varios valores de c , se muestran en la Figura 1. En cada caso $\alpha = 1$ y $\xi_0 = 0$. (El valor cero para ξ_0 es por mucho el más frecuentemente usado, sobre todo representando distribuciones de tiempo de vida).

Para $c > 1$, la función de densidad de probabilidad tiende a cero como x tiende a cero, y hay una sola moda en

$$x = \alpha \left[\frac{c-1}{c} \right]^{\left(\frac{1}{c}\right)} + \xi_0$$

Este valor tiende rápidamente a $(\alpha + \xi_0)$ como c tiende a infinito. Para $0 < c < 1$ la moda está en cero, y $p_x(x)$ es una función decreciente de x para todos $x > \xi_0$. La mediana es

$$\alpha [\log_e 2]^{\left(\frac{1}{c}\right)} + \xi_0.$$

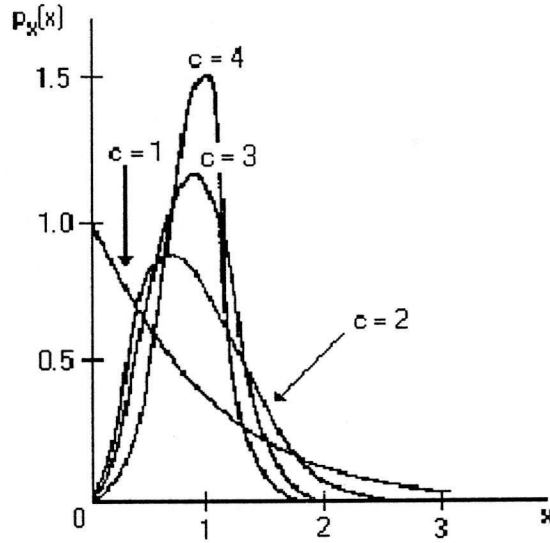


Figura 1. Función de densidad Weibull.

La función de distribución acumulativa es

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left\{\frac{x-\xi_0}{\alpha}\right\}^c}$$

En el resto de esta sección todas las distribuciones discutidas tendrán $\xi_0 = 0$, $\alpha = 1$, para que tengamos la función de densidad Weibull estándar

$$p_X(x) = cx^{c-1}e^{-x^c} \quad (x > 0) \quad (59)$$

La distribución de X ahora sólo depende del parámetro c . Las razones de momento, el coeficiente de variación, y los acumulantes estandarizados $\frac{k_K}{k_2^{\left(\frac{K}{2}\right)}}$ de esta distribución

son, iguales que aquellos de la distribución (57), los que como se verá más adelante sólo dependen de c , y no de ξ_0 o α . Los momentos que corresponden a (57) se obtienen fácilmente de los correspondientes de (59) usando la transformación $X^c = \xi_0 + \alpha X$.

Puesto que X^c tiene la distribución exponencial (56), el r -ésimo momento alrededor de cero de X es también el $\left(\frac{r}{c}\right)$ -ésimo momento alrededor de cero de una variable con la distribución (56). Por eso

$$\mu_r' = E(X^r) = \Gamma(rc^{-1} + 1) \quad (60)$$

El valor esperado de X es $\Gamma(c^{-1} + 1)$ y la varianza de X es igual a $\Gamma(2c^{-1} + 1) - [\Gamma(c^{-1} + 1)]^2$. Pueden obtenerse expresiones para razones de momentos fácilmente pero no se dan aquí explícitamente. Cuando c es grande

$$E(X) \approx 1 - \gamma c^{-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 \right) c^{-2} \approx 1 - 0.57722c^{-1} + 0.98905c^{-2} \quad (61^*)$$

$$\text{var}(X) \approx \left(\frac{\pi^2}{6} \right) c^{-2} \approx 1.64493 c^{-2}$$

El Cuadro 1 da algunos valores numéricos de la media, la desviación estándar, y los parámetros β_1 y β_2 para varios valores de c . Se notará que para $c=3.6$ (aprox.) β_1 es cero. Para valores de c en la vecindad de 3.6, la distribución de Weibull es similar en forma a una distribución normal. Dubey (1967) realizó un estudio detallado de la cercanía entre las dos distribuciones. También note que β_2 tiene un valor mínimo de aproximadamente 2.71 cuando $c=3.35$ (aprox.).

* γ es la constante de Euler.

Cuadro 1. Momentos de la distribución Weibull.

c	Media	Desviación Estándar	β_1	β_2
1.2	0.9407	0.7872	1.52	6.24
1.4	0.9114	0.6596	1.20	4.84
1.6	0.8966	0.5737	0.96	4.04
1.8	0.8893	0.5112	0.78	3.56
2.0	0.8862	0.4633	0.63	3.25
2.2	0.8856	0.4249	0.51	3.04
2.4	0.8865	0.3935	0.40	2.91
2.6	0.8882	0.3670	0.32	2.82
2.8	0.8905	0.3443	0.24	2.76
3.0	0.8930	0.3245	0.17	2.73
3.2	0.8957	0.3072	0.11	2.71
3.4	0.8984	0.2918	0.05	2.71
3.6	0.9011	0.2780	0.00	2.72
3.8	0.9038	0.256	-0.04	2.73
4.0	0.9064	0.2543	-0.09	2.75

La función generadora de momentos de $\log(X)$ es

$$E(e^{t \log X}) = E(X^t) = \Gamma(tc^{-1} + 1) \quad (62)$$

Considerando la función generadora de momentos (62) se obtiene la media y la varianza del $\log(X)$.

$$E(\log X) = -\frac{\gamma}{c}; \quad \text{var}(\log X) = \left(\frac{\pi^2}{6}\right) c^{-2} \quad (63)$$

La función generadora de información es

$$T(u) = E[(p(X))^u] = c^u \int_0^x x^{u(c-1)} e^{-ux^c} dx \quad (64)$$

Poniendo $ux^c = v$ (tomando $u > 0$ y recordando $c > 0$), obtenemos

$$T(u) = c^{u-1} \Gamma\left(\frac{1+u(c-1)}{c}\right) * u^{-\frac{1+u(c-1)}{c}} \quad (65)$$

De donde la entropía es

$$-T'(1) = \frac{(c-1)\gamma}{c} - \log_e c + 1 \quad (66)$$

2.7.1.4 Caracterización

Dubey (1966) obtuvo el resultado siguiente: Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas; entonces $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tiene una distribución de Weibull si y sólo si la distribución común de las X_i 's es una distribución Weibull.

Este resultado se puede establecer fácilmente usando la fórmula para la distribución de $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

2.7.1.5 Estadísticos de orden

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, cada uno con la misma función de densidad de probabilidad Weibull,

$$p_{X_i}(x) = c\alpha^{-1} \left(\frac{x - \xi_0}{\alpha} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x - \xi_0}{\alpha} \right)^c} \quad (x > \xi_0) \quad (67)$$

y $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, entonces

$$\begin{aligned} \Pr(Y > y) &= \{\Pr[X_i > y]\}^n = e^{-\left[n \left(\frac{y - \xi_0}{\alpha} \right)^c \right]} \\ &= e^{-\left[n^{\frac{1}{c}} \left(\frac{y - \xi_0}{\alpha} \right)^c \right]} \end{aligned}$$

Por lo tanto Y tiene la misma distribución de Weibull como cada X_i , sólo que α se reemplaza por $\alpha n^{\frac{1}{c}}$.

Puesto que la función de distribución acumulativa de cada X_i es

$$F_{X_i}(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x - \xi_0}{\alpha}\right)^c} \quad (x > \xi_0) \quad (68)$$

La función de densidad de probabilidad de los estadísticos de orden $X'_1 \leq X'_2 \leq \dots \leq X'_n$

puede expresarse explícitamente en términos de funciones elementales. De hecho

$$\begin{aligned} p_{X'_r}(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left(1 - e^{-\left(\frac{x - \xi_0}{\alpha}\right)^c} \right)^{r-1} * e^{-\left(\frac{x - \xi_0}{\alpha}\right)^c} \left(\frac{c \left\{ \frac{x - \xi_0}{\alpha} \right\}^{c-1}}{\alpha} \right) = \quad (69) \\ &= \frac{n! c \left\{ \frac{x - \xi_0}{\alpha} \right\}^{c-1}}{(r-1)!(n-r)! \alpha} * \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j e^{-\left(\frac{x - \xi_0}{\alpha}\right)^c} \quad (x > \xi_0) \end{aligned}$$

Ya que

$$\int_0^{\infty} z^{c-1+l} e^{-\beta z^c} dz = c^{-1} \beta^{-\left(1+\frac{l}{c}\right)} \Gamma\left(1+\frac{l}{c}\right),$$

Sigue de (69) que:

$$E\left[(X'_r - \xi_0)^l\right] = \frac{n! \alpha^l}{(r-1)!(n-r)!} \Gamma\left(1+\frac{l}{c}\right) * \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j (n-r+1+j)^{-\left(1+\frac{l}{c}\right)} \quad (70)$$

Lieblein (1955) dio las fórmulas para el producto de los momentos, obtenidos de una manera similar.

2.7.1.6 Estimación

Si c y ξ_0 se conocen, entonces $Z = (X - \xi_0)^c$ puede calcularse. El parámetro α restante se puede determinar usando el hecho que Z tiene distribución exponencial con función de densidad de probabilidad

$$p_X(z) = \alpha^{-1} e^{-\frac{z}{\alpha}} \quad (0 < z) \quad (71)$$

Así, los métodos desarrollados para la distribución exponencial pueden usarse.

2.7.1.6.1 Máxima verosimilitud

En la situación más usual ξ_0 se conoce que vale cero, pero c es desconocido, así que c y α deben estimarse. Dados los valores muestrales de una muestra al azar de tamaño n , representados por n variables aleatorias mutuamente independientes $X_1, X_2, \dots, X_n$ cada una teniendo la misma función de densidad de probabilidad

$$p_X(x) = c \alpha^{-1} \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha} \right)^c} \quad (x > 0) \quad (72)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud $\hat{c}$, $\hat{\alpha}$, de c y α respectivamente, satisfacen las ecuaciones

$$\hat{\alpha} = \left[n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^{\hat{c}} \right]^{\frac{1}{\hat{c}}} \quad (73)$$

$$\hat{c} = \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i^{\hat{c}} \log X_i \right) \left(\sum_{i=1}^n X_i^{\hat{c}} \right) - n^{-1} \sum_{i=1}^n \log X_i \right]^{-1} \quad (74)$$

(Si ξ_0 no es igual a cero, cada X_i es reemplazada por $(X_i - \xi_0)$). El valor de c tiene que ser obtenido de (74) y entonces usado en (73) para obtener $\hat{\alpha}$. Se notará que si c se supiera que es igual a $\hat{c}$, entonces $\hat{\alpha}$ sería el estimador de máxima verosimilitud de α . Si ξ_0 también tiene que ser estimado, X_i se reemplaza por $(X_i - \hat{\xi}_0)$ en (73) y (74) y hay una tercera ecuación

$$\left(\hat{c}-1\right) \sum_{i=1}^n\left(X_i-\hat{\xi}_0\right)^{-1}=\hat{c} \hat{\alpha}^{-\hat{c}} \sum_{i=1}^n\left(X_i-\hat{\xi}_0\right)^{\hat{c}-1} \quad (75)$$

Si el valor $\hat{\xi}_0$ que satisface las ecuaciones (73, 74 y 75) con X_i reemplazado por $(X_i - \hat{\xi}_0)$ es mayor que $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ entonces es el estimador de máxima verosimilitud de ξ_0 . De otra forma, el estimador de máxima verosimilitud es $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ y (73) y (74) deben resolverse entonces para $\hat{c}$ y $\hat{\alpha}$ con X_i reemplazado por $(X_i - \min(X_1, X_2, \dots, X_n))$.

Debe notarse que los estimadores de máxima verosimilitud son “regulares” (en el sentido de tener la distribución asintótica usual) sólo para $c > 2$. Si se conoce que $0 < c < 1$, entonces $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un estimador “super-eficiente” para ξ_0 este aspecto es muy importante porque establece que el primer estadístico de orden sería el mejor estimador de ξ_0 en ausencia de otra información.

Si los estimadores de máxima verosimilitud son regulares, entonces (Dubey, 1965) para n grande (cuando ξ_0 es conocido)

$$n \operatorname{var}(\hat{\alpha}) = \left[1 + \frac{\{\psi(2)\}^2}{\psi'(1)} \right] \left(\frac{\alpha}{c} \right)^2 = 1.087 \left(\frac{\alpha}{c} \right)^2,$$

$$n \operatorname{var}(\hat{c}) = c^2 \{\psi'(1)\}^{-1} = \frac{6c^2}{\pi^2} = 0.608c^2,$$

$$\operatorname{corr}(\hat{\alpha}, \hat{c}) = \frac{\psi(2)}{[\psi'(1) + (\psi(2))^2]^{\frac{1}{2}}} = 0.313.$$

Haan y Beer (1967) sugirieron que la Ecuación (74) (con X_i reemplazada por $(X_i - \hat{\xi}_0)$) se resuelva para $\hat{c}$, para una serie de valores de ensayo de $\hat{\xi}_0$. El valor de $\hat{\alpha}$ se obtiene entonces fácilmente de (73) y los valores de la verosimilitud pueden ser calculados. Un método alternativo sería comparar los valores de $\hat{\alpha}$ obtenidos de (73) y (75).

Experimentos de muestreo de Monte Carlo (Aroian, 1965) establecieron que $\hat{c}$ es un estimador sesgado de c , el sesgo relativo depende del tamaño de la muestra pero no de c . Para una muestra de tamaño 170, el sesgo es aproximadamente 0.8%.

En trabajos de prueba de tiempo de vida, a menudo es conveniente detener las observaciones en cuanto un número pre-especificado de artículos, digamos k entre los n bajo la prueba, falla. Los tiempos de vida observados, $X'_1 \leq X'_2 \leq \dots \leq X'_k$ así obtenidos pueden considerarse como una muestra censurada, excluyendo los $(n-k)$ valores más altos. De la función conjunta de densidad de probabilidad

$$\frac{n!}{(n-k)!} \prod_{j=1}^k \left[c \alpha^{-1} \left(\frac{X'_j - \xi_0}{\alpha} \right)^{c-1} \right] * e^{-\sum_{j=1}^k \left\{ \frac{X'_j - \xi_0}{\alpha} \right\}^c} - (n-k) \left\{ \frac{X'_k - \xi_0}{\alpha} \right\}^c \quad (\xi_0 \leq x'_1 \leq x'_2 \leq \dots \leq x'_k) \quad (76)$$

Las ecuaciones de máxima verosimilitud para los estimadores de ξ_0 , α , y c puede obtenerse (Cohen, 1965). Si el valor de ξ_0 se sabe que es cero, entonces las ecuaciones

obtenidas son de forma similar a (73) y (74) pero con

n^{-1} , $\sum_{i=1}^n X_i^{\hat{c}}$, $\sum_{i=1}^n X_i^{\hat{c}} \log X_i$, $\sum_{i=1}^n \log X_i$ reemplazado por k^{-1} , $\sum_{i=1}^k X_i^{\hat{c}} + (n-k)X_k^{\hat{c}}$,

$\sum_{i=1}^k X_i^{\hat{c}} \log X_i' + (n-k)X_k^{\hat{c}} \log X_k'$ y $\sum_{i=1}^k \log X_i'$ respectivamente.

Para muestras de tamaño 10, censuradas por la omisión de los 5 valores más altos, McCool en 1966 (citado por Jonson y Kotz, 1970), obtuvo percentiles estimados de la

distribución de $\frac{\hat{c}}{c}$, basado en experimentos de muestreo. Las estimaciones se basan en

cinco juegos de 1,000 muestras cada uno, para $c=0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ respectivamente. Es

notable que el valor estimado de $E \left[\frac{\hat{c}}{c} \right]$ es 1.56, indicando que $\hat{c}$ debe ser dividido por

1.56 para obtener un estimador de c aproximadamente insesgado.

3 DESCRIPCIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO

3.1 Situación geográfica

La Estación Forestal Experimental Zoquiapan (EFEZ), cuenta con una superficie de 1,638.5914 ha. Se ubica al NW del Volcán Iztaccihuatl y delimitada por las coordenadas 19°12'30" y 19°20'60" de latitud N, y entre 98°42'30" y 98°30'00" de longitud W (Maass y otros, 1981). La Estación forma parte del Parque Nacional Zoquiapan y Anexas localizado en las zonas limítrofes de los Estados de México y Puebla, pudiéndose llegar a ella por la brecha que entronca con la carretera México-Puebla a la altura del km 52 y de ahí se recorren 12 km de terracería para llegar a la EFEZ.

3.2 Topografía

El relieve predominante en la zona es montañoso. Las pendientes varían de 2% en las partes planas hasta 50% en las zonas montañosas (Rey, 1975). Incluye altitudes de 3,080 msnm, en el Llano Tlalpuente sobre la porción Noroeste del campo; hasta 3,690 msnm, en el Cerro Tres Cruces en la parte Sur. Dentro de las elevaciones más importantes se encuentra el Cerro del León con 3,500 msnm, cerca de la parte central; el Cerro el Papayo con 3,620 msnm, en la parte Noroeste; el Cerro Tenenepa con 3,680 msnm en la parte Sur. Los principales llanos que se encuentran son los de Aculco y San Miguel, en

la parte Oeste; Tlalpuente, en la parte Noreste; la Mesa y Xaxalpa en la parte Noroeste, (Rey, 1975; Rodríguez, 1976; Zavala, 1984).

3.3 Clima

El clima es templado subhúmedo, con lluvias en verano. La precipitación anual es de 964.1 mm. La temperatura media es de 7.4 °C y las temperaturas extremas son -11.0 °C la mínima y 21.5 °C la máxima (Zavala, 1984).

Las lluvias mínimas se presentan en febrero y las máximas en julio. Dada la cercanía al Iztaccihuatl, en el área se presentan nevadas esporádicas.

3.4 Geología

El sustrato geológico ha sido afectado por la acción de cuña del agua y las raíces que han producido desquebrajamientos, cuyos fragmentos se acumulan al pie de los cerros formando depósitos de talud que, junto con los conos aluviales, constituyen el tipo de material más joven del área. Esta región tiene su origen en el terciario superior tardío, durante la formación de la fractura de Humboldt (Franco y Búrquez, 1981).

Los afloramientos de la zona son, en su mayor parte, andesíticos, particularmente rocas resultantes de diferentes condiciones de solidificación (basaltos y andesitas), rocas de aspecto vítreo y otras muy porosas y de baja densidad (Maass y otros, 1981).

3.5 Hidrología

En la zona existen pocas corrientes superficiales, que se forman durante la época de lluvias, a partir de escurrimientos de las partes más altas y frías formándose algunos arroyos. Sobresalen el Arroyo de Aculco que nace en la parte Suroeste en las estribaciones del Iztaccihuatl y corre en dirección Sur-Noreste. El Arroyo Temascatitla que se ubica en la cañada del mismo nombre, originándose al Este del Cerro Tres Cruces, corriendo en dirección Sur-Este y se une al Arroyo Tlacupaso en la parte Este. El Arroyo Tlacupaso corre por la parte Sureste, en la Cañada Matiocho y sale hacia el Llano Zapintla fuera del área, (Maass y otros, 1981).

3.6 Suelos

En la Estación Forestal Experimental Zoquiapan se realizó un estudio de suelos por Rey en 1975, quien los describe como profundos, de textura franco-arenosa predominante, moderadamente plásticos, ricos en nitrógeno y materia orgánica. Los suelos son derivados de cenizas volcánicas, y poseen un desarrollo pedogenético incipiente a causa de la acción de los factores clima y vegetación, en los que predomina un pH ácido. El drenaje de la zona es bueno.

3.7 Vegetación

Dadas las condiciones climáticas y edafológicas se propicia el desarrollo del bosque de coníferas y algunas hojosas. Los bosques de pino comprenden el 60% de la superficie

del área, distribuyéndose de los 3,000 a 3,700 msnm; el suelo donde se distribuyen presenta un desarrollo más o menos avanzado; con un pH que varía de 5.6 a 7.1 con profundidad de 100 cm (Rey, 1975), con buen drenaje. Los bosques de oyamel se distribuyen en altitudes de 3,150 a 3,500 msnm, los más abundantes están alrededor de 3,300 msnm. Este tipo de bosque cubre aproximadamente el 30% del área y se encuentra en terrenos protegidos por cañadas y en exposiciones Norte y Noreste (Maass y otros, 1981).

Los pastizales se presentan en los llanos del área, los cuales se formaron por lagos de glaciación; se localizan en las menores altitudes cerca de 3,000 msnm cubriendo el 2.5% del área, encontrándose especies como: *Calamagrostis tolucensis*, *Festuca tolucensis*, *Muhlenbergia quadridentata*, *M. montana*, *M. macroura*, y *Piptochaetium fimbriatum*.

Los bosques de *Alnus firmifolia* ocupan el 1% del área, distribuyéndose entre 3,100 a 3,300 msnm.

Los estratos herbáceo y arbustivo presentan varias especies entre las cuales se encuentran: *Capriola lactylon*, *Hilaria cenchroides*, *Epicampus macrura*, *Baccharis conferta*, *Lopezia mexicana*, *Senesio vulneraria*, *Stedia eupatoria*, *Opuntia tunicata*, *Eupatorium glabratum*, *Penstemon gentianoides*, *Senesio cinerarioides* (Rodríguez, 1976; Maass y otros, 1981).

4 MÉTODOS

Para poder determinar el índice de sitio de oyamel, se realizaron 30 análisis troncales generando con ello 432 relaciones altura-edad de árboles dominantes escogidos en forma selectiva. En el trabajo de campo se tomó la información de los análisis troncales, y en trabajo de gabinete se incluyó la obtención de datos.

En la metodología para la construcción de curvas de índice de sitio se procederá a obtenerlas por medio de la metodología tradicional, y como nueva modalidad, de acuerdo al objetivo del presente trabajo, se implementará el uso de estadísticos de orden.

4.1 Selección del arbolado

Se llevó a cabo un muestreo selectivo ya que se requería arbolado que no presentara ataque de insectos, ni enfermedades, que no estuvieran bifurcados y que fueran dominantes.

Se seleccionaron un total de 30 árboles los cuales se dividieron en dos áreas: la primera ubicada en la Ladera de Temascaltitla en la parte Noreste del Cerro del Tello y la segunda en la porción Norte del Cerro del León, procurando que estuvieran representadas las tres posiciones en la pendiente (superior, media e inferior).

4.2 Derribo y seccionamiento

La realización de los análisis troncales se realizó siguiendo la metodología de Mass (1970) y Klepac (1983) la cual se describe enseguida:

Después de seleccionar un árbol, se procedió a marcarlo para su derribo, después de derribarlo se seccionó a la altura de 0.30 y 1.30 m, posteriormente a medidas comerciales para posibilitar su utilización posterior, esto se realizó a lo largo del fuste y punta. A partir de la última rodaja obtenida se tomó la distancia a la yema apical para conocer su altura total.

En cada rodaja obtenida se marcó por un lado de la cara la altura de la sección que le correspondía así como el número del árbol al cual pertenecía.

4.3 Materiales y equipo

Para llevar a cabo el trabajo de campo se emplearon diferentes materiales y equipo, entre ellos cinta diamétrica, cinta de 30 m graduada para medir la altura y marcar la altura de cada sección, clinómetro para determinar el porcentaje de pendiente, motosierra para derribar y seccionar los árboles, crayones de color para marcar las secciones, machete, ganchos troceros, y formas de registro para la toma de datos de campo. Para la toma de datos en la medición de los análisis troncales se empleó: regla de 1 m graduada en mm, cepillo de carpintero, lija para madera, diesel para poder distinguir con más claridad los anillos, bicolors, alfileres de cabeza de color y formas de registro.

4.4 Trabajo de gabinete

4.4.1 Análisis troncal

En las rodajas obtenidas se procedió al conteo y medición de anillos. Para poder determinar la edad total de cada árbol se contaron los anillos de la rodaja de 0.30 m, a éstos se les sumaron dos años más, considerando que el oyamel crece aproximadamente 30 cm a la edad de dos años, esta observación se realizó directamente en el área de estudio. La medición de los anillos se realizó de la periferia hacia el centro en quinquenios; en esta etapa se tomaron cuatro mediciones y cuatro conteos de anillos para no cometer errores y evitar contar los anillos falsos.

4.4.2 Procesamiento de datos

La información obtenida del análisis troncal se derivó en 432 datos (Cuadro 1 del Apéndice), para poder trabajar con la distribución Weibull y poder aplicar regresión no lineal con el método Marquardt de SAS, para el ajuste del modelo y obtención de los parámetros.

4.4.3 Curvas de índice de sitio

Puesto que el objetivo del presente estudio es el uso de estadísticos de orden para construir curvas de índices de sitio para uso operativo, incluirá la información de altura-edad básicamente.

En la relación altura-edad se eligió para el ajuste de curvas, el método de la curva guía (Clutter y otros, 1992), utilizando el modelo Weibull (79), también se incorporan los modelos básicos de crecimiento como la ecuación de Schumacher (1939) (77) y la ecuación de Chapman-Richards (1959) (78). Estos dos últimos modelos solamente se presenta el desarrollo matemático para poder hacer uso de los estadísticos de orden, en la construcción de curvas de índice de sitio.

$$H = ae^{\left[b\left(\frac{1}{E}\right)\right]} \quad (77)$$

$$H = a(1 - e^{-bE})^c \quad (78)$$

$$H = d \left(1 - e^{\left(\frac{E-a}{b}\right)^c} \right) \quad (79)$$

donde:

H = altura de los árboles dominantes

E = edad

e = base de los logaritmos naturales

a, b, c, d = parámetros

Para el caso de la Weibull a = parámetro de posición, b = parámetro de escala y c = parámetro de forma y d = altura asintótica.

Nuestro objetivo es utilizar la tercera opción (79) como curva de crecimiento y fijar las etiquetas de IS a la edad base por medio de los estadísticos de orden. Esta opción permite n etiquetas, si se decide construir las curvas desde el primer estadístico de orden hasta el último. Se obtienen curvas de índice de sitio de tipo anamórfico y polimórfico, utilizando las formulaciones de la curva guía.

Al definir una familia de curvas de índice de sitio es común que, contando con la curva guía quede pendiente decidir cuales son los intervalos, hacia arriba y hacia abajo, que corresponderán a las etiquetas de calificación de calidad de sitio, esto es, los índices de sitio. Esto ha sido resuelto de diversas maneras:

- a) Fijar arbitrariamente las etiquetas que se crean convenientes, de manera proporcionada a la altura que los árboles tengan y considerando intervalos regulares de modo que se tenga el número deseado de etiquetas.
- b) Dividiendo el rango (amplitud) observado a la edad base entre un entero que corresponda a las etiquetas de clase que se quieran tener. Aun se requiere decidir sobre enteros para que cumplan de mejor manera la intención de tener simplemente etiquetas.
- c) Otra opción mencionada, aunque poco practicada, es que la separación entre las etiquetas corresponda a los percentiles que se decidan de acuerdo a la distribución que se suponga que existe en los valores de altura observados para la edad base. La distribución normal podría ser empleada, en congruencia con el supuesto análogo empleado en la regresión. Pero podría ser alguna otra distribución como la Weibull, solo para el caso de la definición de la ubicación de etiquetas, no para la regresión, particularmente no para el caso de ajuste no lineal en el que el ajuste es no paramétrico. Análogamente al uso de los percentiles, se podrían emplear los estadísticos de orden dada una distribución apropiada, como la Weibull, debido a la gentileza de la distribución de sus estadísticos de orden.

5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1 Análisis troncal

Se realizó el estudio de análisis troncal para el *Abies religiosa* (H.B.K.) Schl. et Cham. (oyamel), del cual sólo se utilizaron los resultados del análisis del crecimiento en altura. Se graficaron los datos altura-edad (Cuadro 1 del Apéndice) de los 30 árboles para advertir la dispersión de puntos posibles o irregulares en el crecimiento. Se observó que tienen un comportamiento de desarrollo uniforme (Fig. 2).

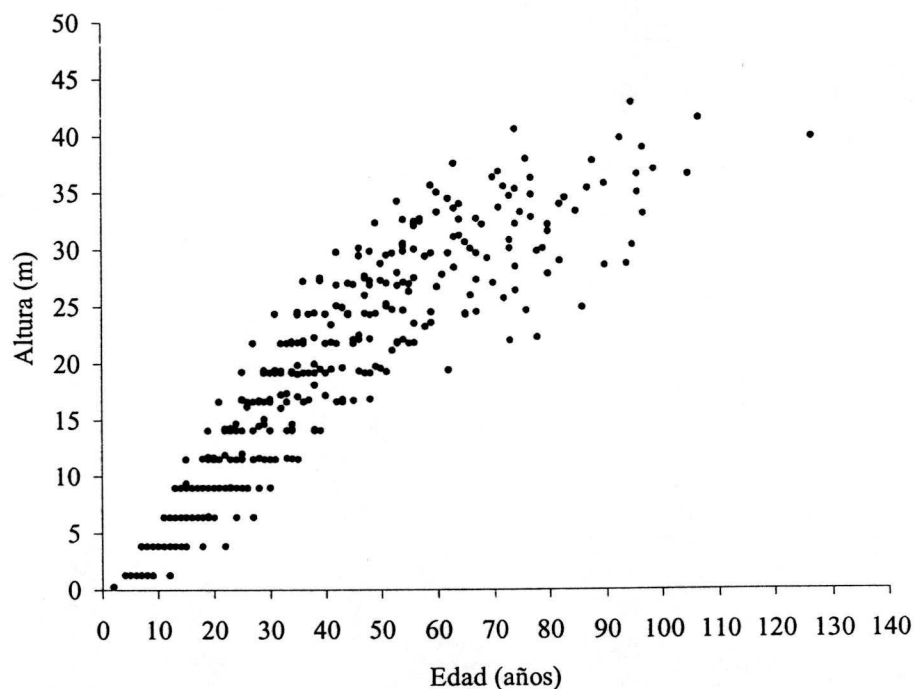


Figura 2. Grafica de dispersión de los 30 árboles.

5.2 Base de datos

Los datos que se emplearon en el análisis consistió en 432 pares de datos (edad, altura) con las siguientes frecuencias, los cuales se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Distribución de frecuencias de los 432 pares de datos.

Edad	Frec.	Edad	Frec.	Edad	Frec.	Edad	Frec.	Edad	Frec.	Edad	Frec.
2	30	19	11	35	7	51	5	67	4	85	1
4	6	20	8	36	7	52	3	68	1	86	1
5	4	21	4	37	4	53	5	69	1	87	1
6	9	22	7	38	8	54	7	70	2	88	1
7	5	23	10	39	4	55	3	71	2	90	2
8	6	24	6	40	5	56	6	72	2	93	1
9	6	25	11	41	3	57	2	73	4	94	1
10	5	26	5	42	6	58	2	74	5	95	2
11	6	27	8	43	5	59	4	75	1	96	2
12	7	28	6	44	3	60	3	76	2	97	2
13	8	29	8	45	4	61	1	77	3	99	1
14	8	30	6	46	5	62	4	78	2	105	1
15	10	31	6	47	5	63	4	79	1	107	1
16	5	32	5	48	7	64	3	80	3	127	1
17	6	33	6	49	3	65	3	82	2		
18	5	34	9	50	3	66	2	83	1		

5.3 Curvas de índice de sitio forma tradicional

5.3.1 Ajuste de la curva guía empleando el modelo de Weibull

El modelo de Weibull para crecimiento es:

$$H(t) = \beta_1 \left(1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} \right) \quad (80)$$

La primera tarea es estimar los parámetros del modelo. La estimación se logra ágilmente si se eligen valores iniciales adecuados para los parámetros y se emplea el procedimiento no lineal (PROC NLIN) de SAS (Statistical Analysis System, 1992a y 1992b). Los valores iniciales para los parámetros fueron tomados de Bojorges (1990), y de García (1998). Así, empleando el método Marquardt se logró la convergencia en solamente 17 iteraciones, para tener los resultados que se muestran en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Análisis de la varianza y parámetros estimados para la curva guía con PROC NLIN, Método Marquardt de SAS.

Fuente	GL	Suma de cuadrados	Cuadrado medio del error	
Regresión	3	166435.6939	55478.5646	
Residual	429	4801.5819	11.1925	
Total no corregido	432	171237.2758		
Total corregido	431	53673.4509		

Parámetro	Estimado	Error estándar Asintótico	Intervalo de confianza Asintótico 95%	
			Bajo	Alto
B_1	36.4277	1.1423	34.1825	38.6729
B_2	0.0041	0.0007	0.0027	0.0055
B_3	1.4518	0.0590	1.3358	1.5678

El ajuste es satisfactorio, ya que produce un *pseudo* $R^2 = 0.9720$.

$$pseudo R^2 = 1 - \frac{SC_{error}}{SC_{Total\ corregido}}$$

donde:

SC_{error} = suma de cuadrados del error

$SC_{Total\ corregido}$ = suma total de los cuadrados sin corregir

La expresión de la curva guía es:

$$H(t) = 36.4277 \left(1 - e^{-0.0041 t^{1.4518}} \right) \quad (80a)$$

Tomando como edad base 50 años, el índice de sitio promedio es de 25.455 m.

5.3.2 Asignación arbitraria de etiquetas

La base de datos registra las siguientes alturas para la edad 50 (base): 19.6, 28.82, y 27.34 m. Naturalmente, tres es un número muy reducido de observaciones, pero esta inconveniencia podría subsanarse si se decide emplear los datos en una vecindad de la edad base (digamos 48 a 52) y se toma como marca de clase a la propia edad base, lo que produciría un mayor número de observaciones. Para esta parte de la discusión consideraremos solamente la amplitud sugerida por los tres datos reales que corresponden originalmente a la edad base.

Recurriendo a la conveniencia, podemos proponer las etiquetas 19, 22, 25, 28, y 31. O bien, menos de 20.5, entre 20.5 y 23.5, entre 23.5 y 26.5, entre 26.5 y 29.5, y más de 29.5. Así queda definida la familia de curvas anamórficas con la ecuación Weibull (13) que se muestra en la Figura 3.

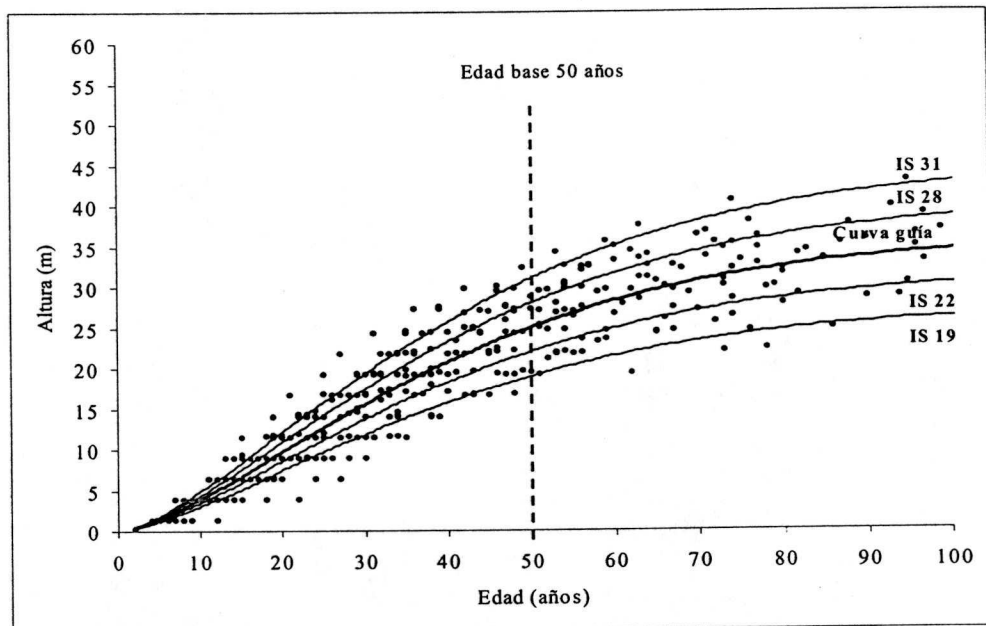


Figura 3. Índice de sitio para *Abies religiosa* Schl. et Cham. con etiquetas asignadas arbitrariamente.

5.3.3 Asignación referida a la amplitud dada por la muestra

Usando solamente la amplitud ofrecida por la muestra ($28.82 - 19.60 = 9.22$ m) se podrían sugerir cinco etiquetas, lo que produciría intervalos de $(9.22/5) = 1.84$ m, que redondeando a 2.0 alrededor del índice de sitio promedio tendríamos 21, 23, 25, 27, y 29 como etiquetas, lo que en este caso reduce el intervalo de ubicación de las curvas. La familia de curvas de índice de sitio generada por este algoritmo se muestra en la Figura 4.

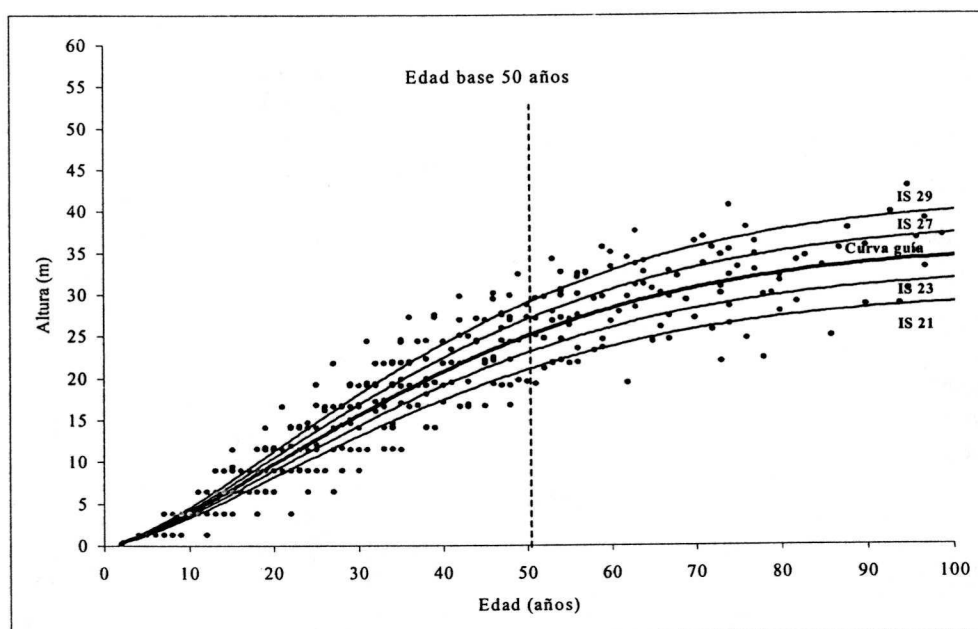


Figura 4. Índice de sitio para *Abies religiosa* Schl. et Cham. referida a la amplitud dada por la muestra.

Ceñirse a la amplitud sugerida estrictamente por las alturas de la edad base (tres datos) es muy restrictivo, recurramos a una vecindad de dos años antes y dos después de la edad base (48 a 52 años, ver Cuadro 4), las alturas experimentales son:

Cuadro 4. Datos de altura en la vecindad de edad 48 a 52 años.

Edad (años)	48	49	50	51	52
Altura (m)	16.86	19.76	19.6	19.32	21.16
	19.22	24.47	27.34	25.09	24.78
	22.22	32.40	28.82	25.32	29.7
	24.34			27.14	
	26.95			29.55	
	27.34				
	29.90				

De estas alturas se produce una amplitud de $(32.40 - 16.86) = 15.54$ m. Proponiendo nuevamente cinco etiquetas, el intervalo regular será de $(15.54/5) = 3.11$ m. Redondeando a 3.0 m y en torno al índice de sitio promedio, tendríamos las etiquetas 19, 22, 25, 28, y 31, que son coincidentes con las etiquetas arbitrariamente establecidas. La gráfica derivada de esta secuencia, naturalmente, es la misma que se muestra en la Figura 3.

5.3.4 Asignación de etiquetas basándose en una distribución normal

La asignación de etiquetas basándose en la suposición de una distribución normal por medio de percentiles de la altura para la edad base. Esta opción tendría dos versiones, a) basándose en el error asintótico derivado del ajuste de la curva guía; y b) basándose en el cálculo directo del error empleando las alturas en la vecindad de la edad base.

a) El error asintótico derivado del ajuste no lineal se obtiene mediante:

$$S_{y|x_0}^{\wedge} = \left[\sigma_{error}^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{SC_{xx}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde:

$S_{y|x_0}^{\wedge}$ = error estándar de un valor de $\hat{y}$ a un valor dado x_0

σ_{error}^2 = varianza del error obtenida por medio de la regresión no lineal

$(x_0 - \bar{x})^2$ = cuadrado de la distancia de x_0 a $\bar{x}$

SC_{xx} = suma de cuadrados

n = número total de observaciones

Este cálculo está instrumentado en el mismo procedimiento NLIN de SAS, por lo que su obtención resulta una tarea de solución inmediata. Así, solo restaría decidir los percentiles basados en la distribución de “t”, digamos los percentiles 10, 30, 50, 70, 90. Éstos podrían, como en los otros casos, ser cualesquiera; se sugieren estos para analizar su conveniencia bajo algún criterio de bondad que se definirá posteriormente. Esta distribución de “t” tendría los grados de libertad remanentes para la fuente residual (el error), en este caso 429, que naturalmente tiene una cercanía suficientemente aceptable a “Z” (la normal estándar), por lo que el uso de “t” o de “Z” sería sensiblemente equivalente. Los valores de “t” (“Z”) para los percentiles propuestos y las correspondientes etiquetas se muestran en el Cuadro 5.

donde:

$$SC_{xx} = 260810.7755$$

$$n = 432$$

$$\sigma_{error}^2 = 11.1925$$

$$\bar{x} = 35.0718$$

$$x_0 = 50$$

$$S_{y|x_0} = \sqrt{11.1925 * \left(1 + \frac{1}{432} + \frac{(50 - 35.0718)^2}{260,810.7755}\right)} = 3.3508$$

Cuadro 5. Valores de “t” y sus correspondientes etiquetas (Índices de Sitio).

Percentil	10	30	50	70	90
Valor de t	-1.2835	-0.5248	0	0.5248	1.2835
$S_{y x_0}$	3.3508	3.3508	3.3508	3.3508	3.3508
$tS_{y x_0}$	-4.3009	-1.7585	0	1.7585	4.3009
IS_{prom}	25	25	25	25	25
$IS_{prom.} + tS_{y x_0}^*$	21	23	25	27	29

La familia de curvas de índice de sitio producidas por este algoritmo se muestran en la Figura 4.

Al comparar el cálculo con el procedimiento NLIN de SAS, podemos observar que el valor del error asintótico para un valor individual con este procedimiento es 3.35.

b) El error estándar (desviación estándar) derivado directamente de los datos de altura en la vecindad definida para la edad base, bajo el supuesto de normalidad.

* Los valores obtenidos se redondearon a 4 decimales para mejor comprensión y el valor de las etiquetas (última fila) se redondeó a números enteros (Cuadros 5, 6 y 7).

Este cálculo se hace empleando la fórmula convencional para el estadístico S^2 , estimador de σ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{SC_{x_i}}{n-1}$$

Aplicada a los datos de la vecindad (Cuadro 4) produce un valor de 18.3363 (varianza de la muestra). Como se ha supuesto que esos datos son una muestra de una distribución normal, sus percentiles nuevamente son determinados mediante la distribución de “t”, salvo que ahora los grados de libertad son solamente 20. Para la obtención de los percentiles se buscó la forma en que estos nos produjeran etiquetas con igual intervalo de distribución entre etiquetas. Los percentiles y las correspondientes etiquetas se muestran en el Cuadro 6.

Cuadro 6. Valores de “t” y sus correspondientes etiquetas (Índices de Sitio).

Percentil	13	30	50	70	87
Valor de t	-1.1593	-0.5329	0	0.5329	1.1593
$S_{y x_0}$	7.1347	7.1347	7.1347	7.1347	7.1347
$tS_{y x_0}$	-8.2710	-3.8018	0	3.8018	8.2710
IS_{prom}	25	25	25	25	25
$IS_{prom.} + tS_{y x_0}$	17	21	25	28	33

La Figura 5 muestra la familia de curvas de índice de sitio producidas por este algoritmo.

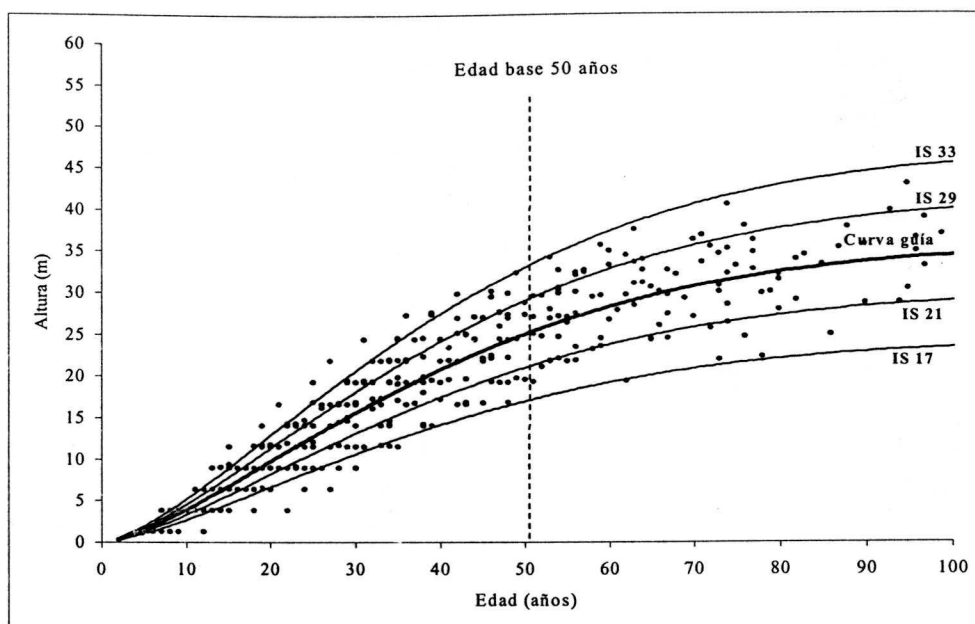


Figura 5. Familia de curvas de índice de sitio producidas con los datos del Cuadro 6.

Al aplicar los percentiles 10, 30, 50, 70 y 90 a los datos de la vecindad (Cuadro 4) las etiquetas resultantes son: 16, 21, 25, 29 y 34 (Cuadro 7), donde se aprecia que el intervalo entre etiqueta y etiqueta es no homogéneo.

En la Figura 6 se muestra la familia de curvas de índice de sitio producidas por este algoritmo.

Cuadro 7. Valores de "t" y sus correspondientes etiquetas (Índices de Sitio).

Percentil	10	30	50	70	90
Valor de t	-1.3253	-0.5329	0	0.5329	1.3253
$S_{y x_0}$	7.1347	7.1347	7.1347	7.1347	7.1347
$tS_{y x_0}$	-9.4559	-3.8018	0	3.8018	9.4559
IS_{prom}	25	25	25	25	25
$IS_{prom.} + tS_{y x_0}$	16	21	25	29	34

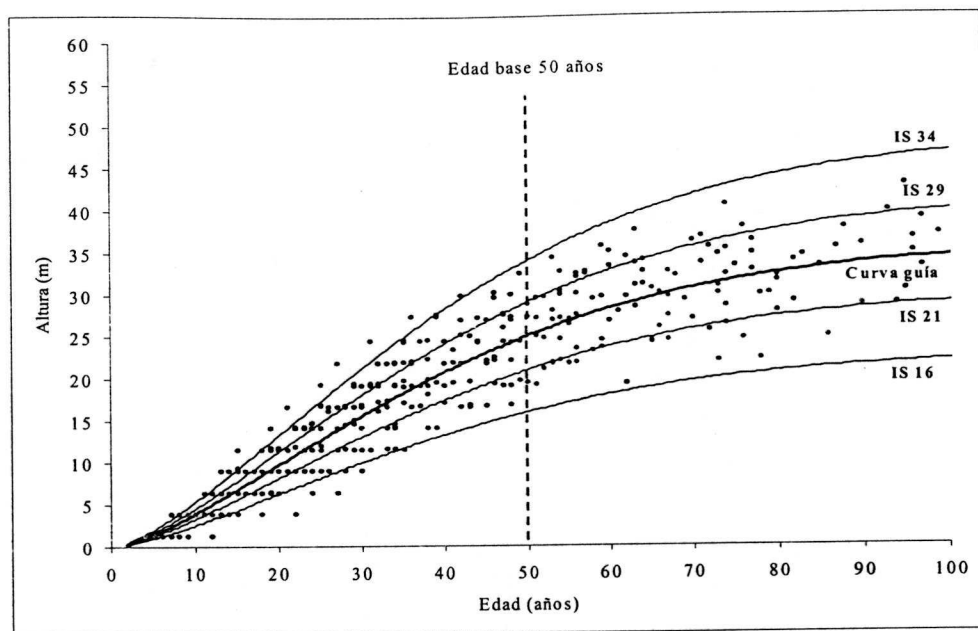


Figura 6. Familia de curvas de índice de sitio producidas con los datos del Cuadro 7.

5.4 Curvas de índice de sitio con estadísticos de orden

La construcción de la curva de crecimiento en altura es igual que en el caso anterior. Sin embargo, la asignación de etiquetas se hace basándose en los estadísticos de orden de las alturas en la vecindad (48 a 52 y 49 a 51 años) suponiendo una distribución Weibull para esas alturas. La primera vecindad se observa en el Cuadro 4 con 21 árboles en la muestra mientras que para la segunda vecindad (49 a 51 años) son 11 árboles (Cuadro 8).

Cuadro 8. Datos de altura en la vecindad de edad 49 a 51 años.

Edad (años)	49	50	51
Altura (m)	19.76	19.6	19.32
	24.47	27.34	25.09
	32.4	28.82	25.32
			27.14
			29.55

Como se expuso en la Sección 2.5.1.5, los estadísticos de orden de una distribución Weibull tienen la generosa propiedad de tener también una distribución Weibull, que depende de la distribución original, esto es, de sus parámetros.

La tarea ahora se resume a estimar los parámetros de la distribución Weibull asumida para las alturas de la vecindad definida. Esto se puede desarrollar empleando el programa WEST, estructurado por Torres (1987). Este programa fue diseñado para calcular el diámetro promedio para cada sitio o plantación, los valores máximos y mínimos, desviación estándar y la varianza; pero dado el supuesto de que la altura tendría una distribución Weibull, el programa puede ser usado, produciendo datos de altura. También proporciona los parámetros estimados por 11 diferentes procedimientos de estimación, la suma de las desviaciones absolutas, diferencia entre el diámetro promedio observado y el predicho, valores calculados para las pruebas de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov y de Ji-cuadrada (Torres y otros, 1992). Los juegos de parámetros seleccionados y los métodos de estimación se pueden observar en el Cuadro 9 para la vecindad 48 a 52 años y Cuadro 10 para la vecindad 49 a 51 años.

La elección del mejor procedimiento se decide con base en los estimadores de bondad de ajuste, seleccionando para cada sitio aquellos que presentaron el valor más bajo del calificador, mismo que supone la menor suma de las desviaciones absolutas y una menor diferencia entre el diámetro observado y el predicho (Torres y otros, 1992; Magaña y otros, 1992).

De acuerdo a las instrucciones de WEST, el mejor juego de estimadores es el derivado de la secuela propuesta por DUBEY por tener el valor más bajo del calificador, el cual es de 5 y 3 obtenidos de los Cuadros 9 y 10. Sin embargo, como ilustración conviene

presentar la forma de la distribución originada por cada uno de los juegos de estimadores obtenidos, éstas distribuciones se muestran en la Figura 7 del Cuadro 9¹.

En las figuras 7a a la 7j se presentan las distribuciones derivadas de la estimación de los parámetros Weibull con el programa WEST, con diferentes secuencias de obtención (algoritmos). a) ABERNETHY; b) DUBEY; c) MOMENTOS; d) BAIN & ANTLE; e) REG. LINEAL; f) REG. NO-LINEAL; g) WINGO; h) MAX. VEROSIMILITUD.; i) MOM. P. P., L=1; j) MOM. P. P., L=2.

Con el juego de estimadores (Cuadro 9) de los parámetros Weibull de la variable original, ahora es posible establecer la distribución del primer estadístico de orden, calcular su valor esperado, observar que se puede escribir en función del valor esperado de la curva guía y proponerlo como límite inferior para la familia de curvas de índice de sitio (edad base = 50). Del mismo modo se puede proceder con los demás estadísticos de orden.

Lo antes mencionado se realiza con la ayuda de los estadísticos de orden, los cuales se expresan de la siguiente forma:

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, cada uno con la misma función de densidad de probabilidad Weibull, entonces utilizando la ecuación original (57) y sustituyendo ξ_0 , α y c por A_0 , B_0 y C_0 , respectivamente, la ecuación queda como sigue:

$$p_{x_i}(x) = C_0 B_0^{-1} \left(\frac{x - A_0}{B_0} \right)^{C_0-1} e^{-\left(\frac{x - A_0}{B_0} \right)^{C_0}} \quad (x > A_0) \quad (81)$$

donde:

¹ Solo se grafican los valores del Cuadro 9, como ejemplo ilustrativo.

presentar la forma de la distribución originada por cada uno de los juegos de estimadores obtenidos, éstas distribuciones se muestran en la Figura 7 del Cuadro 9¹.

En las figuras 7a a la 7j se presentan las distribuciones derivadas de la estimación de los parámetros Weibull con el programa WEST, con diferentes secuencias de obtención (algoritmos). a) ABERNETHY; b) DUBEY; c) MOMENTOS; d) BAIN & ANTLE; e) REG. LINEAL; f) REG. NO-LINEAL; g) WINGO; h) MAX. VEROSIMILITUD.; i) MOM. P. P., L=1; j) MOM. P. P., L=2.

Con el juego de estimadores (Cuadro 9) de los parámetros Weibull de la variable original, ahora es posible establecer la distribución del primer estadístico de orden, calcular su valor esperado, observar que se puede escribir en función del valor esperado de la curva guía y proponerlo como límite inferior para la familia de curvas de índice de sitio (edad base = 50). Del mismo modo se puede proceder con los demás estadísticos de orden.

Lo antes mencionado se realiza con la ayuda de los estadísticos de orden, los cuales se expresan de la siguiente forma:

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes, cada uno con la misma función de densidad de probabilidad Weibull, entonces utilizando la ecuación original (57) y sustituyendo ξ_0 , α y c por A_0 , B_0 y C_0 , respectivamente, la ecuación queda como sigue:

$$p_{x_i}(x) = C_0 B_0^{-1} \left(\frac{x - A_0}{B_0} \right)^{C_0-1} e^{-\left(\frac{x - A_0}{B_0} \right)^{C_0}} \quad (x > A_0) \quad (81)$$

donde:

¹ Solo se grafican los valores del Cuadro 9, como ejemplo ilustrativo.

A_0, B_0, C_0 = parámetros estimados, con el programa West.

Así se puede escribir la función de densidad para los estadísticos de orden como en (69) con el cambio de notación en los parámetros.

Cuadro 9. Comparación de estimadores de parámetros de la función de distribución de probabilidades Weibull, para 21 árboles de *Abies religiosa* en Zoquiapan, México.

RESUMEN DE DATOS			DATOS NO-AGRUPADOS	
MEDIA OBS.	=	24.8229	OBS. MAX.	= 32.40
DESV. ST.	=	4.2821	OBS. MIN.	= 16.86
VARIANZA	=	18.3364	ÁREA SITIO	= 0.00 HAS.
NO. TOTAL OBS.	=	21	SITIO NO.	= 1

RESUMEN DEL AJUSTE			
PARÁMETROS ESTIMADOS DE LA WEIBULL			
	A	B	C
PERCENTILES: ABERNETHY	0.0000	1.0000	1.0000
DUBEY (PERCENT. & MOM.)	0.0000	26.7096	6.8438
MOMENTOS NO-CENTRALES	20.5471	4.3164	1.0233
BAIN & ANTLE	0.2607	26.6893	6.0091
REGRESIÓN LINEAL	0.2486	26.7014	6.9395
REGRESIÓN NO-LINEAL	0.0000	42.1778	10.0101
MAX. VER. PROC. WINGO	10.9561	15.3811	3.8314
MÁXIMA VEROSIMILITUD	11.0000	15.3354	3.8184
MOM. POND. PROB. L=1	6.2848	20.2390	4.7962
MOM. POND. PROB. L=2	6.2848	20.1847	4.7618

RESUMEN DE LOS ESTIMADORES DE BONDAD DE AJUSTE							
PROC. ESTIMACIÓN	SUMA DE DESV. ABS.	DIAM. MEDIO PRED.-OBS.	K-S	G.L. K-S	JI-CUAD.	G.L. X ²	VALOR CALIFIC.
ABERNETHY	1000.0	999.99	999.9900	0	999.9900	0	30
DUBEY	5.8	-2.37	0.2634	18	4.7078	4	5
MOMENTOS	16.8	-2.98	0.4175	17	18.9081	0	20
BAIN & ANTLE	6.9	-2.56	0.2636	18	4.2215	4	6
REG. LINEAL	5.8	-2.36	0.2644	18	4.8994	4	7
REG. NO-LINEAL	32.9	6.14	0.8835	18	999.9900	5	28
WINGO	11.1	-3.42	0.3761	18	13.5685	2	13
MAX.	11.3	-3.46	0.3796	18	14.0586	2	16
VEROSIMILITUD							
MOM. P. P., L=1	11.7	-3.78	0.3823	18	14.5334	3	19
MOM. P. P., L=2	11.9	-3.84	0.3857	18	14.9683	3	22

Cuadro 10. Comparación de estimadores de parámetros de la función de distribución de probabilidades Weibull, para 11 árboles de *Abies religiosa* en Zoquiapan, México.

RESUMEN DE DATOS			DATOS NO-AGRUPADOS	
MEDIA OBS.	=	25.34636	OBS. MAX.	= 32.40
DESV. ST.	=	4.33662	OBS. MIN.	= 19.32
VARIANZA	=	18.80623	ÁREA SITIO	= 0.00 HAS.
NO. TOTAL OBS.	=	11	SITIO NO.	= 1

RESUMEN DEL AJUSTE			
PARÁMETROS ESTIMADOS DE LA WEIBULL			
	A	B	C
PERCENTILES: ABERNETHY	0.0000	1.00000	1.00000
DUBEY (PERCENT. & MOM.)	3.72281	23.35674	5.78089
MOMENTOS NO-CENTRALES	21.13847	4.23857	1.01772
BAIN & ANTLE	0.00000	27.35836	5.53602
REGRESIÓN LINEAL	0.43971	26.70029	5.94106
REGRESIÓN NO-LINEAL	0.00000	54.99254	12.63822
MAX. VER. PROC. WINGO	18.66605	7.27324	1.43107
MÁXIMA VEROSIMILITUD	15.00000	11.65242	2.79950
MOM. POND. PROB. L=1	9.63821	17.35120	3.91547
MOM. POND. PROB. L=2	9.63821	17.24846	3.87799

RESUMEN DE LOS ESTIMADORES DE BONDAD DE AJUSTE							
PROC. ESTIMACIÓN	SUMA DE DESV. ABS.	DIAM. MEDIO PRED.- OBS.	K-S	G.L. K-S	JI-CUAD.	G.L. x ² y	VALOR CALIFIC.
ABERNETHY	1000.0	999.99	999.9900	0	999.9900	0	30
DUBEY	1.9	-1.22	0.1408	8	1.1721	3	3
MOMENTOS	9.7	-3.54	0.4460	8	13.3546	0	24
BAIN & ANTLE	4.4	-2.59	0.2394	8	3.0140	4	14
REG. LINEAL	5.0	-3.09	0.2904	8	3.9494	4	20
REG. NO-LINEAL	11.1	-24.74	0.9968	8	999.9900	4	28
WINGO	4.9	-1.73	0.2461	8	2.7460	0	11
MAX.	4.8	-2.48	0.2962	8	3.6995	1	18
VEROSIMILITUD							
MOM. P. P., L=1	3.8	-2.15	0.2365	8	2.4419	2	7
MOM. P. P., L=2	4.0	-2.25	0.2453	8	2.6215	2	11

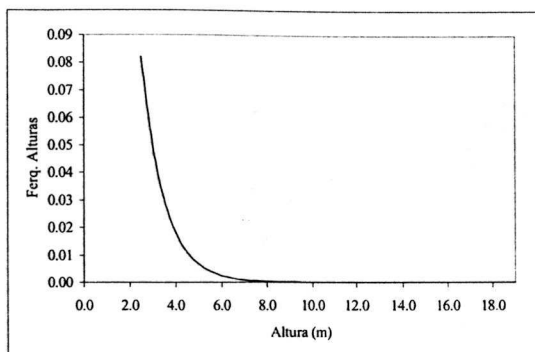


Figura 7a. Abernethy

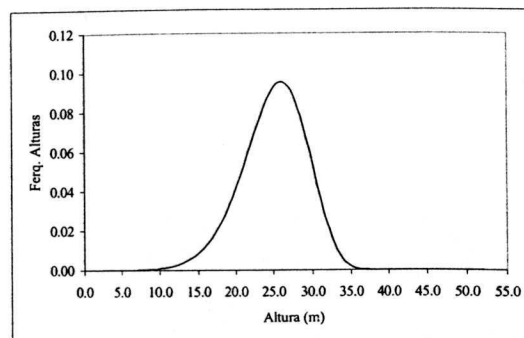


Figura 7b. Dubey

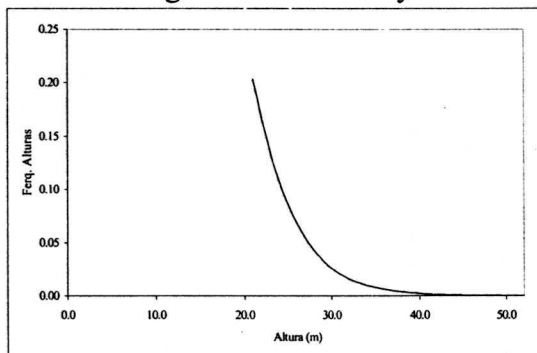


Figura 7c. Momentos No-Centrales

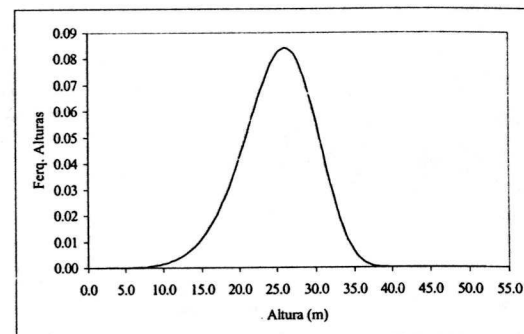


Figura 7d. Bain & Antle

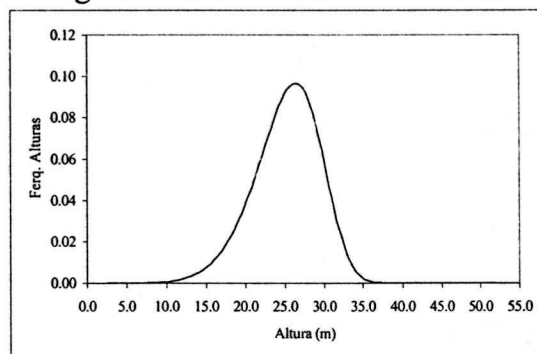


Figura 7e. Regresión Lineal

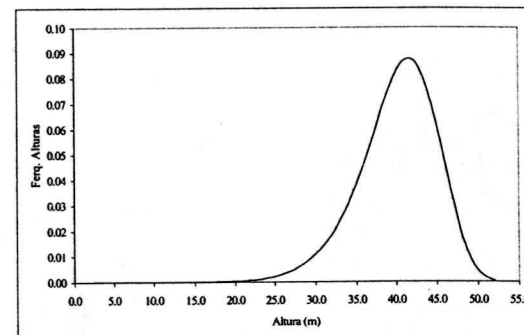


Figura 7f. Regresión No-Lineal

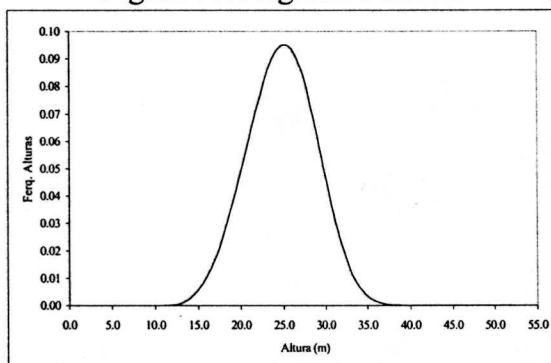


Figura 7g. Max. Ver. Porc. Wingo

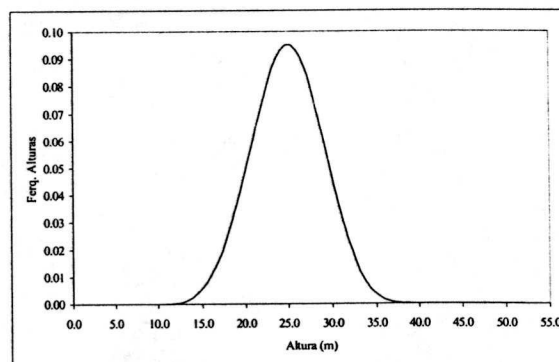


Figura 7h. Max. Verosimilitud

Figura 7. Graficas obtenidas con el Cuadro 9, para 21 árboles.

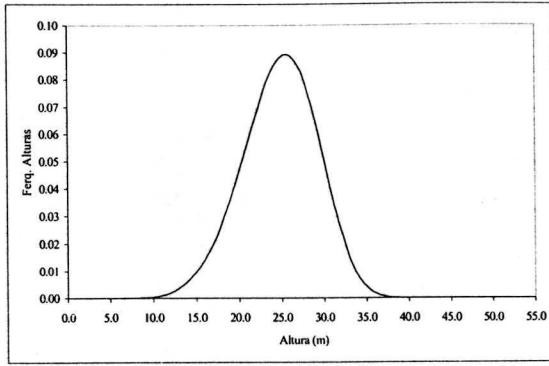


Figura 7i. Mom. Pond. Prob., L=1

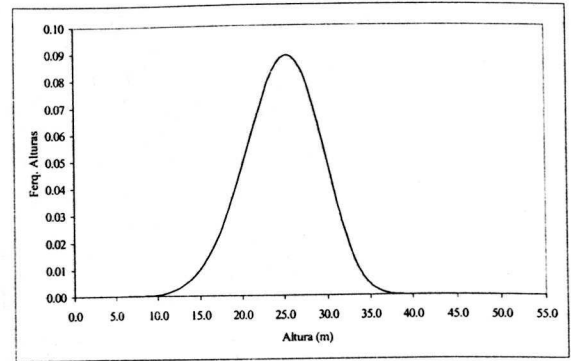


Figura 7j. Mom. Pond. Prob., L=2.

Figura 7. Continuación. Graficas obtenidas con el Cuadro 9, para 21 árboles.

Por lo tanto Y tiene la misma distribución Weibull como cada X_i , sólo que B_0 se

reemplaza por $B_0 n^{\frac{1}{c_0}}$, quedando,

$$p_Y(y) = C_0 \left(B_0 n^{\frac{1}{c_0}} \right)^{-1} \left(\frac{y - A_0}{B_0 n^{\frac{1}{c_0}}} \right)^{C_0 - 1} e^{-\left(\frac{y - A_0}{B_0 n^{\frac{1}{c_0}}} \right)^{C_0}} \quad (y > A_0) \quad (82)$$

Con la ecuación (82) y los parámetros estimados de Dubey, Bain y Aante, y Regresión Lineal, del Cuadro 9, los cuales presentaron el valor más bajo del calificador (Torres y otros (1992) y Magaña y otros (1992)), se obtuvo la Figura 8.

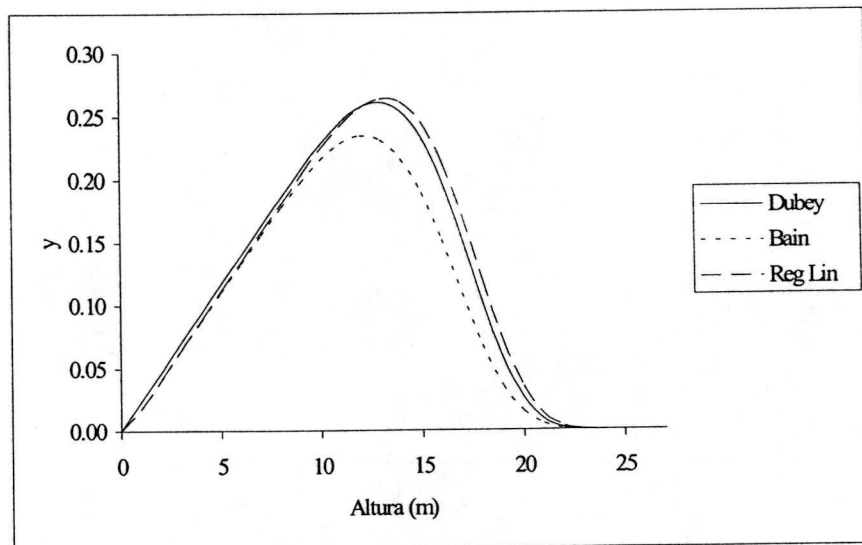


Figura 8. Distribución Weibull, obtenida con la ecuación (82).

Puesto que la función de distribución acumulativa de cada X_i es

$$F_{x_i}(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} \quad (x > A_0) \quad (83)$$

La función de densidad de probabilidad de los estadísticos de orden $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ puede expresarse explícitamente en términos de funciones elementales. De hecho

$$\begin{aligned} p_{x_r}(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left(1 - e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} \right)^{r-1} * e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} \left(\frac{C_0 \left\{ \frac{x-A_0}{B_0} \right\}^{C_0-1}}{B_0} \right) \quad (84) \\ &= \frac{n! C_0 \left\{ \frac{x-A_0}{B_0} \right\}^{C_0-1}}{(r-1)!(n-r)! B_0} * \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} \quad (x > A_0) \end{aligned}$$

Por ejemplo:

Sí $r=1$, sustituyendo en la ecuación (84), tenemos:

$$\begin{aligned} P_{x_1}(x) &= \frac{n! C_0 \left\{ \frac{x-A_0}{B_0} \right\}^{C_0-1}}{(1-1)!(n-1)! B_0} * \sum_{j=0}^{1-1} \binom{1-1}{j} (-1)^j e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} \\ &= \frac{n! C_0 \left\{ \frac{x-A_0}{B_0} \right\}^{C_0-1}}{(0)!(n-1)! B_0} * 1 * e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} = \frac{n!}{1 * (n-1)!} \frac{C_0 \left\{ \frac{x-A_0}{B_0} \right\}^{C_0-1}}{B_0} * e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} \\ &= n \frac{C_0 \left\{ \frac{x-A_0}{B_0} \right\}^{C_0-1}}{B_0} * e^{-\left(\frac{x-A_0}{B_0}\right)^{C_0}} \end{aligned}$$

Se puede apreciar que n es un factor común en las dos expresiones de la ecuación, y al

multiplicar n por $\frac{n^{\frac{1}{c_0}}}{n^{\frac{1}{c_0}}}$ en la primer expresión, para la segunda expresión en el

exponente se escribe n como $n^{\left(\frac{c_0}{c_0}\right)}$:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n n^{\frac{1}{c_0}} C_0 \left\{ \frac{x - A_0}{B_0} \right\}^{c_0-1}}{n^{\frac{1}{c_0}} B_0} * e^{-\left(n^{\left[\frac{c_0}{c_0} \right]} \left\{ \frac{x - A_0}{B_0} \right\}^{c_0} \right)} = \frac{C_0 \left(n^{\frac{1}{c_0}} \frac{x - A_0}{B_0} \right)^{c_0-1}}{B_0 n^{\frac{1}{c_0}}} * e^{\left(\frac{(x - A_0)n}{B_0 n^{\frac{1}{c_0}}} \right)^{c_0}} \\
 &= \frac{C_0 \left(\frac{x - A_0}{B_0 n^{\frac{1}{c_0}}} \right)^{c_0-1}}{B_0 n^{\frac{1}{c_0}}} * e^{\left(\frac{(x - A_0)}{B_0 n^{\frac{1}{c_0}}} \right)^{c_0}}
 \end{aligned}$$

Mediante el uso de las ecuaciones (81 y 82), los datos del Cuadro 4 en el cual $n=21$ observaciones y los parámetros obtenidos de Dubey en el Cuadro 9, se obtiene las graficas de la distribución Weibull y el primer estadístico de orden (Fig. 9).

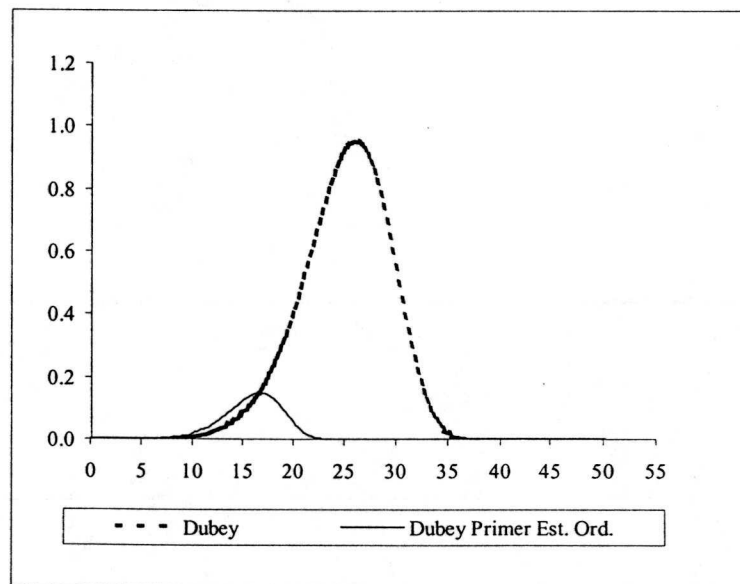


Figura 9. Grafica de la distribución Weibull y el primer estadístico de orden.

Puesto que $\int_0^\infty z^{c-1+l} e^{-\beta z^c} dz = c^{-1} \beta^{-\left(1+\frac{l}{c}\right)} \Gamma\left(1+\frac{l}{c}\right)$, se sigue de (69) que

$$E\left[(X_r' - A)^j\right] = \frac{n! B^l}{(r-1)!(n-r)!} \Gamma\left(1+\frac{l}{c}\right) * \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j (n-r+1+j)^{-\left(1+\frac{l}{c}\right)} \quad (85)$$

5.4.1 Construcción de curvas de índice de sitio, usando estadísticos de orden

Como se mencionó en la sección 2.4.5, que existen diferentes métodos para desarrollar funciones de índice de sitio, que varían según el principio aplicado, el tipo de datos, el método de construcción y el modelo empleado.

Las curvas de índice de sitio pueden derivarse de mediciones donde se toma la altura de los árboles dominantes seleccionados y la edad; pretenden describir el ritmo de crecimiento en altura de árboles hipotéticos o de un índice de sitio específico.

Una familia de curvas de índice de sitio es simplemente un grupo de patrones de desarrollo en altura con un símbolo cualitativo o número asociado con la curva para propósitos de referencia (Clutter y otros, 1992). También se indica que las ecuaciones pueden usarse para predecir la altura total como una función de la edad del rodal, a partir de la altura promedio de los árboles dominantes y el mismo índice de sitio.

Ahora se procede a la construcción de curvas de índice de sitio anamórficas y polimórficas para el modelo Weibull, por medio de los estadísticos de orden.

5.4.2 Weibull anamórfica

$$H(t) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} \right] : \text{Curva guía} \quad (86)$$

$$IS = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] : \text{Altura en edad base} \quad (87)$$

Despejando β_1 de la ecuación 87 tenemos:

$$\beta_1 = \frac{IS}{\left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right]} \quad (88)$$

Al sustituir la ecuación 88 en la ecuación 86 obtenemos:

$$H(t) = IS \left[\frac{1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}} \right] : \text{Curva de altura asociada al índice de sitio } IS \quad (89)$$

$$IS = H(t) \left[\frac{1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}} \right] : \text{Índice de sitio } IS \text{ asociado a la altura } H(t) \text{ en el tiempo } t \quad (90)$$

Se tiene, por los supuestos de regresión, que $H(t) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} \right] = E[H|t]$ la cual se ajusta por regresión no lineal como curva guía.

A su vez suponemos² que $H \sim \text{Weibull}(b, c)$, i.e., $f_H(h) = cb^{-1} \left(\frac{h}{b} \right)^{c-1} \exp \left[- \left(\frac{h}{b} \right)^c \right]$. Se

tiene a la edad base $t=t_0$, que $H \sim \text{Weibull}(b_0, c_0)$ y considere una muestra aleatoria $H_1, H_2, \dots, H_n$ de esta distribución. Ahora, para obtener un conjunto de curvas se puede pensar en obtener

² Por supuesto esta suposición contradice la de normalidad en la regresión, no obstante, los errores alrededor de la curva guía en la edad base pueden representarse adecuadamente por una distribución Weibull. Observe que una distribución normal puede aproximarse por una Weibull.

$$E(H_{(r)}|t_0) \quad r = 1, \dots, n^3$$

Donde $H_{(r)}$ es el r -ésimo estadístico de orden de la muestra considerada. Observe que se puede hacer lo mismo para cualquier t .

Así con la curva guía $E(H|t_0) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] = H(t_0)$, evaluada en $t = t_0$, se puede encontrar una familia de curvas dadas por las esperanzas de los diferentes estadísticos de orden $E(H_{(r)}|t_0)$, $r = 1, \dots, n$ en el mismo punto, es decir en donde se localiza la edad base.

Ahora,

$$H(t_0) = E(H|t_0) = b_0 \Gamma(c_0^{-1} + 1)$$

y

$$\begin{aligned} H_{(r)}(t_0) &= E(H_{(r)}|t_0) = \frac{n! b_0}{(r-1)!(n-r)!} \Gamma(c_0^{-1} + 1) \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j (n-r+1+j)^{-(1+c_0^{-1})} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j (n-r+1+j)^{-(1+c_0^{-1})} \times E(H|t_0) \\ &= \Delta_r E(H|t_0) = \Delta_r H(t_0) = \Delta_r \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] = \beta_{1r} \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] \quad (91) \end{aligned}$$

Ecuaciones tomadas de Johnson y Kotz (1970).

Por lo tanto,

$$\beta_{1r} = \Delta_r \beta_1 \quad y \quad \Delta_r = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j (n-r+1+j)^{-(1+c_0^{-1})}$$

³ Si $H \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $E(H(r)|t_0)$ se tendría que obtener por integración numérica, Verrill y Johnson (1988). Para facilitar los cálculos preferimos la distribución Weibull.

Así, la curva correspondiente al r -ésimo estadístico de orden estaría dada por

$$H_{(r)}(t) = \Delta_r H(t) = \Delta_r \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} \right] \quad (92)$$

Donde $H(t)$ representa a la curva guía y Δ_r puede calcularse de la expresión de arriba conociendo c_0 en el tiempo t_0 .

Si la suposición es Weibull (a, b, c) , i.e., $f_H(h) = cb^{-1} \left(\frac{h-a}{b} \right)^{c-1} e^{-\left(\frac{h-a}{b} \right)^c}$, $h > a$, y en la edad base $a=a_0$, $b=b_0$ y $c=c_0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} H_{(r)}(t_0) &= E(H_{(r)}|t_0) = (1 - \Delta_r) a_0 + \Delta_r E(H|t_0) = \\ &= (1 - \Delta_r) a_0 + \Delta_r H(t_0) = \left[\frac{(1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \right] H(t_0) \end{aligned} \quad (91a)$$

y para la edad t en general que produce la curva correspondiente se tiene:

$$H_{(r)}(t) = E(H_{(r)}|t) = (1 - \Delta_r) a_0 + \Delta_r E(H|t) = \left[\frac{(1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \right] H(t) \quad (92a)$$

Lo anterior puede verse de lo siguiente. Denote por $H_{IS}(t)$ la ecuación (89) y observe que:

$$H_{IS}(t) = \frac{\beta_{IS}}{\beta_1} H(t) = \frac{IS}{H(t_0)} H(t), \text{ donde } \beta_{IS} = \frac{IS}{1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}}$$

$$H_{(r)}(t_0) = \left[\frac{(1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \right] H(t_0)$$

$$H_{IS}(t_0) = \frac{\beta_{IS}}{\beta_1} H(t_0) \therefore \beta_{IS} = \frac{\beta_1 (1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \beta_1 \text{ (ya que } H_r(t_0) = H_{IS}(t_0))$$

$$\beta_{IS} = \left[\frac{(1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \right] \beta_1$$

$$\text{Así } H_{IS}(t) = \left[\frac{(1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \right] H(t)$$

Por otro lado, para construir las curva de alturas de modo que en t_0 se tenga el índice de sitio IS se usa:

$$H_{IS}(t) = IS \left[\frac{1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}}{1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}} \right] = \left[\frac{IS}{1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}} \right] [1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}] = \beta_{IS} [1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}] \quad (93)$$

De modo que si existe una r , tal que, $H_{(r)}(t_0) = H_{IS}(t_0)$, entonces la curva asociada al índice de sitio IS sería la asociada al r -ésimo estadístico de orden. Note que $H_{(r)}(t_0) = H_{IS}(t_0)$ es equivalente a

$$\begin{aligned} \beta_{1r} = \beta_{IS} &\Leftrightarrow \Delta_r \beta_1 = \left[\frac{IS}{1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}} \right] \Leftrightarrow \Delta_r \beta_1 [1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}] = IS \Leftrightarrow \Delta_r H(t_0) = IS \\ IS &= \Delta_r \beta_1 [1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}] \end{aligned} \quad (94)$$

Así que la curva generada por el r -ésimo estadístico de orden evaluada en la edad base produce el índice de sitio IS y este se puede considerar como el sitio de calidad $(n - r + 1)$.

Para el caso $H \sim W(a_0, b_0, c_0)$ en la edad base, $H_{IS}(t)$ se puede escribir como (ver (93))

$$H_{IS}(t) = \frac{\beta_{IS}}{\beta_1} H(t) \quad (93a)$$

De modo que si existe una r tal que $H_{IS}(t_0) = H_{(r)}(t_0)$, entonces la curva asociada al índice de sitio IS sería la asociada al r -ésimo estadístico de orden. Esto ocurre si

$$\frac{\beta_{IS}}{\beta_1} H(t_0) = (1 - \Delta_r) a_0 + \Delta_r H(t_0)$$

$$\beta_{IS} = \left[\frac{(1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \right] \beta_1 \quad (94a)$$

De nuevo, la curva generada por el r -ésimo estadístico de orden evaluada en la edad base produce el índice de sitio IS y este se puede considerar como el sitio de calidad $(n - r + 1)$, i.e.,

$$H_r(t) = \left[\frac{(1 - \Delta_r) a_0}{H(t_0)} + \Delta_r \right] H(t) = H_{IS}(t)$$

De las curvas generadas con los estadísticos de orden, las correspondientes a $r = 1$ y $r = n$ (el mínimo y el máximo de la muestra) tienen una importancia significativa pues representan el mínimo y el máximo esperado índice de sitio para la información proporcionada en la edad base. Se tiene que

$$\Delta_1 = n^{-c_0^{-1}} \quad (95)$$

y

$$\Delta_n = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j (1+j)^{-(1+c_0^{-1})} \quad (96)$$

Esta última expresión (96) es difícil de calcular para n grande (arriba de 40) por imprecisiones de la computadora, ya que se generan números muy grandes en las combinaciones de $n - 1$ tomadas de j en j . Lo mismo ocurre para el cálculo de Δ_r con r grande.

En el presente trabajo se procedió a obtener los IS con estadísticos de orden, para lo cual se emplearon los datos de los Cuadros 4 y 8. Lo anterior se realizó de esta manera debido a que en la edad base (t_0) solo se contaba con tres árboles y la rutina West requiere al menos 10 observaciones para estimar los parámetros de la población $H \sim W(a_0, b_0, c_0)$, tales estimaciones fueron las de Dubey (Cuadros 9 y 10).

Una vez realizado lo anterior, se procedió a obtener los Δ_r por medio de la ecuación 91, los cuales se muestran en el Cuadro 11.

Cuadro 11. Valores de Δ_r para las estimaciones (Dubey) obtenidas en los Cuadros 9 y 10.

Vecindad (años)	$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
48-52	Δ_r	0.64	0.74	0.79	0.84	0.87	0.90	0.93	0.95	0.97	0.99	1.01	1.03	1.05	1.07	1.09	1.11	1.14	1.16	1.19	1.23	1.28
49-51	Δ_r	0.66	0.78	0.86	0.92	0.97	1.01	1.06	1.10	1.15	1.21	1.29										

Con las ecuaciones (94) y (94a) se obtuvieron los índices de sitio, a las cuales se sustituyeron los valores Δ_r del Cuadro 11 y a_0 (en el caso de 49-51 años) para las dos vecindades dadas alrededor de la edad base, los cuales se muestran en el Cuadro 12.

Al final se puede hacer notar lo siguiente: Como el método se puede aplicar a cualquier edad, no únicamente a la edad base, se podría optar por tomar cualquier edad donde se tuviera un número suficiente de árboles y no fuera una edad muy pequeña.

Cuadro 12. Índices de sitio obtenidos con los estadísticos de orden.

Vecindad (años)	$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
48-52	IS	16.3	18.8	20.2	21.3	22.1	22.9	23.6	24.2	24.7	25.3	25.8	26.3	26.8	27.3	27.8	28.4	29.0	29.6	30.3	31.2	32.7
	$(n-r+1)$	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
49-51	IS	18.1	20.7	22.3	23.6	24.7	25.7	26.7	27.7	28.7	30.0	31.8										
	$(n-r+1)$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1										

Una vez obtenido el IS se procedió a construir las curvas de índice de sitio con la ecuación (93) y (93a), los valores obtenidos se presentan en los Cuadros 13 y 14, aunque estos cuadros no muestran todas las observaciones que se generaron. Además se presentan las Figuras 10, 11, 12 y 13.

Cuadro 13. Valores en alturas de las curvas de *Abies religiosa* originadas por la ecuación (93) del tipo anamórfico, con 21 árboles.

Edad (años)	Índice de sitio (m)				
	16.3	22.1	C. Guía	29.6	32.7
5	1.0	1.3	1.5	1.8	1.9
10	2.6	3.5	4.0	4.6	5.1
15	4.4	6.0	6.9	8.0	8.8
20	6.3	8.6	9.9	11.5	12.7
25	8.3	11.3	12.9	15.0	16.6
30	10.2	13.8	15.9	18.4	20.4
35	11.9	16.2	18.6	21.6	23.9
40	13.5	18.4	21.1	24.6	27.1
45	15.0	20.4	23.4	27.2	30.1
50	16.3	22.1	25.5	29.6	32.7
55	17.5	23.7	27.2	31.7	35.0
60	18.5	25.1	28.8	33.5	37.0
65	19.3	26.2	30.1	35.0	38.7
70	20.0	27.2	31.3	36.3	40.2
75	20.7	28.0	32.2	37.5	41.4
80	21.2	28.7	33.0	38.4	42.4
85	21.6	29.3	33.7	39.2	43.3
90	22.0	29.8	34.2	39.8	44.0
95	22.2	30.2	34.7	40.3	44.5
100	22.5	30.5	35.1	40.7	45.0

Cuadro 14. Valores en alturas de las curvas de *Abies religiosa* originadas por la ecuación (93a) del tipo anamórfico, con 11 árboles.

Edad (años)	Índice de sitio (m)				
	18.1	23.6	C. Guía	27.7	31.8
5	1.1	1.4	1.5	1.6	1.9
10	2.8	3.7	4.0	4.3	5.0
15	4.9	6.4	6.9	7.5	8.6
20	7.0	9.2	9.9	10.8	12.4
25	9.2	12.0	12.9	14.1	16.2
30	11.3	14.7	15.9	17.2	19.8
35	13.2	17.3	18.6	20.2	23.3
40	15.0	19.6	21.1	23.0	26.4
45	16.6	21.7	23.4	25.4	29.3
50	18.1	23.6	25.5	27.7	31.8
55	19.3	25.3	27.2	29.6	34.1
60	20.5	26.7	28.8	31.3	36.0
65	21.4	28.0	30.1	32.7	37.7
70	22.2	29.0	31.3	34.0	39.1
75	22.9	29.9	32.2	35.0	40.3
80	23.5	30.6	33.0	35.9	41.3
85	23.9	31.3	33.7	36.6	42.1
90	24.3	31.8	34.2	37.2	42.8
95	24.6	32.2	34.7	37.7	43.4
100	24.9	32.5	35.1	38.1	43.8

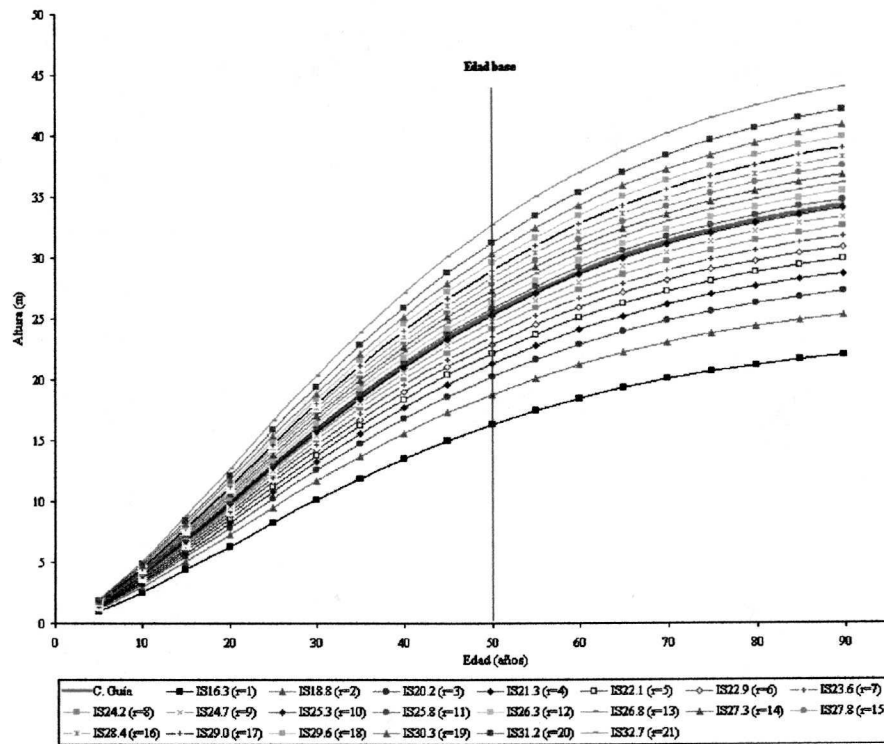


Figura 10. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 21$ y Curva guía).

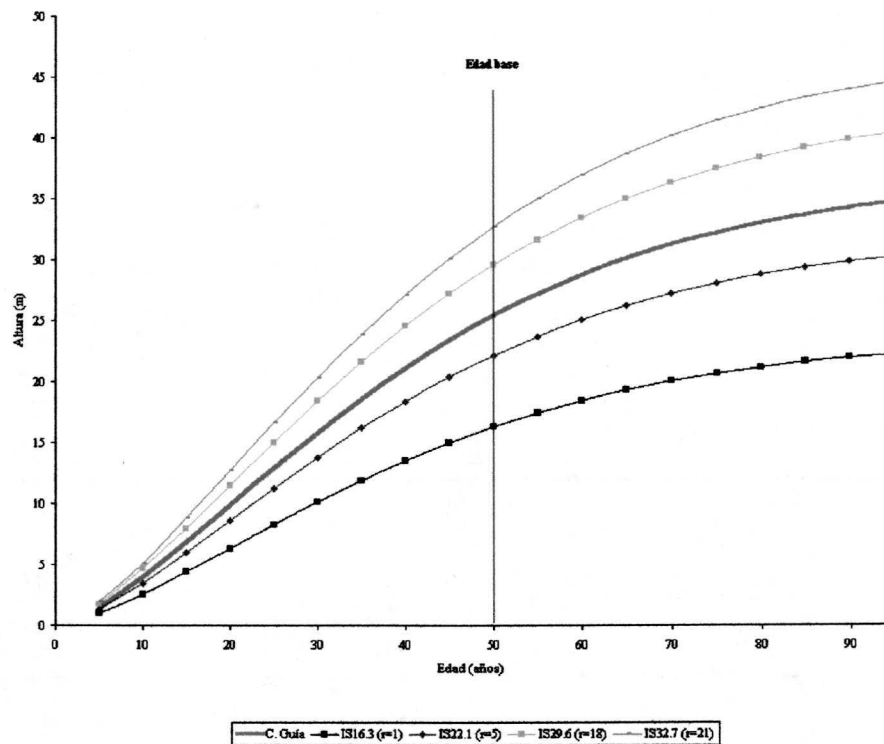


Figura 11. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 5, 18, 21$ y Curva guía).

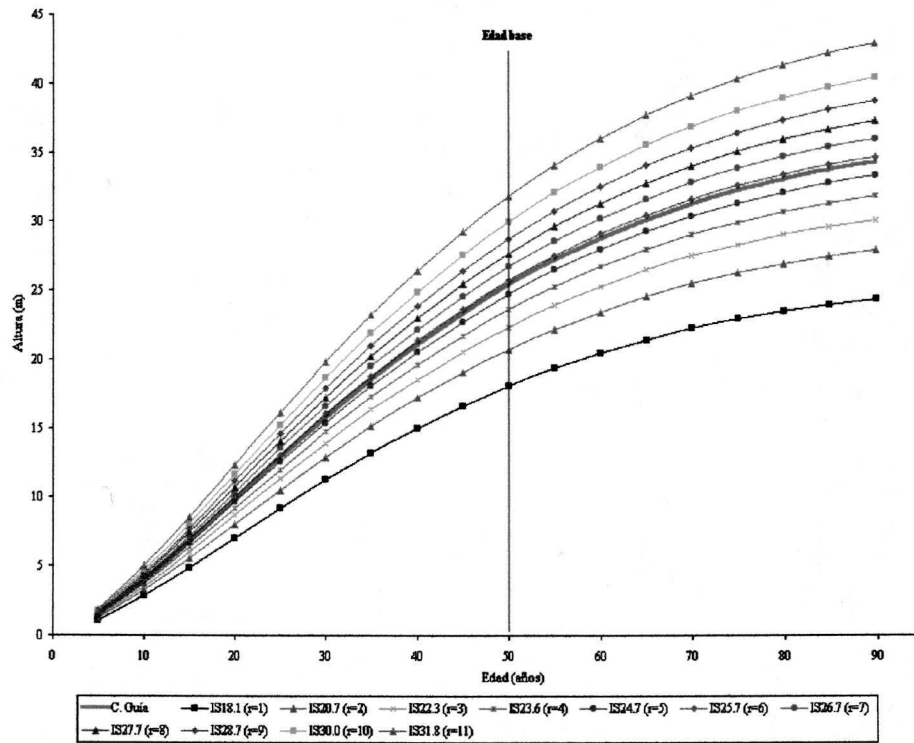


Figura 12. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 11$ y Curva guía).

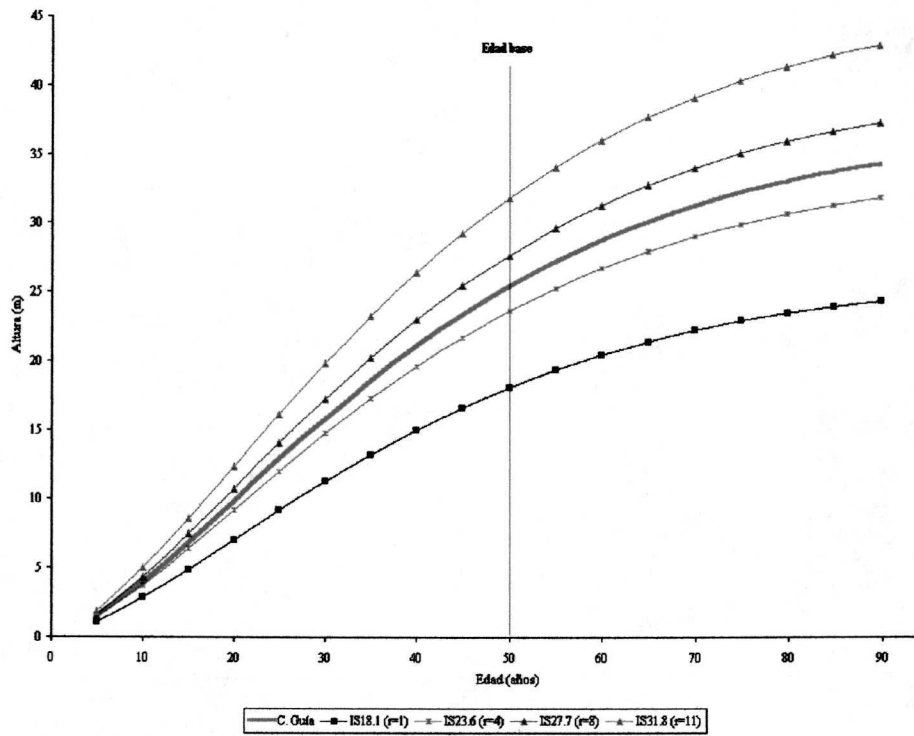


Figura 13. Curvas de índice de sitio anamórficas ($r= 1, 4, 8, 11$ y Curva guía).

Las parejas de Figuras (10, 12) y (11, 13) presentan una tendencia similar aunque existen diferencias en alturas en la edad base como lo muestran el primero y último estadístico de orden del Cuadro 12.

Lo interesante del resultado es que si se usan 11 ó 21 árboles, tanto el índice de sitio asociado al primer estadístico de orden como aquel asociado al último tienen valores comparables, es decir, la peor calidad, $r=1$, y la mejor calidad, $r=n$, están alrededor del mismo índice de sitio. Lo anterior ocurrirá siempre que la diferencia entre los tamaños de muestra no sea extrema.

5.4.3 Weibull polimórfica

$$H(t) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} \right] : \text{Curva guía} \quad (97)$$

$$IS = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] : \text{Altura en edad base} \quad (98)$$

Al despejar β_2 .

$$1 - \frac{IS}{\beta_1} = e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}}, \quad \ln \left(1 - \frac{IS}{\beta_1} \right) = -\beta_2 t_0^{\beta_3} \text{ y por tanto } \beta_2 = -\frac{1}{t_0^{\beta_3}} \ln \left(1 - \frac{IS}{\beta_1} \right).$$

$$H_{IS}(t) = \beta_1 \left[1 - e^{\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\beta_3} \ln \left(1 - \frac{IS}{\beta_1} \right)} \right] \quad (99)$$

Por otro lado, bajo la suposición $H \sim \text{Weibull}(b_0, c_0)$ en $t=t_0$:

$$E(H|t_0) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] \text{ y también } E(H|t_0) = b_0 \Gamma(c_0^{-1} + 1) = H(t_0)$$

Si se describiera la curva del r -ésimo estadístico de orden como

$$H_{(r)}(t) = E(H_{(r)}|t) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} \right]$$

Entonces:

$$E(H_{(r)}|t_0) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] \text{ y también } E(H_{(r)}|t_0) = \Delta_r E(H|t_0) = \Delta_r H(t_0)$$

$$\text{Así, } \Delta_r H(t_0) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right], \text{ de donde se obtiene}$$

$$\beta_{2r} = - \left(\frac{1}{t_0^{\beta_3}} \right) \ln \left(1 - \frac{\Delta_r H(t_0)}{\beta_1} \right)$$

Por lo que

$$H_{(r)}(t) = E(H_{(r)}|t) = \beta_1 \left[1 - e^{\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\beta_3} \ln \left(1 - \frac{\Delta_r H(t_0)}{\beta_1} \right)} \right] \quad (100)$$

Si la suposición es que $H \sim \text{Weibull}(a_0, b_0, c_0)$ en $t=t_0$ se tiene

$$H(t_0) = E(H|t_0) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] \text{ y también } E(H - a_0|t_0) = b_0 \Gamma(c_0^{-1} + 1).$$

Por otro lado, si $H_{(r)}(t_0) = E(H_{(r)}|t_0) = \beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right]$, como se cumple

$$E(H_{(r)} - a_0|t_0) = \Delta_r E(H - a_0|t_0)$$

$$E(H_{(r)}|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r E(H|t_0)$$

$$E(H_{(r)}|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0), \text{ entonces}$$

$$\beta_1 \left[1 - e^{-\beta_2 t_0^{\beta_3}} \right] = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) \Rightarrow \beta_{2r} = - \left(\frac{1}{t_0^{\beta_3}} \right) \ln \left(1 - \frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_1} \right) \text{ y}$$

$$H_{(r)}(t) = E(H_{(r)}|t) = \beta_1 \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\beta_3}} \ln \left(1 - \frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_1} \right) \right] \quad (100a)$$

Las expresiones anteriores (100) y (100a) son las curvas polimórficas correspondientes al r -ésimo estadístico de orden según la distribución de H . Así si existe r tal que $IS = \Delta_r H(t_0)$ (ó $IS = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)$, para el caso de tres parámetros) (igual que en el caso Weibull anamórfica) se tendrá que la curva de alturas asociada a IS , i.e., $H_{IS}(t)$ será igual a la curva correspondiente al r -ésimo estadístico de orden $H_{(r)}(t)$.

Con la ayuda de los Cuadros 11 y 12, se procedió a construir las curvas de índice de sitio con la ecuación (100) y (100a), los valores obtenidos se presentan en los Cuadros 15 y 16. Además se presentan las graficas 14, 15, 16 y 17.

Al igual que en el caso anamórfico al diseñar las curvas de índice de sitio con las dos vecindades, se observa que la diferencia en los incrementos en alturas no es grande.

Por el análisis realizado en la construcción de las curvas anamórficas y polimórficas, podemos concluir que el conocer el incremento en altura en el primer y último estadístico de orden se puede asegurar que estos son los límites en los cuales podremos diseñar nuestras curvas de índice de sitio.

Del mismo modo se puede proceder con los modelos de crecimiento de Schumacher y Chapman-Richards. Solo se detallan los procesos matemáticos, que conducirán a obtener curvas por medio del uso de los estadísticos de orden bajo el supuesto que $H \sim \text{Weibull}(a, b, c)$ ya que el caso Weibull (b, c) es un caso particular.

Cuadro 15. Valores en alturas de las curvas de *Abies religiosa* originadas por la ecuación (100) del tipo polimórfico, con 21 árboles.

Edad (años)	Índice de sitio (m)				
	16.3	22.1	C. guía	29.6	32.7
5	0.8	1.2	1.5	2.1	2.8
10	2.0	3.2	4.0	5.4	7.2
15	3.6	5.5	6.9	9.2	11.9
20	5.3	8.0	9.9	13.0	16.5
25	7.1	10.6	12.9	16.7	20.6
30	9.0	13.1	15.9	20.0	24.1
35	10.9	15.6	18.6	23.0	27.0
40	12.7	17.9	21.1	25.6	29.4
45	14.5	20.1	23.4	27.8	31.3
50	16.3	22.1	25.5	29.6	32.7
55	18.0	24.0	27.2	31.1	33.8
60	19.6	25.7	28.8	32.3	34.5
65	21.2	27.2	30.1	33.3	35.1
70	22.6	28.5	31.3	34.0	35.5
75	23.9	29.7	32.2	34.6	35.8
80	25.2	30.7	33.0	35.1	36.0
85	26.3	31.6	33.7	35.4	36.2
90	27.4	32.4	34.2	35.7	36.3
95	28.4	33.0	34.7	35.9	36.3
100	29.3	33.6	35.1	36.1	36.4

Cuadro 16. Valores en alturas de las curvas de *Abies religiosa* originadas por la ecuación (100a) del tipo polimórfico, con 11 árboles.

Edad (años)	Índice de sitio (m)				
	18.1	23.6	C. guía	27.7	31.8
5	0.9	1.3	1.5	1.8	2.6
10	2.3	3.5	4.0	4.7	6.6
15	4.1	6.1	6.9	8.0	11.0
20	6.0	8.8	9.9	11.4	15.3
25	8.1	11.6	12.9	14.8	19.3
30	10.1	14.3	15.9	17.9	22.8
35	12.2	16.9	18.6	20.8	25.8
40	14.2	19.3	21.1	23.4	28.3
45	16.2	21.6	23.4	25.7	30.3
50	18.1	23.6	25.5	27.7	31.8
55	19.9	25.5	27.2	29.3	33.0
60	21.5	27.1	28.8	30.7	34.0
65	23.1	28.5	30.1	31.9	34.7
70	24.5	29.8	31.3	32.9	35.2
75	25.8	30.9	32.2	33.6	35.5
80	27.0	31.8	33.0	34.3	35.8
85	28.1	32.6	33.7	34.7	36.0
90	29.1	33.3	34.2	35.1	36.1
95	30.0	33.9	34.7	35.4	36.2
100	30.8	34.3	35.1	35.7	36.3

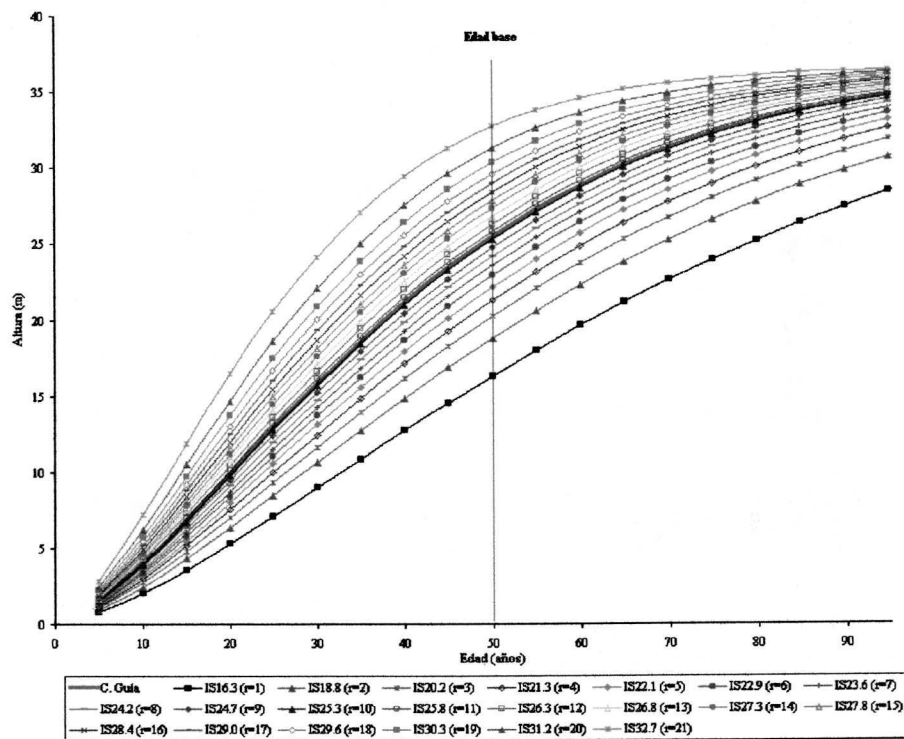


Figura 14. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 21$ y Curva guía).

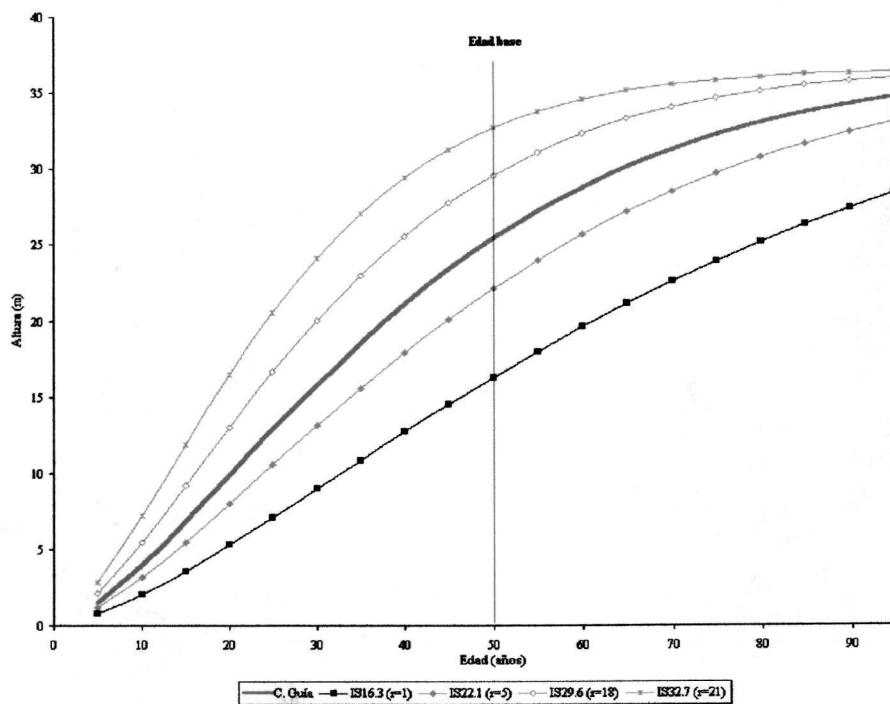


Figura 15. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 5, 18, 21$ y Curva guía).

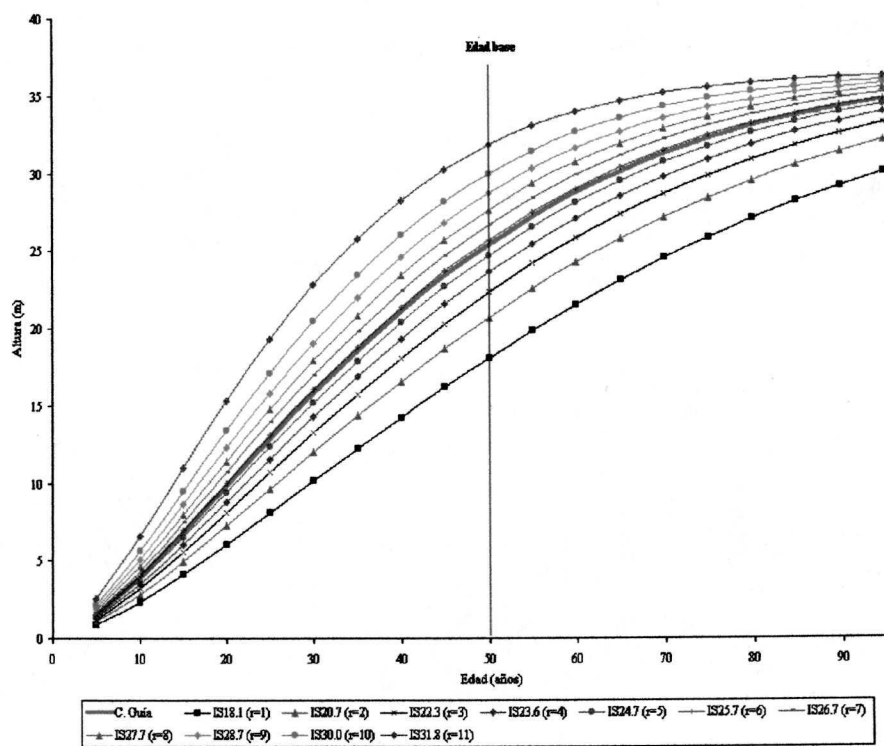


Figura 16. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 2, 3, \dots, 11$ y Curva guía).

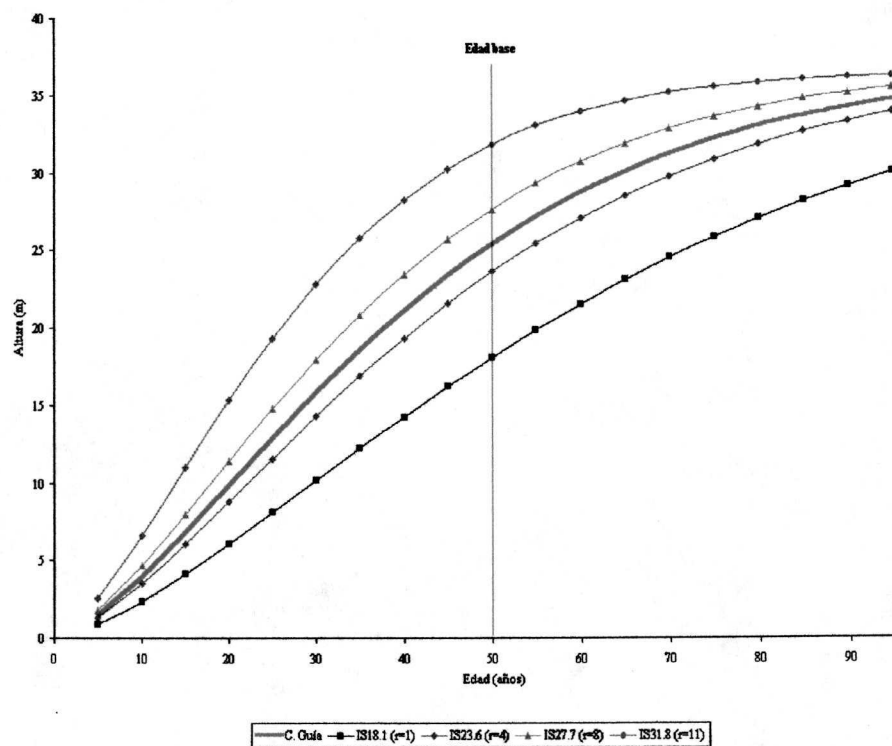


Figura 17. Curvas de índice de sitio polimórficas ($r= 1, 4, 8, 11$ y Curva guía).

5.4.4 Schumacher anamórfica

$$H(t) = \beta_1 e^{-\beta_2 t^{-1}} = E(H|t) \quad IS = H(t_0) = \beta_1 e^{-\beta_2 t_0^{-1}} \quad \beta_1 = IS e^{\beta_2 t_0^{-1}}$$

$$H_{IS}(t) = IS e^{-\beta_2 (t^{-1} - t_0^{-1})} = IS e^{\beta_2 t_0^{-1}} e^{-\beta_2 t^{-1}}$$

$$E(H_{(r)}|t) = H_{(r)}(t) = \beta_{1r} e^{-\beta_2 t^{-1}}$$

Para conocer β_{1r} tenemos

$$\begin{aligned} H_{(r)}(t_0) &= E(H_{(r)}|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r E(H|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) \\ &= \beta_{1r} e^{-\beta_2 t_0^{-1}} = \frac{\beta_{1r}}{\beta_1} H(t_0) \quad \text{ó} \quad \frac{\beta_{1r}}{\beta_1} H(t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) \\ \text{ó} \quad \beta_{1r} &= \frac{\beta_1 a_0(1 - \Delta_r)}{H(t_0)} + \beta_1 \Delta_r \end{aligned}$$

Así $H_{(r)}(t) = \beta_{1r} e^{-\beta_2 t^{-1}}$ y si existe r tal que $\beta_{1r} = IS e^{\beta_2 t_0^{-1}}$ ($a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) = IS$),

entonces la curva del r -ésimo estadístico de orden $H_{(r)}(t)$ será la curva de alturas $H_{IS}(t)$

($H_{(r)}(t_0) = H_{IS}(t_0)$) asociada al índice de sitio IS (la que toma el valor IS en $t = t_0$).

5.4.5 Schumacher polimórfica

$$H(t) = \beta_1 e^{-\beta_2 t^{-1}} = E(H|t) \quad IS = H(t_0) = \beta_1 e^{-\beta_2 t_0^{-1}}$$

Despejando β_2 ; $\frac{IS}{\beta_1} = e^{-\beta_2 t_0^{-1}} \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{IS}{\beta_1}\right) = \beta_2 t_0^{-1} \Leftrightarrow \beta_2 = -t_0 \ln\left(\frac{IS}{\beta_1}\right)$. Así

$$H_{IS}(t) = \beta_1 e^{\ln\left(\frac{IS}{\beta_1}\right) \frac{t_0}{t}} = \beta_1 \left(\frac{IS}{\beta_1}\right)^{\frac{t_0}{t}}$$

$$E(H_{(r)}|t) = H_{(r)}(t) = \beta_1 e^{-\beta_{2r} t^{-1}}$$

Para conocer β_{2r} tenemos

$$E(H_{(r)}|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r E(H|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) = \beta_1 e^{-\beta_{2r} t_0^{-1}}$$

$$\text{Entonces } \beta_1 e^{-\beta_{2r} t_0^{-1}} = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) \Leftrightarrow \beta_{2r} t_0^{-1} = -\ln\left(\frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \beta_{2r} = -t_0 \ln\left(\frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_1}\right)$$

$$\text{Así } H_{(r)}(t) = \beta_1 \left(\frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_1} \right)^{\left(\frac{t_0}{t}\right)}$$

$H_{IS}(t) = H_{(r)}(t)$ cuando $a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) = IS$ igual que en Schumacher anamórfica.

5.4.6 Chapman Richards anamórfica

$$H(t) = \beta_1 [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\beta_3} \quad IS = \beta_1 [1 - e^{-\beta_2 t_0}]^{\beta_3}$$

$$H_{IS}(t) = \frac{IS}{[1 - e^{-\beta_2 t_0}]^{\beta_3}} [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\beta_3}$$

$$H_{(r)}(t) = \beta_{1r} [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\beta_3}$$

$$E(H_{(r)}|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r E(H|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)$$

$$\beta_{1r} [1 - e^{-\beta_2 t_0}]^{\beta_3} = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) \Leftrightarrow \frac{\beta_{1r}}{\beta_1} H(t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)$$

$$\Leftrightarrow \beta_{1r} = \frac{\beta_1 a_0(1 - \Delta_r)}{H(t_0)} + \beta_1 \Delta_r \text{ como antes.}$$

Así

$$H_{(r)}(t) = \beta_{1r} [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\beta_3} \text{ y } H_{IS}(t) = H_{(r)}(t) \Leftrightarrow \beta_{1r} = \frac{IS}{[1 - e^{-\beta_2 t_0}]^{\beta_3}}$$

$$\frac{\beta_{1r}}{\beta_1} H(t_0) = IS \Leftrightarrow a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) = IS$$

5.4.7 Chapman Richards polimórfica

$$H(t) = \beta_1 [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\beta_3} \therefore IS = \beta_1 [1 - e^{-\beta_2 t_0}]^{\beta_3} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{IS}{\beta_1}\right) = \beta_3 \ln[1 - e^{-\beta_2 t_0}] \Leftrightarrow \beta_3 = \frac{\ln\left(\frac{IS}{\beta_1}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 t_0})}. \text{ Así}$$

$$H_{IS}(t) = \beta_1 [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\frac{\ln\left(\frac{IS}{\beta_1}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 t_0})}}$$

$$H_{(r)}(t) = \beta_{1r} [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\beta_{3r}}$$

$$E(H_{(r)}|t_0) = H_{(r)}(t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r E(H|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)$$

$$\therefore \beta_{1r} [1 - e^{-\beta_2 t_0}]^{\beta_{3r}} = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\beta_{3r} \ln[1 - e^{-\beta_2 t_0}] = \ln\left(\frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_{1r}}\right)$$

$$\beta_{3r} = \frac{\ln\left(\frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_{1r}}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 t_0})} \text{ y } H_{(r)}(t) = \beta_{1r} [1 - e^{-\beta_2 t}]^{\left[\frac{\ln\left(\frac{a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)}{\beta_{1r}}\right)}{\ln(1 - e^{-\beta_2 t_0})}\right]}$$

y $H_{IS}(t) = H_{(r)}(t) \Leftrightarrow a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) = IS$ como siempre.

5.4.8 Un modelo de crecimiento en general

En general, para la formulación anamórfica y polimórfica para cualquier función de crecimiento $H(t) = H(t; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ donde β_1 es un parámetro de proporcionalidad y β_2 y β_3 son parámetros de escala o forma, se puede proceder como sigue.

Anamórfica

$$H(t) = H(t; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = E(H|t) \therefore IS = H(t_0; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$H = H(t_0; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = H_0$$

Sea H_1 la función inversa de $H(t_0) = H(t_0; \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ como función de β_1 para obtener IS , entonces $\beta_1 = H_1(IS; t_0, \beta_2, \beta_3)$, con esto

$$H_{IS}(t; IS, t_0, \beta_2, \beta_3) = H(t; H_1(IS; t_0, \beta_2, \beta_3), \beta_2, \beta_3)$$

Por otro lado, sea $H_{(r)}(t) = H(t; \beta_{1r}, \beta_2, \beta_3)$

$$H_{(r)}(t_0) = E(H_{(r)}|t_0) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) \therefore H(t_0; \beta_{1r}, \beta_2, \beta_3) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)$$

$$\beta_{1r} = H_1(a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0); t_0, \beta_2, \beta_3)$$

Y así $H_{(r)}(t) = H(t; H_1(a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0); t_0, \beta_2, \beta_3), \beta_2, \beta_3)$

Y $H_{IS}(t) = H_{(r)}(t) \Leftrightarrow a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0) = IS$.

De igual modo se puede proceder para la polimórfica, definiendo inversas de H como función de β_2 ó β_3 para obtener IS .

Note que:

$$\beta_1 = H_1(IS; t_0, \beta_2, \beta_3) \text{ y } \beta_{1r} = H_1(a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0); t_0, \beta_2, \beta_3)$$

$$H_{(r)}(t_0) = H(t_0; \beta_{1r}, \beta_2, \beta_3) = a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0)$$

$$\begin{aligned}
&= a_0(1 - \Delta_r) + \Delta_r H(t_0; \beta_1, \beta_2, \beta_3) \\
&= \left[\frac{a_0(1 - \Delta_r)}{H(t_0; \beta_1, \beta_2, \beta_3)} + \Delta_r \right] H(t_0; \beta_1, \beta_2, \beta_3)
\end{aligned}$$

Al ser β_1 un parámetro de proporcionalidad se puede deducir que

$$\beta_{1r} = \left[\frac{a_0(1 - \Delta_r)}{H(t_0; \beta_1, \beta_2, \beta_3)} + \Delta_r \right] \beta_1. \text{ Sobre esto, no es lo mismo en el caso polimórfico.}$$

6 CONCLUSIONES

- La proposición de una distribución Weibull para las alturas de los árboles dominantes a cierta edad es eficaz para sugerir la posición de las curvas de índice de sitio, a través de los estadísticos de orden.
- En la construcción de curvas de índice de sitio, los estadísticos de orden de una distribución supuesta pueden ser útiles para orientar la fijación de etiquetas para calificar la calidad de sitio.
- Una condición para usar este método es que se hace necesario conocer varias alturas para la edad base, y así determinar las clases de índice de sitio.
- El uso de estadísticos de orden a la edad base, para ubicar curvas de índice de sitio nos permite conocer las curvas mínima y máxima de índice de sitio, con lo que se limita la posibilidad de sobrepasarse en la fijación de las etiquetas.
- Al usar dos vecindades de la edad base (48 a 52 y 49 a 51 años), y emplear los estadísticos de orden, la distribución generada para la altura a la edad base, se obtuvieron resultados similares.
- Con la vecindad amplia el primer estadístico de orden fue 16.3 y el último de 32.7 (1 y 21).
- Con la vecindad reducida y el primer estadístico de orden fue 18.1 y el último fue 31.8 (1 y 11).
- Los estadísticos de orden generaron curvas anamórficas y polimórficas comparables a las que se obtienen en otros métodos además de fijar los límites de las mismas.

7 LITERATURA CITADA

- Acosta M., M. 1991. Modelo de crecimiento para *Pinus montezumae* Lamb. En el CEF San Juan Tetla, Puebla. Tesis de Maestría en Ciencias. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, México. 80 p.
- Aguilar R., M. 1983. La ecuación de Schumacher y su aplicación en estudios del crecimiento y clave de sitio. Premio Nacional de Administración Pública 1982. CIFO-INIF. México. 69 p.
- Aguirre B., C. 1984. Preliminary growth and yield study of *Pinus patula* natural stands. M.S. Thesis. Colorado State Univ. For. and Wood Science Dept. 102 p.
- Aguirre, O. A. y Zepeda B., E. M. 1985. Estimación de índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. de la región de Iturbide, Nuevo León. Ciencia Forestal, Vol. 10. No. 56. México.
- Alder, D. 1980, Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento, con referencia especial a los trópicos. Vol. 2. Predicción del rendimiento. Organización de la Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación. Estudios FAO: Montes. Roma, Italia. 118 p.
- Aroian, L. A. 1965. Some properties of the conditional Weibull distribution. Transactions of the 19th Technical Conference of the American Society for Quality Control. 361-368.
- Arteaga M., B. 1985. Índice de sitio para *Pinus patula* Schl. & Cham., en la región de Chignahuapan-Zacatlán, Puebla. Tesis de M.C. Colegio de Posgraduados, Chapingo, Méx. 181 p.
- Avery, T. E. and H. E. Burkhardt. 1983. Forest measurements. 3^a ed. New York. McGraw-Hill. 331 p.
- Bailey, R. L. and J. L. Clutter. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. Forest Science 20(2):155-159.
- Bailey, R. L. and T. R. Dell. 1973. Quantifying diameters distribution with the Weibull function. For. Sci. 19:97-104.

- Benavides S., J. de D. 1987. Estimación de la calidad de sitio mediante índices de sitio de *Pinus michoacana* cornuta y *Pinus oocarpa* Schiede, para el A.D.F. Tapalpa, Estado de Jalisco. Tesis Ing. Agr. Esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Chapingo, México. 80 p.
- Berrettoni, J. N. 1964. Practical applications of the Weibull distribution. Industrial Quality Control. 21. 71-79.
- Bojorges S., J. A. 1990. Índice de sitio para oyamel (*Abies religiosa* H.B.K. Schl. et Cham) en Zoquiapa, México. Tesis Ing. Agr. Esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Chapingo, Méx. 57 p.
- Borders, B. E., R. L. Bailey and K. D. Ware. 1984. Slash pine site index from polymorphic model by joining (splining), nonpolynomial segments with an algebraic difference method. Forest Science (USA) 30(2):411-423.
- Braathe, P. 1978. Los aclareos en rodales coetáneos. Traducción del inglés por M. A. Musalem y F. Becerra. Departamento de Enseñanza Investigación y Servicio en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, Méx. 143 p.
- Carmean, W. H. and D. L. Lenthall. 1988. Heightgrowth and site-index curves for jack pine in North Central Ontario. Can. J. For. Res. (Can). 19:215-224.
- Castaños M., L. J. 1962. Evaluación de la calidad de estación de *Pinus patula* en el norte de Oaxaca. Bol. Tec. Inst. Nal. Inv. For. México. No. 2. 32 p.
- Clutter, J. L.; J. C. Forston; L. V. Pienaar; G. H. Brister and R. L. Bayley. 1992. Timber Management: A quantitative approach. John Wiley and Sons, Inc. New York. 333 p.
- Cochran, P. H. 1979. Site index and height growth for managed even-aged stands of white or grand fir East of the cascades in Oregon and Washington. Pacific Northwest Forest and Range Experiment Station. Forest Service, USDA. Res. Paper PNW-252. 13 p.
- Cohen, A. C. 1965. Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples. Technometrics. 7. 579-588.
- Curtis, R. O. 1964. A stem - analysis approach to site - index curves. For. Sci. (USA) 10(2): 241-251.
- Chapman, D. G. 1961. Statistical problems in population dynamics. Proc. Fourth Berkeley Symp. Math Stat. and Prob. Univ. Calif. Pres. Berkeley and Los Angeles. 153-168.
- Daniel, T. W.; J. A., Helms and F. S. Baker. 1982. Principios de silvicultura. Traducción del inglés por Ramón Elizondo Mata. McGraw - Hill. México. D. F. 492 p.

- Devan J., S. and H. E. Burkhart. 1982. Polimorphic site index equations for loblolly pine based on a segmented polynomial differential model. *Forest Science* 28(3):345-353.
- Dubey, S. D. 1965. Asymptotic properties of several estimators of Weibull parameters. *Technometrics*. 7. 423-434.
- Dubey, S. D. 1966. Characterization theorems for several distributions and their applications. *Journal of Industrial Mathematics*. 16. 1-22.
- Dubey, S. D. 1967. Revised tables for asymptotic efficiencies of the moment estimators for the parameters of the Weibull laws. *Naval Research Logistics Quarterly*. 14. 261-267.
- Fierros G., A. M. y Ramírez M., H. 1989. Índice de sitio para *Pinus caribaea* var. hondurensis en "La Sabana", Oaxaca, México. En Cuarta Reunión del Grupo de Trabajo de IUFRO s1.07.09. Silvicultura en los Neotrópicos. Antigua, Guatemala. 3 al 7 de Abril de 1989. 18 p.
- Fisher, R. A. and L. E. C., Tippett. 1928. Limiting formas of the frecuency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 24, 180-190.
- Ford-Robertson, F. C. 1971. Terminology of forest science, technology, practice, and products. *Soc. Amer. Foresters*. Washington, D. C. 349 p.
- Franco B., M. G. 1983. Problemas y métodos en el estudio del crecimiento de árboles. In Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No. 44. pp. 55-71.
- Franco, M. y A. Burquez. 1981. Guía botánico-ecológica del Parque Nacional Zoquiapan. Guías Botánicas de Excursiones en México. *Soc. Bot. Méx.* 21-61 p.
- García C., X. 1998. Predicción del rendimiento de *Swietenia macrophylla* King (Caoba) en plantaciones forestales. Tesis de Maestro en Ciencias. Colegio de Posgraduados. Montecillos, Texcoco, México. 114 p.
- Gittus, J. H. 1967. On a class of distribution functions. *Applied Statistics*. 16. 45-50.
- Gnedenko, B. V.; Beljaev, Yu, K. and Solov'ev, A. D. 1965. Mathematical methods in reliability theory. Moscow. (In Russian. English traslation: Academic Press. 1968).
- Gómez G., A. 1989. Relación entre algunas condiciones edáficas y topográficas con los índices de sitio y de terreno de dos coníferas. Tesis de Maestro en Ciencias. Colegio de Posgraduados, Montecillo, Méx. 113 p.

- González G., M. de J. 1985. Comportamiento de la germinación y crecimiento inicial de *Abies religiosa* (H.B.K.) Schl. et Cham., en diferentes aperturas de dosel, preparaciones al suelo y variantes de siembra en Zoquiapan, México. Tesis Ing. Agr. Esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, Chapingo, Méx. 82 p.
- Haan, C. T. and Beer, C. E. 1967. Determination of maximum likelihood estimators for the three parameter Weibull distribution. Iowa State Journal of Science. 42. 37-42.
- Hägglund, B. 1981. Evaluation of forest site productivity. For. Abstract Comm. For. Bureau. Vol. 42(11):515-527.
- Hunt, R. 1990. Basic growth analysis Unwin Imán Ltd. London. 112 p.
- Husch, B. 1956. Use of D.B.H. as a variable in the Site Index Concept Jour of For. 54:340.
- Johnson, N. L. and S. Kotz. 1970. Distributions in statistics: Continuous univariate distributions-1. 300 p.
- Jones, R. J. 1969. Review and comparison of site evaluation methods. USDA Forest Service. Rocky Mountain Forest and Range Experiment Station. Research Paper Rm-51. 27 p.
- Kao, J. H. K. 1958. Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies. Transactions of IRE-Reliability and Quality Control. 13. 15-22.
- Kao, J. H. K. 1959. A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life-testing electron tubes. Technometrics. 1. 389-407.
- Klepac, D. 1983. Crecimiento e incremento de árboles y masas forestales. Universidad Autónoma Chapingo, Chapingo, Méx. 365 p.
- Lieblein, J. 1955. On moments of order statistics from the Weibull distribution. Annals of Mathematical Statistics. 26. 330-333.
- Maass M., J. M.; R. Patron S.; A. I. Suarez G.; Blanco Z.; G. Cevallos G.; C. Galindo L. y A. Pescador. 1981. Ecología de la Estación Experimental Zoquiapan. Universidad Autónoma Chapingo. Colección de Cuadernos Universitarios. Serie Agronomía No. 2. 114 p.
- Madrigal H., S. 1995. Determinación de la productividad de dos especies de pino considerando características físicas y químicas del suelo, en Michoacán. Tesis de Maestro en Ciencias Forestales. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Chapingo, Méx. 115 p.
- Madrigal S., X. 1967. Contribución al conocimiento de la ecología de los bosques de oyamel (*Abies religiosa* (HBK) Schl. et Cham.) en el Valle de México. INIF. México, D. F. Bol. Téc. No. 18. 94 p.

- Magaña T., O. S.; Torres R., J. M. y Acosta M., M. 1992. Guía de uso de WEST: Programa para estimar parámetros de la función de distribución de probabilidades Weibull. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias. 29 p. (En prensa).
- Maldonado R., F. 1983. Índice de sitio y modelos de crecimiento para *Pinus oaxacana* Mirov. de la región "Los Coatlán", Oax. Tesis de Maestro en Ciencias. Colegio de Posgraduados, Chapingo, Méx. 65 p.
- Mann, N. R. 1967. Tables for obtaining the best linear invariant estimates of parameters of the Weibull distribution. *Technometrics*. 10. 629-645.
- Manzanilla B., H. 1974. Investigaciones epidométricas y silvícolas en bosques mexicanos de *Abies religiosa*. Dirección General de Información y Relaciones Públicas. SAG, Méx. 165 p.
- Martínez, M. 1963. Las Pináceas Mexicanas. 3ª Ed. México, UNAM. 400 p.
- Mass P., J. 1970. Instructivo para realizar análisis troncales. Bol. Div. Inst. Nal. Invest. For. No. 23. México. 23 p.
- McLintock, T. F. and C. A. Bickford. 1957. A proposed site index for red spruce in the Northeast, U. S. Forest Service Northeastern Exp. Sta. Pap. 93. **Citado por:** Daniel, T. W.; J. A., Helms and F. S. Baker. 1982. Principios de silvicultura. Traducción del inglés por Ramón Elizondo Mata. McGraw - Hill. México. D. F. 492 p.
- Mendoza B., M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. In Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No. 44. 365-45.
- Orantes G., F. R. y M. A. Musalem S. 1982. Determinación de calidad de estación de *Pinus hartwegii* Lind. en Zoquiapan, Méx. *Ciencia Forestal*. México. 7(35):3-20.
- Pflugbeil, E. 1960. Proposed site indices for Englemann spruce on the College Forest of the UTA State University, M. S. Thesis, UTA State University. **Citado por:** Daniel, T. W.; J. A., Helms and F. S. Baker. 1982. Principios de silvicultura. Traducción del inglés por Ramón Elizondo Mata. McGraw - Hill. México. D. F. 492 p.
- Pienaar, L. V. and Turnbull, K. J. 1973. The Chapman-Richards Generalization of Von Bertalanffy's Growth Model for Basal Area Growth and Yield in Even-aged Stands. *For. Sci.* 19:2-22.
- Pritchett, H. W. 1986. Suelos forestales; propiedades, conservación y mejoramiento. Limusa, México. p. 307-334.

- Pritchett, H. W. and R. F. Fisher. 1987. Properties and management of forest soils. 2nd. Ed. USA. 494 p.
- Prodan, M. 1968. Forest biometrics. Trad. by S. H. Gardiner. Oxford. Pergamon. 447 p.
- Ramírez A., M. 1981. Comparación de cuatro modelos matemáticos aplicados al crecimiento forestal. *Ciencia Forestal en México*. 16(70):87-108.
- Ramírez M., H. 1983. Diseño de muestreo para estudios de crecimiento con base en un inventario forestal continuo. *In* Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No. 44. p. 25-31.
- Ramírez M., H; R. L. Bailey and B. E. Borders. 1987. Some implications of the algebraic difference approach for developing growth models. En EK A. R., Shifley S. R., Burk. T. E. (Ed). *Forest Growth Modelling and Prediction. Proceedings. Vol. 2. USDA. Forest Service. North Central Forest Experiment Station. General Technical report NC-120. 731-738.*
- Rey C., J. A. 1975. Estudios de suelos de la Estación de Enseñanza Investigación y Servicios Forestales de Zoquiapan. *Información Técnica de Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, Chapingo, Méx.* 45 p.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10: 290-300.
- Rodríguez B., D. 1976. Descripción general del campo de Zoquiapan. *Rev. Infor. Técnica de Bosques. Vol. 3. No. 6. Universidad Autónoma Chapingo, Chapingo, Méx.* 17-19 p.
- Rodríguez F., C. 1980. Estudio epidométrico de *pinus montezumae* Lamb., mediante análisis troncales en el Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Pue. Tesis Ing. Agr. Esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, Chapingo, Méx. 274 p.
- Rodríguez F., C. 1982. Determinación de calidad de estación de *Pinus montezumae* Lamb., a través de análisis troncales en el C. E. F. San Juan Tetla, Pue. Tesis de Maestro en Ciencias. Colegio de Posgraduados, Chapingo, Méx. 134 p.
- Rzedowski, J. 1983. Vegetación de México. Limusa. México, D. F. 432 p.
- SAS Institute Inc. 1992a. SAS system for regresion. 2nd. edition. Cary, NC. USA. 210.
- SAS Institute Inc. 1992b. SAS/STAT user's guide. Release 6.03 Edition. Cary, NC. USA. 1028 p.
- Schumacher, F. X. 1939. A new growth curve and its applications to timber yield studies. *J. For.* 37: 819-820.

- Splitstone, D. 1967. Estimation of the Weibull shape and scale parameters. M.Sc. Thesis. Iowa State University.
- Spurr, S. H. 1952. Forest inventory. New York. Wiley. p. 275-292.
- Spurr, S. H. and B. V. Barnes. 1980. Forest Ecology. Tirad Edition. New York. John Wiley and Sons. 687 p.
- Subsecretaria Forestal y de Fauna Silvestre (México). 1994. Inventario Nacional Forestal Periódico. Memoria Nacional. México. D. F.
- Torres R., J. M. 1987. Economic análisis of several alternatives of forest management for *Pinus hartwegii*. Master Thesis. Oregon State University. 126 p.
- Torres R., J. M.; Acosta M.; M. y O. Magaña T. 1992. Métodos para estimar los parámetros de la función Weibull y su potencial para ser predichos a través de atributos del rodal. *Agrociencia*. 2(2): 57-77.
- Verrill, A. and R. A. Johnson. 1988. Tables and large-sample distribution theory for censored-data correlation statistics for testing normality. *Journal of the American Statistical Association*. December 1998. Vol. 83, No. 404. pp 1192-1197.
- Weibull, W. 1939a. A statistical theory of the strength of material. *Ingeniörs Verteilungen bei kleinem Stichprobenumfang*. No. 151.
- Weibull, W. 1939b. The phenomenon of rupture in solids. *Ingeniörs Vetenskaps Akademies Handligar*. Stockholm. No. 153.
- Weibull, W. 1967. Estimation of distribution parameters by a combination of the best linear order statistics meted and maximum likelihood. Technical Report AFML-TR-67-105. Air Force Materials Laboratory. Wright-Patterson Air Force Base. Ohio.
- Wykoff, W. R. and R. A. Monserud. 1987. Representing site quality in increment models: a comparison of methods. In *IUFRO Growth Modeling and Prediction Conference*. Minneapolis. p. 184-191.
- Yang, R. C.; A. Kozak and J. H. G. Smith. 1978. The potential of Weibull type function as flexible growth curves. *Can. J. For. Res. (Can)*. 8:424-431.
- Zamudio S., F. J. y A. Ryszard W. 1987. Curvas de sitio polimórficas invariantes a la edad base con una observación por sitio. *Agrociencia*. 6 p.
- Zamudio S., F. J. y D. Ayerde L. 1997. Modelos de crecimiento. *Revista Chapingo. Serie Ciencias Forestales*. 3(1):79-87.
- Zavala Ch., F. 1984. Sinecología de la vegetación de la Estación de Enseñanza e Investigación Forestal Zoquiapan, Estados de México y Puebla. Tesis Licenciado

- en Biología. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, Mich. 165 p.
- Zedaker, S. M.; H. E. Burkhardt and A. R. Stage. 1987. General principles and patterns of conifer growth and yield. In Forest Vegetation Management for CONFER Production. John Wiley and Sons. Inc. p. 203-241.
- Zepeda B., E. M. 1990. Predictor de rendimientos maderables probables de *Pinus patula* Schiede y Deppe, de perote, Ver. México. Tesis M. C. México. Colegio de Posgraduados, México. 330 p.
- Zepeda B., E. M.; Verruette, S.; Estrada, O. y Esparza, S. 1990. Curvas polimórficas de índice de sitio de edad base invariante, para tres especies de pino del noroeste de Chihuahua. División de Ciencias Forestales. Universidad Autónoma Chapingo. Boletín Técnico No. 25. Serie Técnica. p. 1-40.
- Zepeda B., E.M. y P. Rivero B. 1984. Construcción de curvas anamórficas de Índice de sitio: ejemplificación del método de la curva guía. Ciencia Forestal. 9(51):3-38.

8 APÉNDICE

Cuadro 1. Datos de análisis troncales de 30 árboles *Abies religiosa* en Zoquiapan, México.

Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad
1	0.3	2	4	0.3	2	7	0.3	2
1	1.3	4	4	1.3	7	7	1.3	4
1	3.86	18	4	3.86	13	7	3.86	14
1	6.42	20	4	6.42	15	7	6.42	19
1	8.98	26	4	8.98	17	7	8.98	24
1	11.62	34	4	11.54	20	7	11.54	27
1	14.18	38	4	14.1	25	7	14.1	33
1	16.86	48	4	16.66	28	7	16.66	42
1	19.42	62	4	19.22	32	7	19.22	47
1	22.02	73	4	21.99	36	7	21.78	53
1	22.32	78	4	24.99	43	7	24.34	65
1	24.95	86	4	27.55	56	7	27.1	70
2	0.3	2	4	30.15	66	7	28.56	74
2	1.3	8	4	32.85	77	7	30.41	95
2	3.86	11	4	35.39	87	8	0.3	2
2	6.42	14	4	36.59	105	8	1.3	4
2	8.98	17	5	0.3	2	8	3.86	11
2	11.54	21	5	1.3	4	8	6.42	17
2	14.1	25	5	3.86	15	8	8.98	20
2	15.1	29	5	6.52	19	8	11.54	24
2	16.1	32	5	9.08	23	8	16.19	26
2	18.11	38	5	11.64	33	8	19.06	35
3	0.3	2	5	14.2	38	8	22.16	46
3	1.3	6	5	16.76	45	8	24.72	54
3	3.86	9	5	19.32	51	8	27.42	67
3	6.42	12	5	21.88	56	8	30.12	79
3	8.98	15	5	24.44	65	8	33.15	97
3	11.78	19	5	25.74	72	9	0.3	2
3	14.74	24	5	26.44	74	9	1.3	6
3	16.89	30	5	28.78	94	9	3.86	11
3	19.54	39	6	0.3	2	9	6.42	15
			6	1.3	8	9	8.98	23
			6	3.86	12	9	11.68	28
			6	6.42	20	9	14.24	34
			6	8.98	23	9	16.8	37
			6	11.54	29	9	19.36	46
			6	14.64	34	9	21.92	53
			6	17.2	40	9	23.3	58
			6	19.76	49	9	24.7	76
			6	21.16	52			
			6	23.56	56			
			6	24.56	59			
			6	26.06	66			
			6	29.06	82			

Cuadro 1. continuación....

Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad
10	0.3	2	13	0.3	2	16	0.3	2
10	1.3	8	13	1.3	6	16	1.3	4
10	3.86	22	13	3.86	12	16	3.86	7
10	6.42	27	13	6.42	18	16	6.42	11
10	8.98	30	13	8.98	22	16	8.98	13
10	11.54	35	13	11.54	29	16	11.54	15
10	14.1	39	13	14.1	38	16	14.1	19
10	16.9	43	13	16.66	43	16	16.66	21
10	19.6	50	13	19.22	48	16	19.26	25
10	22.16	54	13	21.78	55	16	21.82	27
10	23.63	59	13	24.58	67	16	24.38	31
10	27.93	80	13	28.68	90	16	27.28	36
11	0.3	2	14	0.3	2	16	29.84	42
11	1.3	6	14	1.3	5	16	32.4	49
11	3.86	10	14	3.86	9	16	34.27	53
11	6.42	15	14	6.42	13	16	35.67	59
11	8.98	23	14	8.98	17	16	36.87	71
11	11.54	29	14	11.54	19	17	0.3	2
11	14.1	34	14	14.1	23	17	1.3	7
11	16.66	36	14	16.66	26	17	3.86	13
11	19.22	38	14	19.22	36	17	6.42	15
11	21.78	42	14	21.78	40	17	8.98	17
11	24.34	48	14	26.95	48	17	11.54	20
11	26.9	53	14	30.05	56	17	14.1	22
11	29.46	58	14	32.75	67	17	16.66	27
11	30.71	65	14	35.31	74	17	19.36	32
11	33.27	75	14	38.96	97	17	21.92	41
11	34.52	83	15	0.3	2	17	24.48	47
11	35.77	90	15	1.3	5	17	27.18	54
11	37.02	99	15	3.86	10	17	29.74	62
11	39.87	127	15	6.42	14	17	32.3	74
12	0.3	2	15	8.98	16	17	34	82
12	1.3	6	15	11.54	19	17	36.6	96
12	3.86	9	15	14.1	23			
12	6.42	12	15	16.66	26			
12	9.39	15	15	19.22	31			
12	11.95	22	15	21.78	45			
12	14.51	28	15	27.34	48			
12	17.41	33	15	29.9	54			
12	19.97	38	15	32.5	56			
12	22.53	46	15	35.06	60			
12	25.09	51	15	37.62	63			
12	26.79	60	15	40.6	74			
12	29.89	78	15	42.92	95			

Cuadro 1. continuación....

Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad
18	0.3	2	21	0.3	2	23	0.3	2
18	1.3	8	21	1.3	7	23	1.3	6
18	3.86	13	21	3.86	11	23	3.86	9
18	6.42	19	21	6.42	15	23	6.42	13
18	8.98	25	21	8.98	19	23	8.98	16
18	11.54	30	21	11.54	21	23	11.54	19
18	14.1	33	21	14.1	24	23	14.1	22
18	16.66	36	21	16.75	28	23	16.66	26
18	19.22	40	21	19.31	31	23	19.22	29
18	21.78	42	21	21.87	35	23	21.78	32
18	24.47	49	21	24.43	40	23	24.58	35
18	27.07	55	21	26.99	45	23	27.58	39
18	28.47	63	21	29.55	51	23	30.18	46
18	29.72	67	21	32.11	56	23	32.74	57
18	31.57	80	21	33.31	60	23	34.49	62
19	0.3	2	21	36.36	70	23	37.99	76
19	1.3	7	22	0.3	2	24	0.3	2
19	3.86	10	22	1.3	12	24	1.3	8
19	6.42	14	22	3.86	14	24	3.86	11
19	8.98	18	22	6.42	24	24	6.42	16
19	11.54	23	22	8.98	28	24	8.98	19
19	14.1	25	22	11.54	31	24	11.54	23
19	16.66	27	22	14.1	34	24	14.1	27
19	19.22	30	22	16.8	37	24	16.66	30
19	21.78	33	22	19.56	41	24	19.32	34
19	24.34	35	22	22.12	45	24	22.32	38
19	27.34	39	22	25.32	51	24	25.02	43
19	29.9	48	22	27.88	61	24	27.58	47
19	32.7	54	22	29.28	69	24	31.12	63
19	35.55	72	22	30.88	73	24	33.68	71
20	0.3	2	22	33.38	85	24	36.28	77
20	1.3	6				24	39.78	93
20	3.86	9						
20	6.42	12						
20	9.02	14						
20	11.58	18						
20	14.28	22						
20	16.84	25						
20	19.4	29						
20	21.96	34						
20	24.52	38						
20	27.12	44						
20	28.82	50						
20	30.6	54						
20	34.02	64						

Cuadro 1. continuación....

Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad	Núm. Árbol	Altura	Edad
25	0.3	2	27	0.3	2	29	0.3	2
25	1.3	9	27	1.3	4	29	1.3	5
25	3.86	14	27	3.86	10	29	3.86	10
25	6.42	17	27	6.42	14	29	6.42	13
25	8.98	21	27	8.98	18	29	8.98	16
25	12.08	25	27	11.54	23	29	11.74	20
25	14.64	29	27	14.1	25	29	14.3	23
25	17.29	32	27	17.1	35	29	16.86	25
25	19.85	35	27	19.66	43	29	19.42	31
25	23.47	41	27	22.22	48	29	22.02	36
25	26.03	47	27	24.78	52	29	25.14	42
25	28.03	53	27	26.38	55	29	27.74	47
25	29.73	62	27	30.1	73	29	29.7	52
25	31.23	64	27	32.2	80	29	32.7	64
25	34.73	73	27	34.98	96	30	0.3	2
26	0.3	2	28	0.3	2	30	1.3	6
26	1.3	6	28	1.3	5	30	3.86	13
26	3.86	8	28	3.86	15	30	6.42	19
26	6.42	12	28	6.42	20	30	8.98	24
26	8.98	16	28	8.98	22	30	11.54	27
26	11.54	20	28	11.54	25	30	14.1	30
26	14.1	25	28	14.1	27	30	16.66	33
26	16.66	28	28	16.66	29	30	19.22	37
26	19.26	31	28	19.22	34	30	21.78	40
26	21.82	34	28	21.78	36	30	24.34	44
26	24.38	37	28	24.48	44	30	27.34	50
26	26.94	42	28	27.14	51	30	30.34	54
26	29.5	46	28	29.7	59	30	33.64	63
26	32.5	57	28	32.2	68			
			28	34.82	77			
			28	37.82	88			
			28	41.54	107			

