

**UNIVERSIDAD AUTONOMA CHAPINGO**  
**DIVISION DE CIENCIAS FORESTALES**  
**PROGRAMA DE POSTGRADO**

MODELO DE CRECIMIENTO PARA  
*Pinus montezumae* LAMB.  
EN EL CEF SAN JUAN TETLA, PUEBLA

**TESIS**

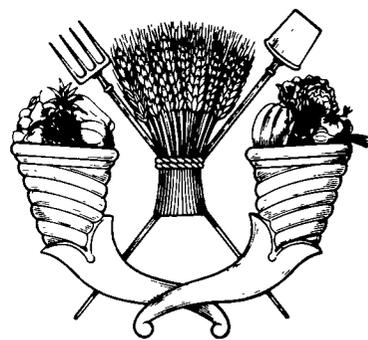
PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS FORESTALES  
POR

**MIGUEL ACOSTA MIRELES**

CHAPINGO, MEX.

1991





**UNIVERSIDAD AUTONOMA CHAPINGO**  
**DIVISION DE CIENCIAS FORESTALES**  
**PROGRAMA DE POSTGRADO**

**MODELO DE CRECIMIENTO PARA**  
*Pinus montezumae* LAMB.  
**EN EL CEF SAN JUAN TETLA, PUEBLA**

**TESIS**

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL**  
**PARA OBTENER EL GRADO DE**  
**MAESTRO EN CIENCIAS FORESTALES**  
**POR**

**MIGUEL ACOSTA MIRELES**

**CHAPINGO, MEX.**

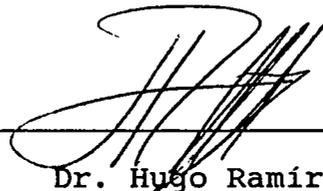
**1991**



Esta tesis fue realizada bajo la dirección del Comité Asesor indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

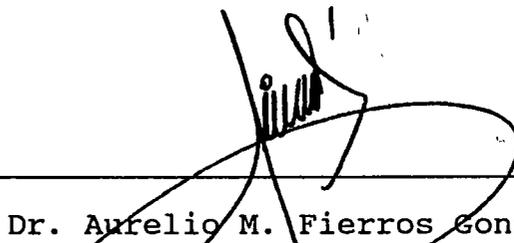
**MAESTRO EN CIENCIAS FORESTALES**

**PRESIDENTE**



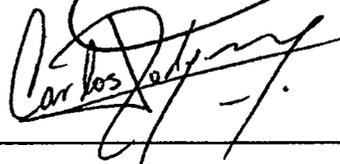
Dr. Hugo Ramírez Maldonado

**ASESOR**



Dr. Aurelio M. Fierros González

**ASESOR**



Dr. Carlos Rodríguez Franco

A 23913

## AGRADECIMIENTOS

Deseo externar mis agradecimientos a las siguientes Instituciones y personas.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haber financiado mis estudios de Maestría.

Al Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias (INIFAP) por haberme brindado la oportunidad de realizar mis estudios de Maestría y por autorizarme utilizar parte de la información para el presente trabajo.

A la Universidad Autónoma Chapingo por brindarme la oportunidad de superación académica y por financiar parte del presente trabajo.

Al Dr. Hugo Ramírez Maldonado por aceptar y fungir como Presidente del mi Comité Asesor y por la disponibilidad que mostró para aclarar mis dudas.

Al Dr. Aurelio M. Fierros González por haber aceptado formar parte de mi Comité Asesor, por revisar el presente trabajo y por proporcionarme bibliografía vinculada con el tema desarrollado.

Al Dr. Carlos Rodríguez Franco por haber aceptado formar parte de mi Comité Asesor, por revisar el presente trabajo y por ser el medio mediante el cual obtuve parte de los datos y la autorización para utilizarlos en éste.

Al Dr. Juan Manuel Torres Rojo por haber dedicado desinteresadamente parte de su tiempo para mostrarme el procedimiento que se utilizó en el presente trabajo, para lograr mejores ajustes en los modelos de crecimiento y rendimiento, y por proporcionarme, y en ocasiones adecuar, los programas que se utilizaron en el mismo.

A los Ingenieros: Guillermo Cesar Guerra, Diego Reygadas, Fernando Carrillo y Jorge Espinosa; a los dos primeros por proporcionarme algunos programas, bibliografía y equipo de cómputo, y a los últimos por su apoyo para llevar a cabo el presente trabajo.

A todos los trabajadores del Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Puebla, especialmente a los Sres. Everardo Morales y Manuel Cerón, por levantar la información de campo en un tiempo relativamente corto.

A todas aquellas personas que de alguna manera contribuyeron para hacer posible la culminación del presente trabajo.

**DEDICATORIA**

**A MIS PADRES**

Zeferino y Ma. del Consuelo.

**A MI ESPOSA E HIJOS**

Rocío, Marco Antonio, Berenice y Azarel

**A MIS HERMANOS**

Jesús, Carmela, Martín y Ma. de la Cruz

**A MI CUÑADO Francisco**

**A MIS COMPAÑEROS Y AMIGOS**

# CONTENIDO

Página

AGRADECIMIENTOS .....	i
DEDICATORIA .....	iii
CONTENIDO .....	iv
INDICE DE CUADROS .....	viii
INDICE DE FIGURAS .....	ix
INDICE DE CUADROS DEL APENDICE .....	x
RESUMEN .....	xi
SUMMARY .....	xiii
1. INTRODUCCION .....	1
2. REVISION DE LITERATURA .....	3
2.1. GENERALIDADES RESPECTO A LOS MODELOS MATEMATICOS. ..	3
2.2. MODELOS PARA DETERMINAR INDICE DE SITIO .....	4
2.3. ECUACIONES DE INDICE DE SITIO .....	5
2.4. INDICES DE DENSIDAD .....	11
2.5. TABLAS DE RENDIMIENTO .....	14
2.6. MODELOS DE TOTALIDAD DEL RODAL O DE PREDICION EX- PLICITA .....	16

2.7. MODELOS DE DISTRIBUCION POR CLASES DE TAMAÑOS O DE PREDICCION IMPLICITA .....	19
2.8. FUNCIONES DE MORTALIDAD .....	22
3. METODOLOGIA .....	26
3.1. AREA ESPECIFICA DE ESTUDIO .....	26
3.1.1. CLIMA .....	26
3.1.2. VEGETACION .....	29
3.1.3. SUELOS .....	31
3.1.4. TOPOGRAFIA .....	32
3.2. BASE DE DATOS .....	32
3.3. CONDICIONES ACTUALES DEL AREA DE ESTUDIO .....	36
3.4. ESTIMACION DEL VOLUMEN .....	38
3.5. ESTIMACION DEL INDICE DE SITIO .....	40
3.6. ESTIMACION DEL INDICE DE DENSIDAD .....	42
3.7. PREDICCION DEL RENDIMIENTO USANDO MODELOS DE TOTALIDAD DEL RODAL O DE PREDICCION EXPLICITA .....	42
3.8. PREDICCION DEL RENDIMIENTO USANDO MODELOS DE CLASES DIAMETRICAS O DE PREDICCION IMPLICITA .....	43
3.8.1. DISTRIBUCIONES DIAMETRICAS .....	43

3.8.2. SELECCION DE LA MUESTRA (PARCELAS) PARA AJUSTAR LOS PARAMETROS "a", "b" Y "c" DE LA FUNCION WEIBULL, CON CARACTERISTICAS DEL RODAL ...	45
3.8.3. PROYECCION DE VARIABLES PARA ESTIMAR LOS PARAMETROS DE LA WEIBULL .....	45
3.8.4. FUNCION DE MORTALIDAD .....	46
3.8.5. ECUACIONES QUE ESTIMAN "a", "b" Y "c" DE LA FUNCION WEIBULL .....	46
3.8.6. FUNCION DE ALTURA .....	47
3.9. VALIDACION DE MODELOS .....	47
4. RESULTADOS Y DISCUSION .....	49
4.1. CORRECCION DE ERRORES EN LA BASE DE DATOS .....	49
4.2. CALCULO DEL VOLUMEN .....	50
4.3. MODELO DE CRECIMIENTO EN ALTURA .....	51
4.4. ESTIMACION DEL INDICE DE DENSIDAD .....	54
4.5. PREDICCIÓN EXPLÍCITA DEL RENDIMIENTO ACTUAL .....	55
4.6. PREDICCIÓN EXPLÍCITA DEL RENDIMIENTO FUTURO .....	56
4.7. DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS .....	59
4.8. FUNCIONES PARA ESTIMAR LOS PARAMETROS DE LA WEIBULL .....	61

4.9. MODELOS DE PROYECCION DE VARIABLES Y FUNCION DE MORTALIDAD .....	70
4.10. ECUACION DE ALTURA EN FUNCION DEL DIAMETRO NORMAL Y SITIO .....	73
4.11. VALIDACION DE LA PREDICCION IMPLICITA DEL RENDIMIENTO FUTURO .....	74
4.12. DISCUSION GENERAL DE LAS DOS TECNICAS PARA PREDECIR EL RENDIMIENTO .....	78
5. CONCLUSIONES .....	81
6. LITERATURA CITADA .....	82
7. APENDICE .....	87

## INDICE DE CUADROS

Cuadro		Página
3.1.	Resumen de la información climatológica de la estación "7 NORTE" ubicada en el CEF San Juan Tetla Puebla (tomado de Garcidueñas, 1987). . . . .	30
3.2.	Datos promedio de las 64 parcelas de Plan de Mari- nes del CEF San Juan Tetla, Puebla. Masa de 85 a- ños de edad y con índice de sitio promedio de 28.5 m a la edad base de 60 años. . . . .	37
4.1.	Variables de las parcelas y juego de parámetros de la Weibull, que se usaron para ajustar las funcio- nes que predicen estos parámetros con característi- cas del rodal, para <i>Pinus montezumae</i> . . . . .	64
4.2.	Estadísticas básicas de cada uno de los modelos que estiman los parámetros de la Weibull, que me- jores resultados dieron. Modelos (4.12) al (4.19). . . . .	67
4.3.	Resultado de la validación utilizando el programa VALIDAR en las parcelas seleccionadas para ese fin y con la proyección de variables y estimación de parámetros con las ecuaciones ajustadas. . . . .	75
4.4.	Resultados de la integración de la función Weibull con el juego de parámetros predichos para las va- riables proyectadas, para hacer la prueba de vali- dación en parcelas de <i>Pinus montezumae</i> . . . . .	76

## INDICE DE FIGURAS

Figura	Página
3.1	Localización del Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Puebla al oriente del volcán Ixtaccíhuatl (Tomado de Rodríguez 1987). . . . . 27
3.2.	Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Puebla (Adaptado de Garcidueñas, 1987). . . . . 28
3.3.	Distribución de las parcelas y ubicación de los SPIS en el paraje denominado "Plan de Marines" del CEF San Juan Tetla, Puebla. . . . . 33
3.4.	Secuela seguida para determinar el volumen individual de <i>Pinus montezumae</i> . . . . . 40
4.1.	Familia de curvas polimórficas de IS generadas por el modelo de Chapman-Richards (4.4) con datos de análisis troncal y remedición de parcelas en <i>Pinus montezumae</i> . . . . . 53
4.2.	Ejemplo de dos parcelas que no ajustaron con la función Weibull, (a) de distribución bimodal y (b) de distribución indefinida. . . . . 60
4.3.	Ejemplo de dos parcelas que sí ajustaron con la función Weibull. . . . . 62
4.4.	Diagrama que presenta la secuela a seguir, para calcular el rendimiento futuro (volumen) en forma explícita o implícita, para <i>Pinus montezumae</i> Lamb en el CEF San Juan Tetla, Puebla. . . . . 79

INDICE DE CUADROS EN EL APENDICE.

Cuadro	Página
1 Estadísticas básicas de todas las variables que se utilizaron para generar los modelos de crecimiento y rendimiento, para <i>Pinus montezumae</i> . . . . .	87
2 Prueba de validación para los modelos de crecimiento y rendimiento que se ajustaron para <i>Pinus montezumae</i> , para la prueba se usaron las parcelas 11, 19, 50 y 63. Se usaron los estadísticos de prueba de t y $R^2$ que se calculó con la expresión (3.9). . . . .	88

## RESUMEN

Se generaron modelos de predicción del crecimiento y rendimiento para *Pinus montezumae* Lamb. del Campo Experimental Forestal (CEF) San Juan Tetla, Puebla. Como base de datos se utilizó la información de 64 parcelas de 0.25 ha, las cuales se midieron en 1974 y 1989. Estas parcelas se pueden considerar como rodales naturales puros coetáneos de edad madura y con una densidad alta.

Para determinar el índice de sitio (IS) se ajustó el modelo de Chapman-Richards para generar curvas polimórficas. Para el índice de densidad se usó el índice de densidad de rodales de Reineke (IDR), y para rendimiento el volumen sin corteza en  $m^3/ha$ .

Para la predicción del rendimiento se utilizaron las técnicas de modelos de totalidad del rodal donde se usó el modelo típico de Schumacher (1939), y modelos de distribución diamétrica de la función de distribución Weibull. Para determinar la efectividad de las predicciones se usó una muestra aleatoria de cuatro parcelas para validación, las cuales no se consideraron en los ajustes de los modelos. En ambas técnicas se obtuvieron resultados satisfactorios, tanto en los ajustes como en la validación.

Respecto a los modelos de distribución diamétrica, para determinar los parámetros de la función Weibull, se utilizó un programa escrito en FORTRAN llamado WEIBULL, el cual determina los parámetros por 15 métodos. Una vez que se obtuvieron los juegos de los parámetros "a", "b" y "c", se generaron modelos de regresión lineal múltiple para estimar éstos en función de las características del rodal. De esta manera se ajustaron ocho modelos (tres para estimar "a", tres para estimar "b" y dos para estimar "c"), de los cuales se obtuvieron coeficientes de determinación superiores a 0.92.

Las variables independientes que se usaron en los modelos para estimar los parámetros de la función Weibull como área basal, diámetro cuadrático y diámetro normal, se proyectaron para predecirlos a edades futuras; para estimar el número de árboles por ha a edades futuras, se ajustó una función de mortalidad. Tanto en las proyecciones de las variables como en la función de mortalidad los resultados en el ajuste y en la validación, fueron satisfactorios.

## SUMMARY

Growth and yield prediction models were generated for *Pinus montezumae* Lamb., at the "San Juan Tetla" Forest Experiment Station in the State of Puebla, México. Two measurements (1974 and 1989-90) of a 16 hectares stand (64 plots of 0.25 ha each) provided the data base for this study. The old forest could be considered as an old even-aged pure natural stand with high density.

To determine the site index (SI), the Chapman-Richards model was fitted in its polymorphic formulation, and density index was determined by using the Reineke Stand Density Index. Yield was determined by the total volume inside bark in cubic meters per hectare.

For yield prediction two approaches were used: the whole stand model with the basic form of the Schumacher yield model, and the diameter class distribution models using the Weibull distribution. The efficiency of both models was validated with a sample of four plots, randomly chosen. The plots were not considered for fitting of models. Both approaches provided satisfactory results.

A FORTRAN program named WEIBULL was used to determine the Weibull parameter estimators by several fitting procedures. Once the sets of parameters "a", "b" and "c" were obtained, multiple linear regression models were generated to estimate these parameters based on stand characteristics. Eight models were fitted by this way (three to estimate "a", three to estimate "b", and two to estimate "c"). All models provided multiple coefficients of determination above 0.92.

The independent variables used in the models to estimate the Weibull function parameters, such as basal area, quadratic mean diameter, diameter at breast height (dbh), and number of stems per hectare were predicted to by used in the Weibull

parameter recovery. A function for mortality was fitted to estimate number of stems per hectare to future ages. Both, projected variables and mortality function, provided good results in fitness and validation as well.

## 1. INTRODUCCION.

El bosque como todo ecosistema, es afectado por factores externos e internos interrelacionados, los cuales ocasionan cambios constantes en su estructura y composición. Dichos cambios deben ser cuantificados por el silvicultor, para así aplicar las técnicas silvícolas más convenientes para un manejo adecuado del recurso forestal. De esta manera, los fenómenos que el silvicultor debe cuantificar, para después controlar, deben ser conducidos hacia una mayor productividad.

Para la planeación de la producción forestal es necesario contar con una predicción del crecimiento. Sin embargo, el incremento de árboles y masas forestales es afectado por una gran cantidad de factores, muchos de los cuales son difíciles de medir y más complejo aún, determinar e interpretar su influencia sobre el crecimiento (Ramírez, 1983). Por eso, los modelos matemáticos son una de las herramientas analíticas más utilizadas en la actualidad para la generación de conocimientos en el área del crecimiento y producción de masas forestales (Mendoza, 1983) ya que de esta forma, a través de fórmulas matemáticas se representan los procesos biológicos que ocurren a nivel de árbol individual o del rodal completo.

Por otra parte, el avance en la computación ha logrado que el manejo de los modelos sea cada vez más generalizado, ya que por medio de paquetes estadísticos es posible estimar sus parámetros en pocos minutos lo que antes podría haber sido en semanas de trabajo. Por eso, recientemente en México se ha fomentado el uso de los modelos matemáticos en el área forestal, para representar la productividad, la competencia, el crecimiento, etc. de masas forestales, lo cual ha traído como consecuencia que se cuente con un conocimiento cada vez más amplio de éstas, y por lo mismo lograr un aprovechamiento más eficiente de los recursos.

Una manera para lograr la captación de información relativa a incremento de árboles y masas forestales es a través de mediciones periódicas. Un medio para tener esas mediciones es el inventario forestal continuo, que tuvo sus orígenes en Europa a fines del siglo pasado; en México se empezó a utilizar en forma sistemática hasta fines de los 60's y el seguimiento ha sido insuficiente, ya que son muy pocas las mediciones periódicas que se han realizado. La información del inventario forestal continuo se obtiene de sitios permanentes, los cuales se empezaron a establecer en nuestro país en los 60's con el sitio permanente de experimentación silvícola "La Nieve" en Michoacán (Mas, 1983). Aunque se han establecido otros sitios permanentes en diferentes lugares del país, a la fecha se ha utilizado poca información que éstos han generado.

Otra manera para obtener la información es el análisis troncal; método en el que a través de la medición de los anillos de crecimiento se infiere el desarrollo que pudo haber tenido el árbol durante su vida.

Usando las técnicas descritas, u otras, lo ideal sería integrar un sistema de producción para cada especie y en cada lugar para tener un marco completo respecto a la productividad de los bosques mexicanos.

Este estudio se realizó en base a una remediación de parcelas permanentes, en un bosque natural de *Pinus montezumae* Lamb. La masa es pura y coetánea, localizada en el CEF San Juan Tetla, Puebla.

El objetivo fue: generar un sistema de ecuaciones para predecir el rendimiento actual y futuro, usando modelos de totalidad del rodal y de distribuciones diamétricas, para la localidad y especie indicados.

## 2. REVISION DE LITERATURA.

### 2.1. GENERALIDADES RESPECTO A LOS MODELOS MATEMATICOS.

En el ámbito forestal, el utilizar los modelos matemáticos sirve para representar el comportamiento de fenómenos biológicos como el crecimiento, ya que aquí el factor tiempo es una de las limitantes para describir directamente el desarrollo de un rodal desde su inicio hasta el momento de la cosecha. Afortunadamente la cualidad de abarcar procesos dinámicos que implican un cambio continuo en el tiempo, ha sido uno de los puntos más relevantes para la adopción generalizada de los modelos matemáticos como herramienta de investigación biológica (Mendoza, 1983).

El crecimiento de árboles y rodales ha sido estudiado desde los inicios de la Dasonomía. Así, desde principios de este siglo los análisis cuantitativos del crecimiento de los bosques han progresado rápidamente en extensión y grado de sofisticación (Pienaar y Turnbull, 1973), desde entonces se han generado una gran cantidad de técnicas para elaborar modelos matemáticos que describan el comportamiento de un determinado proceso. A este respecto, un modelo matemático se define como una expresión matemática de una relación entre variables, las cuales pueden ser predichas (o explicadas) lógicamente, mientras que un modelo matemático de crecimiento biológico es una expresión adicional de una hipótesis lógica concerniente a los procesos de crecimiento biológico (Pienaar, 1965). También Richards (1959) menciona que para simular curvas de crecimiento en base a formulaciones matemáticas, se puede explicar su forma a través de ciertos postulados acerca de los procesos del crecimiento, o de otro modo, son directamente prácticos para obtener relativamente cualquier ecuación simple que refleje la esencia de los datos numéricos.

Las funciones de crecimiento matemático son comunmente formuladas en términos de tasas de crecimiento, i.e. una consideración del comportamiento de la tasa de crecimiento en el

tiempo. Alternativamente, ésto también a menudo se formula en términos de tasa de crecimiento relativo, *i.e.* una consideración de la relación entre el tamaño y la tasa de crecimiento. La ecuación diferencial resultante es entonces resuelta y constituye la "función de crecimiento" (Pienaar, 1965).

A medida que el uso de los modelos matemáticos se ha generalizado, el conocimiento del potencial técnico de éstos se ha difundido lenta pero progresivamente, ocasionando, por un lado, una mayor apreciación de las cualidades de los modelos matemáticos, pero por otra parte se han fomentado ciertos abusos y malentendidos, derivados de la enorme comodidad de manipulación de los modelos, una vez que han sido programados en computadoras (Mendoza, 1983).

Muchas veces se manipulan dichos modelos sin tomar en cuenta los supuestos en que éstos se basan y la teoría del análisis de regresión que los respalda. Como consecuencia se tienen predicciones erróneas o que carecen de algunas de las cualidades propias de un buen modelo para determinar el alcance de utilización de éstos. Mendoza (1983) identifica seis cualidades: 1) generalidad, 2) complejidad, 3) realismo, 4) precisión, exactitud y confiabilidad, 5) validez y 6) elasticidad.

## 2.2. MODELOS PARA DETERMINAR INDICE DE SITIO.

En el contexto del manejo forestal, la calidad de sitio puede definirse como la producción potencial de madera de un sitio para una especie en particular o tipo de bosque. En sí es un índice relacionado a la máxima cantidad de volumen que el suelo puede producir en cierto período (Clutter *et al*, 1983 y Davis y Johnson, 1987).

De acuerdo a la definición anterior, el clasificar un bosque en áreas de similar potencial productivo es necesario para establecer y organizar el plan de manejo completo de un área en

particular. Esta clasificación ha respondido a diferentes criterios para medir la productividad. Grey (1980) indica que la utilidad del concepto sitio depende del sistema de clasificación empleado, y agrega que sinónimos asociados con producción de madera incluyen: índice de sitio, calidad de sitio, e incremento medio anual, ya sea a la edad de culminación o a una edad base determinada.

Para la evaluación de calidad de sitio Clutter et al (1983) clasifican a los métodos en los siguientes: en directos e indirectos; dentro de los primeros está la estimación a partir de registros permanentes de producción, la estimación basada en datos de volumen del rodal y la estimación basada en datos de altura del rodal. Dentro de los segundos esta la estimación a partir de la relación que hay entre especies, la estimación a partir de características de la vegetación, y la estimación a partir de factores topográficos, climáticos y edáficos.

Davis y Johnson (1987) mencionan que se han desarrollado un conjunto de métodos indirectos para medir la productividad del sitio ya que ésta raramente se mide directamente a través del volumen del rodal, además que dichos métodos procuran seleccionar medidas fáciles de las propiedades de la vegetación o del suelo, de esa forma, de todas las medidas indirectas que se han generado, la del crecimiento en altura es la más práctica, consistente y útil como indicador de la calidad de sitio. Es conveniente señalar que Roth (1916) citado por Borders et al (1984) sugirió usar la altura a una edad específica como medida de productividad del bosque. Él razonó que la producción en volumen, considerada como la principal medida de la calidad de sitio, es una función de la altura y diámetro, y que la primera está menos influenciada por la densidad y edad del rodal. De esta manera se ha utilizado mucho el índice de sitio (IS), que es la altura dominante de un rodal a una edad base dada.

### 2.3. ECUACIONES DE INDICE DE SITIO.

El IS es una representación gráfica que describe la relación entre la altura y la edad de un rodal o árbol individual, para modelar dicha relación, se han utilizado diferentes modelos y técnicas para ajustarlos. La mayoría de estas técnicas encuadran en cualesquiera de los tres métodos de desarrollo siguientes (Clutter et al, 1983): 1) método de la curva guía, 2) método de la ecuación diferencial llamado también "método de la diferencia algebraica") y 3) método de la predicción de parámetros.

Las ecuaciones de IS también se clasifican en tres tipos de acuerdo a la naturaleza de la familia de curvas altura-edad que éstas generan. a) Las curvas anamórficas son aquellas donde la altura de una curva a cualquier edad es una proporción constante de la altura de otra a la misma edad. b) Curvas polimórficas no cruzadas, en las cuales esta relación de proporcionalidad no existe, y las curvas no llegan a cruzarse en el rango de edad de interés. Dicho de otra manera; las curvas de IS son anamórficas si hay una tasa relativa de crecimiento constante para todos los índices de sitio a una edad específica, i.e.  $[(\partial h/\partial t)+h]=k$ ; donde  $h$ =variable de crecimiento,  $t$ =tiempo y  $k$ =una constante. Lo que significa una constante para todos los sitios a cada edad diferente, si esta relación no se cumple, las curvas son polimórficas (Davis y Johnson, 1987). c) Finalmente las curvas polimórficas cruzadas, donde tampoco se cumple la relación de proporcionalidad, sin embargo, pueden llegar a cruzarse en el rango de edad de interés.

Para el ajuste de curvas de IS por el método de la diferencia algebraica, se requieren datos de sitios permanentes o remediciones de árboles, o datos de análisis troncales y pueden ser aplicados a cualquier ecuación altura-edad para generar familias de curvas anamórficas o polimórficas. El paso inicial en la aplicación de este método es el desarrollo de una fórmula de diferencia de la ecuación altura-edad ya ajustada. Esta fórmula diferencial expresa la altura remedida ( $H_2$ ) como una función de

la edad de remediación ( $E_2$ ), edad inicial ( $E_1$ ) y altura inicial ( $H_1$ ) (Clutter et al, 1983 y Ramírez et al, 1988).

En general, una ecuación de diferencia algebraica tiene la forma:

$$Y_2 = f (Y_1, E_2, E_1, \underline{\beta})$$

Donde  $Y_2$  es el valor de una variable continua definida sobre un árbol o un rodal en el periodo 2 de la medición,  $Y_1$  es la misma variable medida en el periodo 1;  $E_2$  y  $E_1$  son las edades de los árboles o rodales en los periodos 2 y 1 respectivamente, y  $\underline{\beta}$  es el vector de parámetros (Borders et al, 1988).

Bailey y Clutter (1974) describieron un procedimiento para estimar los parámetros del modelo de Schumacher (1939) para generar curvas anamórficas y polimórficas de IS, tomando los datos de un mismo sitio a dos edades diferentes. Este procedimiento es esencialmente una formulación diferencial del modelo altura-edad de Schumacher (1939) (Borders et al, 1984).

Ramírez et al (1988) probaron la consistencia en la construcción de la ecuación de diferencia algebraica y encontraron que los procedimientos utilizados ofrecen la posibilidad de estudiar las formas implícitas del crecimiento funcional para discutir algunas interpretaciones biológicas. Por otra parte Borders et al (1988) compararon tres formulaciones para estimar los parámetros de dos modelos de proyección de área basal que los autores denominaron de Pienaar y Souter. Los datos utilizados en los ajustes se obtuvieron a partir de una serie de remediciones a edades  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Las tres formulaciones fueron: a) todos los posibles intervalos de crecimiento los cuales son  $E_1$  a  $E_2, E_1$  a  $E_3, \dots, E_1$  a  $E_n; E_2$  a  $E_3, E_2$  a  $E_4, \dots, E_2$  a  $E_n$ ; hasta terminar con  $E_{n-1}$  a  $E_n$ . b) Intervalos de crecimiento no traslapados los cuales son:  $E_1$  a  $E_2, E_2$  a  $E_3, \dots, E_{n-1}$  a  $E_n$  que es el procedimiento más común para estimar los parámetros en la ecuación de diferencia algebraica. Y c) el intervalo de crecimiento más grande (i.e.  $E_1$  a  $E_n$ ). El resultado

fue que para el modelo de Souter el mejor ajuste se obtuvo cuando se utilizó la estructura de datos de intervalos de crecimiento no traslapados, mientras que para el modelo de Pienaar el mejor ajuste se logró cuando se utilizó el intervalo de crecimiento más grande.

Para el ajuste de curvas de IS por el método de predicción de parámetros se requieren datos de parcelas remedidas o datos de análisis troncales y se deberán seguir los siguientes tres pasos (Clutter et al, 1983).

- 1) Ajustar una función lineal o no lineal altura-edad por cada árbol o por parcela.
- 2) Usando cada curva ajustada asignar el valor de IS que le corresponde por árbol o por parcela.
- 3) Relacionar los parámetros de las curvas ajustadas a los índices de sitio, a través de procedimientos de regresión lineales o no lineales.

Una vez que los parámetros del modelo que se esté empleando se ajusten a los valores de IS de cada rodal o parcela, el modelo se expresa de forma tal que en lugar de cada parámetro debe ir la función que ajustó mejor a dicho parámetro. De esta forma en lugar de tener  $H=f(E, \underline{\beta})$  donde H es la altura, E la edad y  $\underline{\beta}$  vector de parámetros; se tendría  $H=f(E, \underline{f}(IS))$ , donde H y E como se definieron antes y  $\underline{f}(IS)$  sería el vector de funciones, donde IS es el índice de sitio de cada árbol o parcela.

Las representaciones matemáticas de curvas de IS son un apoyo substancial en el uso de tales curvas (Ek, 1971) de tal manera que para expresar el comportamiento de éstas, se han utilizado una gran variedad de modelos, los cuales se han ajustado por cualesquiera de los tres métodos ya mencionados. Es probable que los modelos que más se hayan utilizado últimamente para la construcción de curvas de IS, sean los modelos de

Schumacher (1939) y el modelo de Chapman-Richards, en sus formulaciones anamórfica y polimórfica.

El modelo de Schumacher (1939), inicialmente se desarrolló para relacionar el volumen con la edad, sin embargo, el principal supuesto en que se basó el modelo, es que el crecimiento porcentual varía inversamente con la edad, por lo que ahora suele presentarse éste en la forma ya aplicado a la altura (H):

$$H = \alpha e^{-\beta E^{-1}} \quad (2.1)$$

Linealizado quedaría.

$$\ln(H) = \alpha + \beta E^{-1} \quad (2.2)$$

Donde:

H = altura de los árboles dominantes y codominantes

E = edad

$\alpha$  = parámetro del valor asintótico

$\beta$  = parámetro de la tasa de cambio

Clutter et al (1983) mencionan que este modelo es muy utilizado para generar curvas anamórficas por el método de la curva guía. Por ejemplo, en México, Benavides (1987) lo utilizó para ajustar las curvas de IS de *Pinus michoacana cornuta* y *P. oocarpa* en bosques de Tapalpa, Jalisco. También Zepeda y Rivero (1984) hacen mención de este modelo y a manera de ejemplo desarrollaron curvas anamórficas por el método de la curva guía con el auxilio del modelo de G. Backman (s/f) citado por éstos. Para lo cual utilizaron los datos de análisis troncales de *P. hartwegii*, de Zoquiapan, México. Por otra parte, Guerra (1990) desarrolló el ajuste de cinco modelos para generar curvas de IS para *P. engelmannii* de El Salto, Durango, dentro de los cuales estaba el modelo de Schumacher (1939); para ajustar los modelos utilizó las metodologías de: curva guía, diferencia algebraica y predicción de parámetros.

Por otra parte, este modelo también se ha probado para generar curvas anamórficas y polimórficas por el método de la diferencia algebraica. Fierros (1989) lo probó para ajustar curvas anamórficas y polimórficas con datos de análisis troncales de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* en una plantación de La Sabana, Oaxaca. También Bojorges (1990) lo ajustó para las formulaciones mencionadas con datos de análisis troncales de *Abies religiosa* en la Estacion Experimental Zoquiapan, México. En ambos casos presentó buenos ajustes.

Respecto al modelo de Chapman-Richards, Richards (1959) lo consideró como la aplicación de una forma generalizada de la función de crecimiento de Von Bertalanffy a datos de plantas, y Pienaar (1965) llegó a la conclusión de que cada uno de los modelos de crecimiento más conocidos como el Monomolecular, el Gompertz y el Logístico o de crecimiento autocatalítico, son justamente un caso especial del modelo generalizado de Chapman-Richards.

Pienaar y Turnbull (1973) mostraron cómo Richards (1959) estudiando crecimiento de plantas y Chapman (1961) el crecimiento de peces, llegaron a concluir que la constante alométrica de Von Bertalanffy de 2/3 estaba restringida para aplicarse a muchas formas de vida, por lo que sugirieron que dicha constante debería ser un valor indefinido y cambiaron la contante 2/3 por "m". De tal forma que la generalización de Chapman-Richards al modelo de Von Bertalanffy es una expresión matemática de una hipótesis que implica causas esenciales del fenómeno de crecimiento, además los parámetros en el modelo, tienen interpretación biológica o fisiológica. El desarrollo y análisis del modelo aporta una mejor comprensión del proceso básico y una teoría general más útil.

Dicho modelo suele presentarse en la forma (Clutter et al, 1983):

$$H = e_1 [1 - \exp(-e_2 E)]^{e_3} \quad (2.3)$$

Donde:

H y E como se definieron antes

$e_1$  = parámetro del valor asintótico, que es la máxima altura posible del modelo

$e_2$  = parámetro de la tasa de crecimiento en altura

$e_3$  = parámetro de forma.

Este modelo se ha ajustado para generar curvas anamórficas y polimórficas por los tres métodos mencionados, lo que indica que se ha popularizado mucho su uso. Fierros (1989), Bojorges (1990) y Guerra (1990) lo ajustaron para las dos formulaciones por el método de la diferencia algebraica, con los datos mencionados.

El modelo descrito también se ha utilizado en el ajuste por el método de predicción de parámetros. Por ejemplo Graney y Burkhart (1973) lo utilizaron para generar curvas de IS para *Pinus echinata*. De hecho el modelo que se ha denominado modificado de Richards, se generó por este método y Ek (1971) lo ajustó con datos de *Picea glauca*, después Payandeh (1974) utilizó este mismo modelo para ajustar las curvas de IS de nueve especies forestales de Canadá. En México, el modelo modificado de Richards también se ha utilizado para ajustar curvas de IS; Arteaga (1985) lo ajustó con datos de análisis troncales de *P. patula* en la región de Chignahuapan-Zacatlán, Puebla, y Aguirre (1984) lo ajustó con datos de análisis troncales de *P. pseudostrobus* en la región de Iturbide, Nuevo León.

Existen otros modelos o modalidades de los dos anteriores que también ajustan curvas de IS y miden calidad de sitio, sin embargo no se mencionarán en el presente escrito por no ser el objetivo principal del mismo.

#### 2.4. INDICES DE DENSIDAD.

Otro de los aspectos de mayor importancia para el manejo forestal es la densidad de un rodal, la cual Ford-Robinson citado por Daniel et al (1982) la define como: "la medida cuantitativa

de la población de árboles expresada en forma relativa como un coeficiente que toma números normales, área basal o volumen como unidad; o en forma absoluta en términos del número de árboles, del área basal total o del volumen por unidad de área."

Para medir la densidad de un rodal se han generado varios criterios dependiendo de los objetivos del manejo. Algunas de las medidas de densidad se pueden calcular directamente con los datos obtenidos en el rodal de interés; mientras que otras, requieren la referencia adicional de relaciones previamente determinadas (Clutter et al, 1983).

Dos de las medidas de densidad que se pueden hacer directamente en el rodal son el número de árboles y el área basal por unidad de área. Al respecto, Burkhart y Brooks (1982) mencionan que las medidas de densidad del rodal más comunmente usadas en modelos de crecimiento y rendimiento para rodales naturales ha sido el área basal, mientras que para plantaciones se ha empleado más frecuentemente el número de árboles.

Otras medidas de densidad que sólo se pueden obtener con referencia a una relación predeterminada son: el Índice de Densidad de Rodales (IDR), la Relación Area Arbol (RAA), el Factor de Competencia de Copas (FCC), etc. En varios trabajos se proporciona una explicación detallada de cada una de estas y otras medidas de densidad y su relación (Curtis, 1970; Clutter et al, 1983; Davis y Johnson, 1987; y Zepeda, 1984). Enseguida se proporcionará una somera explicación del IDR.

El IDR es una medida de densidad promedio del rodal, que solamente se puede obtener con referencia a una relación predeterminada entre el número de árboles por unidad de área y el tamaño promedio de éstos (Clutter et al, 1983). Reineke (1933) descubrió que dos rodales con la misma descripción (mismo diámetro promedio, misma varianza, etc.) tienen la misma distribución de diámetros relativa, pero pueden diferir en el número total de árboles por unidad de área. Obviamente, el rodal

con el mayor número de árboles, es el más densamente poblado y su densidad relativa es directamente proporcional al número de árboles de ellos. Así, el número de árboles de un rodal puede ser expresado como porcentaje del número de árboles del otro.

Con el propósito de encontrar una forma para reducir las mediciones de diferentes rodales con distinto diámetro normal, y por lo tanto diferente medida de densidad, para constituir la en una forma única; Reineke graficó en papel logarítmico de sección cruzada los datos de rodales densos de varias especies, y encontró que para muchas especies describían una línea recta con la misma pendiente pero con diferente elevación (diferente interceptada) de acuerdo a la especie. La curva descrita la representó por la ecuación:

$$\log N = - 1.605 \log D + k$$

Donde N es el número de árboles por acre, D es su diámetro promedio (por área basal), y k es una constante que varía con la especie (Reineke, 1939).

Basados en lo que encontró Reineke, Clutter et al (1983) mencionan que la relación funcional entre el número de árboles y el tamaño de éstos, es de la forma:

$$N = \alpha D_q^{-\beta} \quad (2.4)$$

que al usar una transformación logarítmica queda:

$$\ln (N) = \ln \alpha + \beta \ln (D_q) \quad (2.5)$$

Donde:

N = número de árboles por unidad de área

$D_q$  = diámetro cuadrático promedio

ln = logaritmo natural (también se puede utilizar el logaritmo base 10)

$\ln (\alpha)$  = interceptada al origen

$\beta$  = Pendiente de la curva

Una vez que se ajusta el modelo (2.5) como modelo de regresión lineal simple, por medio de mínimos cuadrados, se obtienen los parámetros estimados  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$ . Para cualquier rodal con  $N$  y  $D_q^-$  conocidos, Clutter et al (1983) definen el índice de densidad del rodal como:

$$\text{IDR} = N (10/D_q^-)^{\beta} \quad (2.6)$$

Sin embargo, cuando se usan las unidades en centímetros, en lugar de pulgadas, este índice podría definirse como:

$$\text{IDR} = N (25.4/D_q^-)^{\beta} \quad (2.7)$$

De esta forma, es muy sencillo determinar el IDR ya que primero se ajusta el modelo (2.5) con datos provenientes de rodales completamente densos, y después el parámetro de la pendiente de la curva se sustituye en el modelo (2.6) ó (2.7), según las unidades que se empleen, junto con el número de árboles por unidad de área y el  $D_q^-$  promedio de cada rodal.

En México se han elaborado varios trabajos que incluyen aspectos de densidad. Por ejemplo, Zepeda (1984) describe tres de los que más se utilizan actualmente; Balderas y Rodríguez (1989) y Becerra (1986), elaboraron guías de densidad, los primeros para *P. montezumae* y el segundo para *P. patula*, donde para definir las líneas de densidad máxima y mínima también utilizaron varios criterios para medirla.

La parte final a que se debe llegar al hacer estudios sobre densidad del rodal, es la construcción de un diagrama de manejo-densidad, el cual es una herramienta gráfica para relacionar densidad del rodal, tamaño de árboles y rendimiento del rodal. En el diagrama se superponen las siguientes relaciones: proporción de densidad máxima, factor de mortalidad, cierre de copas, diámetro normal y altura estimados e índice de densidad relativa (Drew y Flewelling, 1979).

## 2.5. TABLAS DE RENDIMIENTO.

El crecimiento y rendimiento pueden ser medidos en unidades físicas tales como volumen, área basal y altura, sin embargo, también pueden ser medidos en valor, el cual muchas veces representa la variable de interés (Davis y Johnson, 1987). Históricamente, la construcción de tablas de rendimiento ha sido orientada hacia la predicción de condiciones futuras del rodal (Drew y Flewelling, 1977), estas predicciones tradicionalmente han asumido la forma de tablas de rendimiento; sin embargo, hoy en día, muchos sistemas de predicción de rendimiento son expresados como ecuaciones matemáticas o sistemas de ecuaciones en lugar de tablas (Clutter et al, 1983). Las funciones de rendimiento se obtienen por lo general, de la integración matemática de ecuaciones de tasas de crecimiento (Moser y Hall, 1969). Este cambio, mucho se debe al avance que se ha logrado en el campo de la computación, de esta forma se han generado modelos de regresión complejos para predecir crecimiento y rendimiento para muchas combinaciones de edad, sitio, y densidad (Drew y Flewelling, 1977) los cuales pueden ser ajustados en tiempos relativamente cortos sin importar los extenso de la base de datos.

A pesar de la complejidad estructural y suma de detalles de salida que proveen, los modelos de crecimiento y rendimiento tienen un propósito común: estimar características del rodal, como volumen, área basal y número de árboles por unidad de área, a un tiempo determinado (Burkhart y Brooks, 1982).

El método más común para obtener la base de datos para las tablas de rendimiento, ha sido la remediación periódica de parcelas permanentes, sobre un rango de sitios, edades y tratamientos (Curtis, 1972); cuando no ha sido posible contar con ese tipo de información, se ha usado la medición de parcelas temporales. Por ejemplo, Aguirre (1987) desarrolló modelos de crecimiento para *P. cooperi* con datos de rodales naturales, puros

coetáneos en El Salto, Durango, usando parcelas temporales. También Torres (1987) desarrolló un modelo de crecimiento y rendimiento de totalidad del rodal y la predicción del rendimiento a través de su distribución diamétrica, utilizando la función Weibull para *P. hartwegii* en la Estación Experimental de Zoquiapan, México. La información para desarrollar este trabajo lo obtuvo de parcelas temporales. Cabe aclarar, que en ambos trabajos se obtuvieron buenos resultados en cuanto al ajuste de los modelos que utilizaron.

Las clasificaciones sobre modelos para estimar el incremento y rendimiento de rodales, se muestran en forma bastante extensa en Zepeda (1990). En el presente escrito sólo se mencionarán dos de ellas, una de las cuales pertenece a Burkhart y Brooks (1982) que es la siguiente: las técnicas que comunmente se siguen para modelar crecimiento y rendimiento se pueden dividir en tres grandes categorías 1) modelos de totalidad del rodal, 2) modelos de distribuciones por clases de tamaños, y 3) modelos de árboles individuales. La otra pertenece a Clutter et al, (1983) los cuales las categorizan de acuerdo a la complejidad matemática en:

A. Modelos tabulares.

B. Modelos constituidos por ecuaciones o sistemas de éstas.

1. Modelo de predicción directa de valores unidad-área.

2. Modelo que predicen valores de unidad-área obtenidos por acumulación de valores de árboles individuales o grupos de ellos.

(a) Ecuaciones por clases de árboles.

(b) Ecuaciones para árboles individuales.

Ambas clasificaciones se usan en el presente trabajo.

## 2.6. MODELOS DE TOTALIDAD DEL RODAL O DE PREDICCIÓN EXPLÍCITA.

Este tipo de modelos se caracterizan porque la solución de las ecuaciones (o ecuación) que comprende el sistema, proporciona la estimación del volumen por unidad de área y la predicción puede ser para estimar el rendimiento actual, el cual no considera la proyección de la densidad futura, o rendimiento futuro el cual sí considera dicha proyección (Clutter *et al*, 1983). Su manera de operar es el siguiente: el crecimiento neto o bruto se calcula estimando el rendimiento a dos edades diferentes. Cuando se obtiene el crecimiento estimado por medio de diferenciar una ecuación de crecimiento, es necesario contar con una función que describa el cambio en la densidad del rodal en el tiempo. Para rodales naturales esto incluye generalmente una ecuación para proyectar área basal inicial, edad y el periodo de proyección (Burkhart y Brooks, 1982).

Uno de los modelos que más se han utilizado para predecir el rendimiento corriente, Clutter *et al* (1983) lo presentan como la forma básica del modelo de Schumacher en la siguiente manera:

$$\ln (V) = \beta_0 + \beta_1 E^{-1} + \beta_2 f(S) + \beta_3 g(Ds) \quad (2.8)$$

Donde:

V = alguna expresión de rendimiento por unidad de área

E = edad del rodal

f(S) = alguna función de IS

g(Ds) = alguna función de densidad del rodal

A partir de este modelo se han generado muchos otros, pero sin cambiar la estructura básica del mismo.

Clutter *et al* (1983) presenta otros modelos para predicción explícita del rendimiento corriente, que difieren de la estructura del modelo básico de Schumacher, incluso modelos de regresión no lineal como el de Rose y Ek (1972) citados por los primeros.

Respecto a la predicción del rendimiento futuro, se puede utilizar el mismo modelo básico de Schumacher, no obstante, es necesario proyectar la función de densidad. Por lo tanto si el interés es proyectar el crecimiento de un árbol a edades futuras, lo que se requiere es el IS propio de ese rodal, la edad de proyección y la predicción de la densidad a la edad proyectada. Así, el problema se reduce a predecir la función de densidad (Clutter et al, 1983). Estos mismos autores presentan la siguiente ecuación como de Bennett para hacer la predicción de la densidad.

$$\ln (AB_2) = \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln(AB_1) + 5.1649 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (2.9)$$

Donde:

$E_1$  = edad actual

$E_2$  = edad de proyección

$AB_1$  = área basal actual

$AB_2$  = área basal predicha a la edad de proyección

La ecuación (2.9) se puede ajustar directamente y después se sustituye en el modelo básico de Schumacher, o de otra manera, se puede ajustar el modelo completo una vez que se incluye sin ajustar en el modelo básico de Schumacher.

Clutter et al (1983) también citan el modelo que inicialmente desarrolló Clutter (1963) y después Sullivan y Clutter (1972). Primero derivaron el área basal en el periodo de proyección con el siguiente modelo:

$$\ln (B_2) = \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln (B_1) + \alpha_0 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) + \alpha_1 S \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (2.10)$$

Donde:

S = índice de sitio

$\alpha_1$  = parámetros a estimar

las demás variables como se definieron antes

Después desarrollaron otro modelo para la predicción del rendimiento futuro, mismo que al anexarle el modelo (2,10) quedó como sigue:

$$\ln (V_2) = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 E^{-1} + \beta_3 \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln (B_1) + \beta_4 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) + \beta_5 S \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (2.11)$$

Donde:

$V_2$  = volumen por unidad de área a la edad  $E_2$   
 $\beta_i$  = parámetros del rodal para  $i=1, \dots, 5$

Con este enfoque de modelo se puede predecir lo siguiente (Clutter et al, 1983):

- Volumen actual.
- Volumen futuro.
- Tasa de crecimiento instantánea en volumen.
- Área basal futura.
- Tasa de crecimiento instantánea en área basal.

## 2.7. MODELOS DE DISTRIBUCION POR CLASES DE TAMAÑOS O DE PREDICION IMPLICITA

En esta técnica, el número de árboles por unidad de área en cada categoría diamétrica se estima a través del uso de una función de densidad probabilística (fdp) la cual provee la frecuencia relativa de árboles por categoría. La altura se proyecta para árboles de determinado diámetro que crecen dentro de las condiciones del rodal. El volumen por clase diamétrica se calcula sustituyendo la altura media predicha y el punto medio de la categoría diamétrica en la ecuación de volumen por árbol individual. El rendimiento estimado se obtiene sumando el volumen de cada categoría (Burkhart y Brooks, 1982).

Una de las funciones que más se han utilizado ultimamente para estimar la distribución diamétrica es la función de distribución Weibull (fdW), la cual ha sido usada como modelo en una amplia variedad de aplicaciones forestales (Burk y Newberry, 1984). También se ha utilizado para desarrollar modelos de predicción de parámetros (Hyink y Moser, 1983; y Schreuder et al, 1979). En México también se ha utilizado ultimamente como modelo para predecir el rendimiento actual y futuro (Torres, 1987; Castillo, 1988; y Ramírez y Fierros 1989).

Existen otros modelos que describen distribuciones diamétricas, pero quizá ninguno presente tantas características favorables como la fdW, las cuales se pueden concretar en las siguientes: es simple y fácil de manejar matemáticamente, tiene gran flexibilidad ya que la función puede adoptar diferentes formas (desde una "j" invertida hasta distribuciones con sesgo positivo o negativo), se puede integrar analíticamente, los distintos procedimientos para estimar sus parámetros permiten una selección apropiada de acuerdo a la capacidad de equipo de cómputo con que se cuente (Bailey y Dell 1973).

La fdW de tres parámetros tiene la siguiente forma.

$$f(X) = \begin{cases} \frac{c}{b} \left(\frac{X-a}{b}\right)^{c-1} \exp \left[-\left(\frac{X-a}{b}\right)^c\right] & \text{para } (a \leq X \leq \infty) \\ 0, \text{ de otra forma} & \end{cases} \quad (2.12)$$

Donde:

$f(X)$  = la probabilidad de densidad asociada con cada posible valor de la variable aleatoria  $X$

$a$  = parámetro de localización

$b$  = parámetro de escala

$c$  = parámetro de forma

Los parámetros "b" y "c" deben ser positivos, "a" puede tomar cualquier valor, sin embargo, para aplicaciones forestales

debe ser positivo debido a que se refiere al valor mínimo de la fdp; en este caso al diámetro normal mínimo (Torres, 1987).

Una de las ventajas de la fdW respecto a otras funciones de distribución como la normal, es la forma cerrada de su función de densidad acumulativa la cual es relativamente simple y se representa con la siguiente expresión:

$$F(X) = \begin{cases} 1 - \exp \left[ - \left( \frac{X - a}{b} \right)^c \right] & \text{para } (a \leq X \leq \infty) \\ 0, \text{ de otra forma} & \end{cases} \quad (2.13)$$

Se han desarrollado diferentes métodos para estimar los parámetros de la Weibull, donde los estimadores de máxima verosimilitud se consideran generalmente como los mejores, aunque para su ajuste se requieren procesos iterativos complicados (Bailey y Dell, 1973). De hecho estos autores mencionan que si se cuenta con el acceso a un buen equipo de cómputo, la estimación de máxima verosimilitud es la mejor opción.

Por otra parte también se pueden estimar los parámetros utilizando percentiles. Para este caso se define el p-ésimo percentil dentro de la distribución, como el valor  $X_p$  de  $x$ , tal que una observación tomada al azar tiene la probabilidad "p" de ser menor o igual a  $X_p$  y se obtiene por la siguiente expresión a partir de la función de distribución acumulativa de la Weibull (expresión 2.13) como (Bailey y Dell, 1973; y Clutter et al, 1983):

$$p = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{X_p - a}{b} \right)^c \right]$$

Resolviendo para  $X_p$  la ecuación anterior nos da:

$$X_p = a + b [-\ln (1-p)]^{1/c} \quad (2.14)$$

Para estimar los parámetros utilizando estimación de percentiles, también se han desarrollado varios procedimientos. Por ejemplo, Dubey (1967) demostró la eficiencia de los percentiles 24 y 93 para estimar los parámetros de escala y forma. Torres (1987) describe cinco procedimientos para estimar los parámetros utilizando percentiles y son los siguientes: estimadores de Zanaquis, estimadores de Dubey, estimadores de Abernethy, estimadores de momentos y estimadores de Bain y Antle.

Por otra parte, también se pueden estimar los parámetros de la Weibull por medio de análisis de regresión no lineal, el procedimiento consiste en lo siguiente (Torres, 1987)

1. Se aproxima la función de distribución diamétrica acumulativa ( $F(X)$ ), ordenando el número total de observaciones de cada parcela en orden ascendente y  $F(X_i)$  se define como:

$$F(X_i) = \frac{i - 1/2}{n}$$

Donde:

$n$  = número total de observaciones

$i = 1, 2, \dots, n$  ( $i$ -ésimo diámetro ordenado)

2. Estos valores se sustituyen en la función acumulativa (expresión 2.13) y se ajusta por mínimos cuadrados como ecuación de regresión no lineal.

Además de lo que menciona Bailey y Dell (1973) que depende de cada quien y de las posibilidades de equipo con que cuente para usar cualquier método para estimar los parámetros de la fdW; se debe tomar en cuenta la precisión que se desee, los costos y la posibilidad de entender el método de estimación empleado.

## 2.8. FUNCIONES DE MORTALIDAD.

Al desarrollar modelos de crecimiento en un bosque, es muy útil contar con alguna función de mortalidad, ya que el número de árboles por unidad de área cambia constantemente. Para desarrollar este tipo de funciones generalmente se requieren datos de parcelas remedidas para que en el análisis de mortalidad se incluyan las variables:  $E_1$ =edad inicial,  $N_1$ =número de árboles por unidad de área a la edad inicial  $E_1$ ,  $E_2$ =edad de remediación y  $N_2$ =número de árboles por unidad de área a la edad remediada  $E_2$  (Clutter et al, 1983).

Cuando se usan modelos de árboles individuales para modelar crecimiento y rendimiento, las funciones de mortalidad para árboles individuales son esenciales, ya que de esa forma se puede determinar la probabilidad de muerte de cada árbol en el rodal. De esta forma se han desarrollado varias ecuaciones, algunas de las cuales son probabilísticas como la que presentan Belcher et al (1982) y Daniels y Burkhart (1975) y otras determinísticas. Incluso para determinar la mortalidad de un rodal se ha utilizado en ocasiones la distribución Weibull, Somers et al (1980) usaron la fdW como un modelo flexible de sobrevivencia en rodales coetáneos y Glover y Hool (1979) usaron esta misma como una función de regresión más bien que como densidad probabilística para desarrollar un sistema de mortalidad proporcional.

Es claro que estimar la mortalidad natural en un rodal es un tanto difícil, aunque no tanto como estimar la mortalidad debido a disturbios, ya que en ésta intervienen factores ambientales, patológicos o entomológicos, los cuales pueden impactar sobre rodales en cualquier fase de su desarrollo (Drew y Flewelling, 1979). De hecho es uno de los aspectos más difíciles de estimar y menos dignos de confianza, al evaluar crecimiento de rodales, ya que la predicción de muerte de un árbol o grupo de árboles podría no corresponder a la real, por la gran complejidad de los

ecosistemas forestales y la incertidumbre de condiciones futuras (Glover y Hool, 1979).

Por eso, las áreas de muestreo pequeñas, que generalmente se usan para desarrollar algún tipo de información sobre rendimiento, no son eficientes para muestrear mortalidad, debido a su distribución irregular en el espacio y tiempo, por lo que hay problemas de definición para distinguir mortalidad "irregular" de mortalidad regular (Curtis, 1972).

Aún con los inconvenientes que se acaban de mencionar respecto a la predicción de mortalidad, el ajustar este tipo de funciones es de gran ayuda porque se puede tener una idea del número de árboles por unidad de área que se tendrá en un rodal a edades futuras. Al desarrollar este tipo de funciones, deben tomarse en cuenta las siguientes propiedades lógicas (Clutter et al, 1983).

1. Si  $E_2 = E_1$ ,  $N_2$  debe ser igual a  $N_1$ .
2. Para rodales coetáneos, si  $E_2$  es mayor que  $E_1$ ,  $N_2$  debe ser menor o igual que  $N_1$ .
3. Para rodales coetáneos, cuando  $E_2$  toma valores grandes,  $N_2$  debe tender a cero.
4. Si el modelo se usa para predecir  $N_2$  a la edad  $E_2$  y estos a su vez se usan para predecir  $N_3$  a la edad  $E_3$  ( $E_3 > E_2 > E_1$ ), el resultado obtenido debería ser igual al proporcionado por una proyección simple de  $E_1$  a  $E_3$ .

Uno de los modelos que reportan Clutter et al (1983) el cual derivaron como tasa de mortalidad donde supusieron que esta tasa se comportaría como una constante, la expresan simbólicamente como:

$$\frac{\partial N / \partial E}{N} = K \quad (2.12)$$

Donde:

$N$  = número de árboles por unidad de área presentes a la edad  $E$

$\partial N / \partial E$  = tasa de mortalidad instantánea operante a la edad  $E$

$K$  = una constante

La solución de la ecuación (2.12) con la condición inicial de que  $N=N_1$  cuando  $E=E_1$  genera la siguiente ecuación (Clutter et al, 1983):

$$N_2 = N_1 e^{K(E_2 - E_1)} \quad (2.13)$$

Este modelo es apropiado para poblaciones donde la tasa de mortalidad proporcional es constante para todas las edades, índices de sitio e índices de densidad del rodal, por lo que los mismos autores presentan la siguiente expresión donde la tasa de mortalidad la relacionan con la edad y el índice de sitio.

$$\frac{\partial N / \partial E}{N} = \beta_0 + \beta_1 E^{-1} + \beta_3 S \quad (2.14)$$

Integrando esta expresión quedaría:

$$N_2 = N_1 \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\beta_1} \exp \left[ (\beta_0 + \beta_3 S) (E_2 - E_1) \right] \quad (2.15)$$

Para ajustar estos modelos es necesario contar con datos de remediación de parcelas permanentes, aunque quizá sea posible utilizar datos de parcelas temporales, pero en este caso se debe tener cuidado al calificar un tocón como muerte natural, cuando en realidad pudiera tratarse de una corta clandestina pero que por el paso del tiempo, no lo parece.

### 3. METODOLOGIA.

El trabajo se llevó a cabo en el Campo Experimental Forestal (CEF) San Juan Tetla, Puebla, perteneciente al Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias (INIFAP). Dicho campo se encuentra en la vertiente oriente del volcán Iztaccíhuatl, a 21 Km al Suroeste de San Martín Texmelucan, Puebla (Figura 3.1).

Este campo cuenta con un área experimental de 1,500 ha, en donde existen cuatro asociaciones vegetales principales: *Abies religiosa*, *Pinus hartwegii*, *Pinus ayacahuite* var. *veitchii* y *Pinus montezumae*. De estas asociaciones, la de *P. montezumae* ocupa el segundo lugar en extensión y se localiza en áreas de menor pendiente, con suelos profundos y con mínima cantidad de rocas aflorantes. Su rango altitudinal está entre los 2,700 y 3,400 msnm, aunque en algunos lugares llega a los 3,450 en donde predomina *P. hartwegii* (May, 1971 citado por Rodríguez, 1987).

#### 3.1. AREA ESPECIFICA DE ESTUDIO.

Dentro del campo existe un paraje denominado Plan de Marines de aproximadamente 16 ha (Figura 3.2) el cual consta de 64 parcelas permanentes de 0.25 ha (cuadros de 50 X 50 m). Este lugar podría describirse como un rodal natural maduro, de estructura coetánea, poco perturbado y con una alta densidad. Quizá en este lugar es en donde se han realizado mayor número de trabajos de investigación dentro del campo, debido a que está protegido, ha sido poco perturbado en los últimos años, está cercano a la entrada del campo, se encuentra situado en un lugar relativamente plano y es un rodal puro de *P. montezumae*.

##### 3.1.1. CLIMA.

La mayor parte de la información que se mencionará en este punto se tomó de Garcidueñas (1987). Dentro del campo se

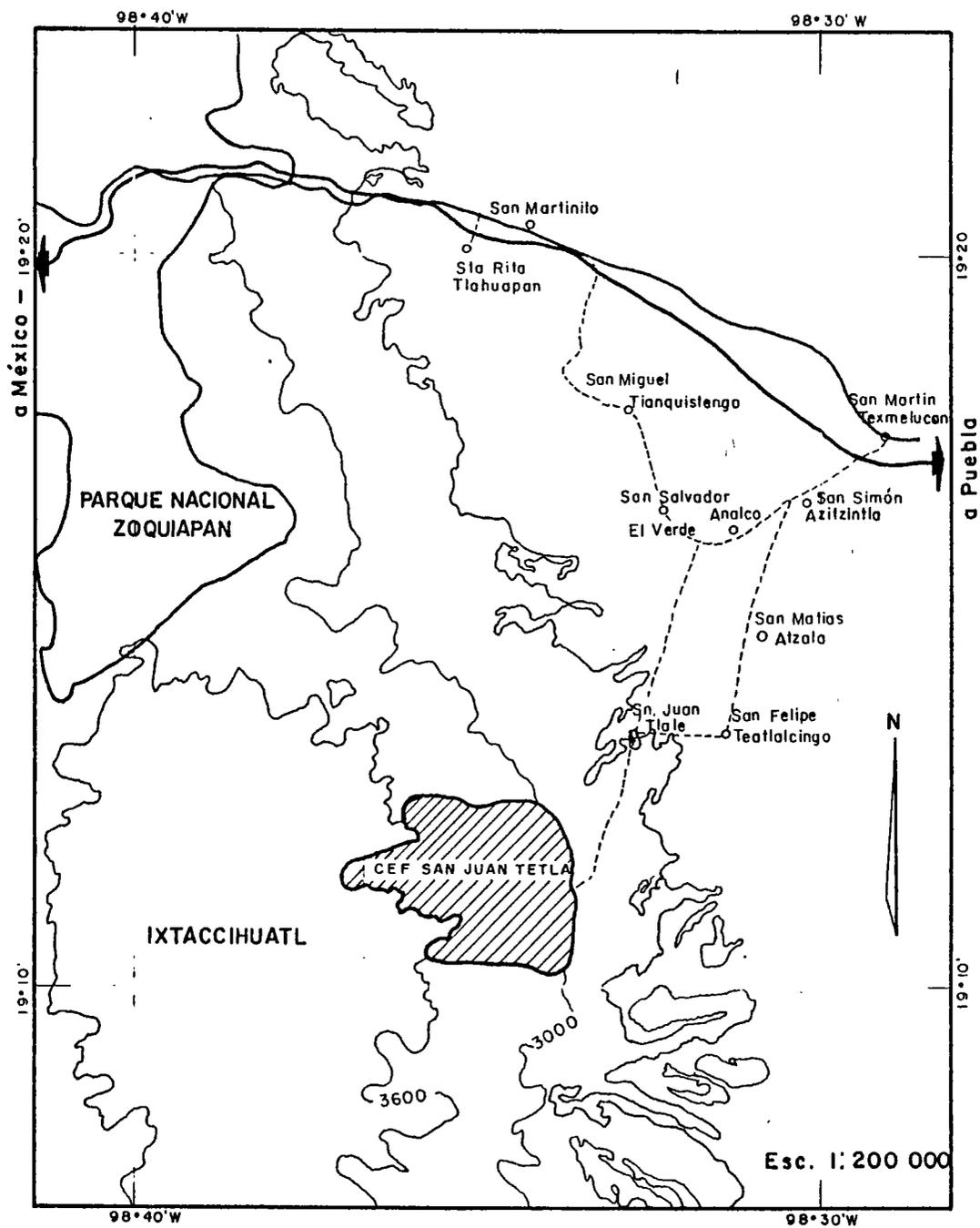


Figura 3.1. Localización del Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Puebla al oriente del volcán Ixtaccihuatl (Tomado de Rodríguez, 1987).

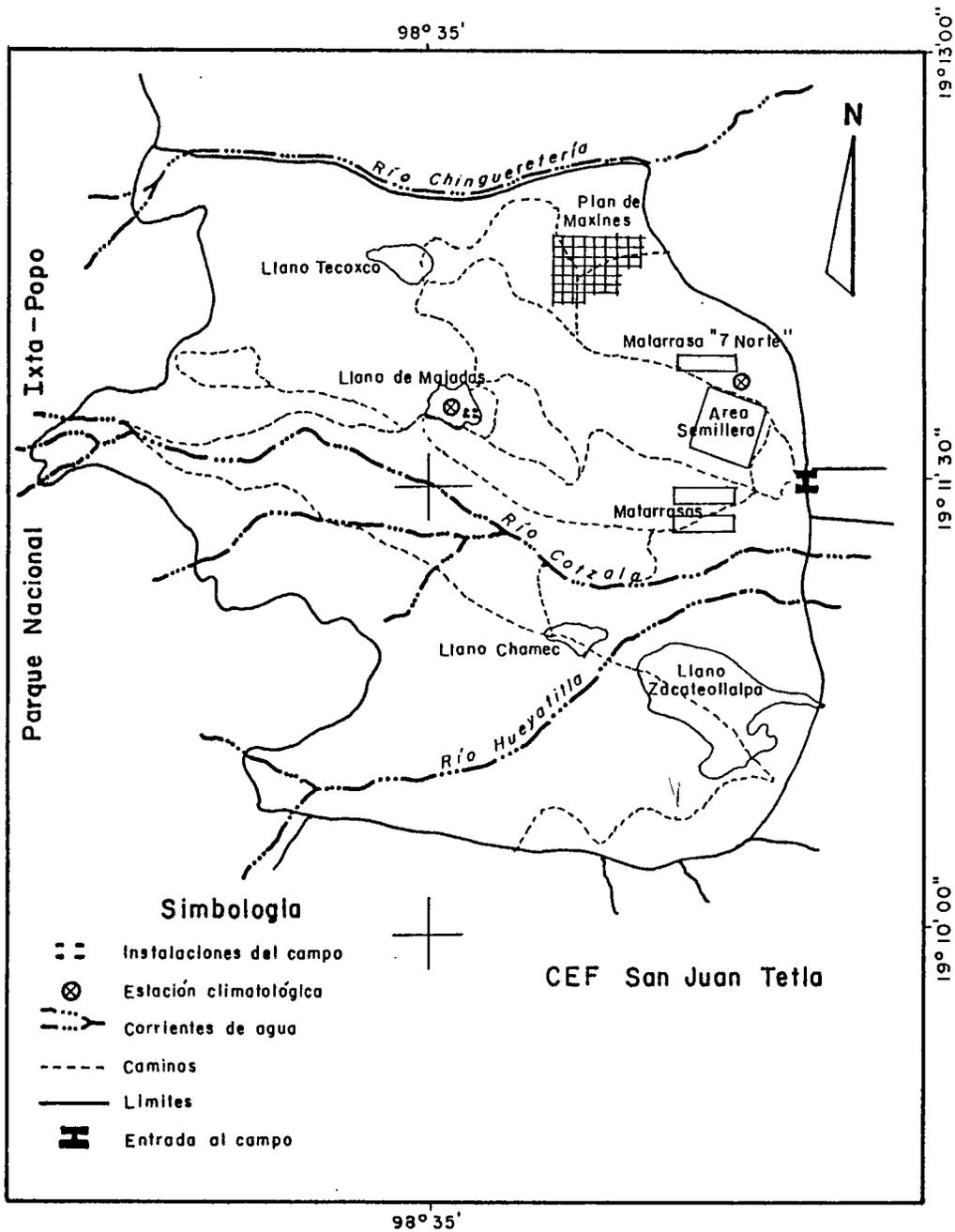


Figura 3.2. Campo Experimental Forestal San Juan Tetla, Puebla (Adaptado de Garcidueñas, 1987).

localizan dos estaciones meteorológicas, una en el Llano de Majadas a una altitud de 3,330 msnm comprendida dentro de la zona ecotonál de *P. hartwegii* y *P. montezumae*, la cual empezó a funcionar en el año de 1966; la otra se encuentra en las inmediaciones del área semillera y de la matarrasa "7 Norte" a una altitud de 3,085 msnm (Figura 3.2), comprendida dentro de la asociación de *P. montezumae*. Esta última estación es la más cercana al área específica de estudio, además de que corresponde al mismo rango altitudinal.

El clima de la estación "7 Norte" pertenece al tipo (Cw) de acuerdo a la clasificación de Köppen, modificada por García (1973) presentando la fórmula climatológica  $C (w^2) (w) (b') (i') g$ , que corresponde a un clima subhúmedo semifrío, con verano fresco largo y lluvioso, con oscilación térmica entre los 5 y 7 °C y pertenece al tipo Ganges, ya que el mes más caliente se presenta antes de junio (Cuadro 3.1).

La temperatura media anual es de 10.7 °C, registrándose los valores más bajos en los meses de enero, febrero y diciembre y los más altos en abril, mayo y junio; la temperatura media del mes más caliente es de 12.9 °C. Por otra parte, la precipitación anual promedio es de 815 mm siendo los meses más lluviosos de junio a septiembre y los más secos, de noviembre a marzo. Presenta una relación p/t (precipitación/temperatura) de la lluvia de verano mayor a 55 y el régimen de lluvias invernales es menor al 5% de la precipitación anual (Cuadro 3.1).

### 3.1.2. VEGETACION.

El estrato arbóreo está constituido básicamente por *P. montezumae*, siguiéndole en importancia *Alnus firmifolia* y *Salix oxilepis*; en forma aislada se observan individuos de *P. teocote*, *P. ayacahuite*, *Abies religiosa*, *Quercus laurina* y *Arbutus glandulosa*.

Cuadro 3.1. Resumen de la información climatológica de la estación "7 Norte" ubicada en el CEF San Juan Tetla, Puebla. (Tomado de Garcidueñas, 1987).

CONCEPTO	DESCRIPCION
Localización	19 <sup>0</sup> 11'49" N y 98 <sup>0</sup> 34'01" W
Altitud (msnm)	3,085
Temperatura media del mes más frío	7.5 °C
Temperatura media del mes más caliente	12.9 °C
Precipitación del mes más seco	3.2 mm
Precipitación del mes más húmedo	156.2 mm
Régimen de lluvias de invierno	< 5 % de la anual
Cociente p/t de lluvia	> 55.0
Literal para régimen de lluvia	w <sup>2</sup>
Formula de clima húmedo seco	C(w <sup>2</sup> ) (w)
Sequía o humedad	Subhúmedo
Grupo de clima templado	Semifrío
Símbolo (condiciones de temperatura)	(b')
Oscilación térmica anual	Entre 5 °C y 7 °C
Símbolo y/o literal (oscilación)	(i')
Marcha anual de temperatura	Tipo Ganges
Símbolo y/o literal (marcha anual)	g
Símbolo y/o literal (tipo clima)	C (w <sup>2</sup> ) (w) (b') (i') g
Tipo de clima	Semifrío subhúmedo

En el estrato arbustivo se presentan las siguientes especies *Salix paradoxa*, *S. oxilepis*, *Simphoricarpus microphyllus*, *Eupatorium glabratum*, *Fueshia sp*, *Senecio cinerarioides* y *S. angulifolius*, principalmente; observándose además *Bacharis sp*, *Buddleia sp*, *Rubus sp*, *Cestrum sp*, *Ribes sp*, entre otras.

En el estrato herbáceo las especies más frecuentes son *Alchemilla procumbens*, *Muhlenbergia sp*, *Archibacharis sp* y *Piptochaetum sp*; encontrándose además otras especies como *Lupinus sp*, *Salvia sp*, *Stachis sp*, *Sterea sp*, *Fragaria sp*, *Galium sp*, entre otras (Garcidueñas, 1987).

### 3.1.3. SUELOS.

De acuerdo a una clasificación de suelos hecha en el CEF por Rodríguez y Ortiz (1982) se identificaron tres series: Serie Marines, Serie Tecoxco, y Serie San Agustín Atzompa. El área de estudio está ubicada en la Serie Marines. Por otra parte, Garcidueñas (1987) realizó un muestreo de suelos en el área de estudio mediante la descripción y análisis de ocho perfiles. Retomando la información de ambas fuentes los suelos podrían describirse como sigue:

Estos suelos pertenecen a los andosoles húmicos, son profundos, predominando la textura migajón arenoso en todos sus horizontes. Presentan un pH de 6.3 y un color predominante café grisáceo oscuro en seco, y de café grisáceo muy oscuro a negro, en húmedo. Estos suelos presentan una capa superficial de acumulación de materia orgánica que se denomina "piso forestal" suprayacente al suelo mineral en el cual Garcidueñas (1987) diferenció tres capas: la L o de litter u hojarasca, F de fermentación y Ho de humus.

El contenido de materia orgánica es de 13 % en el horizonte más superficial y disminuye conforme aumenta la profundidad, también tiene alto contenido de arena en todas sus profundidades y a medida que varía la misma, el contenido de arcilla disminuye; la estructura se presenta en bloques subangulares débilmente desarrollados. Se presentan abundantes raíces finas y medias en las capas superiores, y pocas medias y gruesas a la base del perfil; no existen afloramientos rocosos y los horizontes no

presentan piedras. Estos suelos tienen gran potencial productivo, con alta capacidad de retención de humedad; los suelos de esta serie cubren aproximadamente un 60 % del área ocupada por *P. montezumae*.

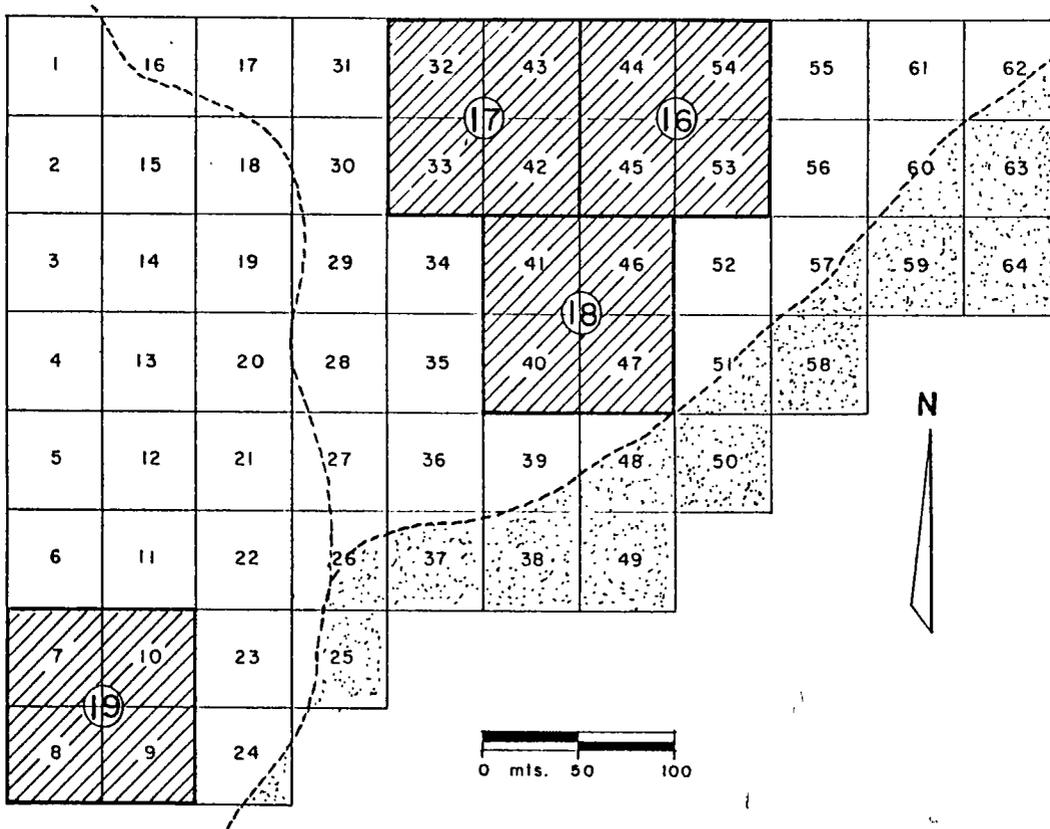
#### 3.1.4. TOPOGRAFIA.

En forma general la topografía del campo varía de plana a muy accidentada. Se presentan varios llanos como los de Zacateotlalpan, Manga, Majadas, Chamec, Tecoxco, etc.. También hay cerros de altura considerable como el Ocotepec que alcanza los 3,840 msnm, así como barrancas primarias de gran profundidad, como las de los ríos Hueyotitla, Chingeretería y Cotzala; este último atravieza el campo en dirección Oeste-Este dividiendolo prácticamente en dos zonas (Figura 3.2): la zona norte que puede considerarse la menos accidentada, ya que presenta algunas cañadas de poca profundidad pero accesibles y la zona sur considerada como la más accidentada, ya que presenta cañadas con profundidades que llegan a los 200 m lo que en ocasiones las hacen inaccesibles por la presencia de acantilados (Garcidueñas, 1987).

Considerando únicamente el área de estudio, puede considerarse como un lugar plano con ligeras ondulaciones principalmente en la parte NW del complejo de parcelas (Figura 3.3), Rodríguez (1987) menciona que las pendientes en este lugar varían desde 0 hasta 40 %.

#### 3.2. BASE DE DATOS.

En el paraje denominado Plan de Marines (Figura 3.3), en donde están ubicadas las 64 parcelas, motivo de estudio del presente trabajo, desde 1974 se han realizado tres mediciones del arbolado en pie. La primera medición se efectuó en ese año, por parte del personal del Instituto Nacional de Investigaciones Forestales (INIF), con la finalidad de llevar a cabo un proyecto



### Plan de Marines

- Caminos
- ▨ Sitios permanentes de Investigación silvícola ( SPIS )
- ▤ Area quemada en primavera de 1989

Figura 3.3. Distribución de las parcelas y ubicación de los SPIS en el paraje denominado "Plan de Marines" del CEF San Juan Tetla, Puebla.

de investigación sobre cortas de regeneración; en la cual cada árbol se ubicó por rumbo y distancia a partir del centro de cada parcela, se identificó con un número progresivo y se le tomaron las siguientes mediciones:

- DIAMETRO NORMAL (DN) en cm
- ALTURA TOTAL (H) en m
- ALTURA DE FUSTE LIMPIO (HFL) en m (sólo en coníferas)
- DIAMETRO MAXIMO DE COPA en dos direcciones, Norte-Sur (CNS) y Este-Oeste (CEO) en m

Además, a las coníferas se les tomaron variables clasificatorias como:

-CLASE (dominancia de cada individuo en cuatro clasificaciones: dominante, codominante, dominado y suprimido).

-CONFORMACION DEL FUSTE (en escala del 1 al 2 para indicar el grado de verticalidad y rectitud; y en escala de 1 a 3 para indicar la bifurcación del fuste).

-CONFORMACION DE COPA (en escala de 1 a 4 para indicar la condición de la copa en: muy defectuosa, mal distribuida, estrecha y bien distribuida).

-VIGOR (en escala de 1 a 4 para describir el grado de vitalidad de cada individuo en: muy pobre, pobre, bueno y óptimo).

-CONDICION DE DAÑO respecto a OCOTEADO, QUEMADO, RAYADO Y PLAGADO (en escala de 1 a 4 para describir el grado del daño en: sano, poco, regular y demasiado).

Dicha información constituye la base principal inicial de los datos con que se realizó el presente trabajo.

La segunda medición se realizó en 1981 también por personal del INIF, como parte de un trabajo sobre sitios permanentes de investigación silvícola (SPIS) desarrollado por el mismo Instituto. Dicha información se realizó sólo en 16 parcelas (4 sitios de 4 parcelas cada uno) (Figura 3.3), la cual se utilizó sólo en forma complementaria para desarrollar algunas funciones como la estimación del grosor de corteza, a partir del diámetro normal. Las variables que se midieron de cada árbol fueron las siguientes:

- ESPECIE
- DIAMETRO NORMAL en cm
- DIAMETRO DEL TOCON en cm
- GROSOR DE CORTEZA en mm
- ALTURA TOTAL en m
- ALTURA DE FUSTE LIMPIO en m
- INCREMENTO EN 5 ANILLOS en mm
- INCREMENTO EN 10 ANILLOS en mm
- INCREMENTO EN 15 ANILLOS en mm
- TIEMPO DE PASO
- EDAD en años
- UBICACION DEL ARBOL, PROYECCION EN X
- UBICACION DEL ARBOL, PROYECCION EN Y
- PROYECCION DE COPA LADO NORTE en m
- PROYECCION DE COPA LADO SUR en m
- PROYECCION DE COPA LADO ESTE en m
- PROYECCION DE COPA LADO OESTE en m

Además se midieron otras variables cualitativas para determinar la condición del individuo en cuanto a su vitalidad, el estrato al que pertenecía, su dominancia y su tendencia dinámica.

La tercera medición se llevó a cabo a finales de 1989 y principios de 1990, en la cual se volvieron a medir las mismas variables que en la primera medición, a excepción de la ubicación de cada árbol. De tal manera que con la información recabada en

1974 y 1989-90, se realizaron los ajustes para los modelos de predicción del crecimiento para *P. montezumae* Lamb.

En la segunda medición se determinó la variable edad (E), sólo en 16 parcelas. Para medirla en la tercera; se utilizó una muestra aproximada de 10 árboles por parcela, elegidos en forma selectiva, cuidando que fueran árboles sanos, dominantes o codominantes, no bifurcados y que fueran representativos de la altura promedio de cada parcela.

Es muy posible que por errores o inconsistencia de medición (ya que el personal que participó en ambas mediciones fue diferente), se tengan incrementos en diámetro o en altura, negativos, lo cual es imposible que suceda, aunque podría darse el caso que algunos árboles se despunten y entonces la altura medida en la primera medición podría ser mayor a la altura de la segunda, para ese árbol en particular. Por lo tanto, se verificaron los datos de los árboles que presentaron dicha incongruencia; si el error se cometió en la última medición, se corrigió; pero si éste se cometió en la primera, se procedió a estimarlos en base a la segunda medición por medio de una regresión lineal simple.

### 3.3. CONDICIONES ACTUALES DEL AREA DE ESTUDIO.

En el Cuadro (3.2) se resumen los datos promedio de las 64 parcelas. Existe un promedio de aproximadamente 540 m<sup>3</sup>/ha de volumen de *P. montezumae*, del cual poco más del 95 % pertenece a arbolado dominante y codominante. También se consideraron algunos árboles de *Arbutus glandulosa*, *Pinus teocote* y *P. ayacahuite* var *veitchii*.

Por otra parte el área cuenta con aproximadamente 20 m<sup>3</sup>/ha de volumen de hojosas, del cual poco más del 80 % pertenece a *Alnus firmifolia* y el resto a *Quercus laurina*.

Cuadro 3.2. Datos promedio de las 64 parcelas de Plan de Marines del CEF San Juan Tetla, Puebla. Masa de 85 años de edad y con índice de sitio promedio de 28.5 m a la edad base de 60 años.

ESPECIE	CLASE	No. ARB. POR ha	DN (cm)	H (m)	AB m <sup>2</sup> /ha	VOL m <sup>3</sup> /ha
<i>P. montezumae</i>	Suprimido	9	23.5	18.1	0.603	6.452
"	Dominado	29	26.8	18.4	1.454	14.340
"	Codominante	46	44.3	31.4	7.416	102.828
"	Dominante	85	63.6	35.7	27.795	417.701
TOTAL		169			37.268	539.321
<i>Alnus firmifolia</i>		63.5	20.2	9.6	2.297	15.930
<i>Quercus laurina</i>		6.3	28.2	16.5	0.447	3.896
<i>Arbutus glandulosa</i>		INAP.*	17.6	11.2	0.003	---
<i>P. teocote</i>		INAP.	62.7	22.4	0.124	---
<i>P. ayacahuite</i> var. <i>veitchii</i>		INAP.	50.2	24.6	0.116	---
TOTAL		70.7			2.987	19.826

\*INAP=Cifra inapreciable.

La regeneración del *P. montezumae* es prácticamente nula. Sin embargo, sí hay regeneración de otras especies como *P. ayacahuite* y *Abies religiosa* y de hojosas como *Q. laurina* y especies arbustivas, aunque escasa en todos los casos. Rzedowski et al (1986) mencionan que a partir de que el campo fue establecido por el INIF, se evitaron los incendios y el pastoreo. Sin embargo, la porción del bosque de *P. montezumae* que queda dentro del campo no presenta regeneración natural o ésta es muy escasa, pero en cambio, puede observarse una invasión de renuevo de *Abies religiosa* y *P. ayacahuite* var. *veitchii* a partir de las comunidades cercanas dominadas por estas dos especies, de tal manera que si esta tendencia sigue manifestándose y no ocurre ninguna intervención humana, con el tiempo, el actual bosque de *P. montezumae* puede llegar a ser reemplazado por cualquiera de las dos especies mencionadas.

El viento ha ocasionado la muerte de algunos árboles dominantes y codominantes, y en otros la muerte ha ocurrido por causas no determinadas. En el área también se pueden apreciar algunos árboles despuntados, puntisecos, rayados, algo quemados y ocoteados.

Respecto a las hojosas, específicamente *A. firmifolia*, existe mucha mortandad y los individuos que permanecen vivos presentan incrementos muy bajos tanto en diámetro normal como en altura, de tal manera que la mayoría de los árboles de ésta especie se encuentran suprimidos. Por otra parte *Q. laurina* sí presenta incrementos altos, carece de mortalidad, y por el contrario existe algo de regeneración.

Cabe señalar que en las parcelas 11, 12, 21 y 22 (Figura 3.3) existe una plantación de *P. ayacahuite* de aproximadamente 12 años de edad y con una densidad de plantación de aproximadamente 4,500 plantas/ha, la altura media de éstas es de entre 3 y 5 metros.

En primavera de 1989 ocurrió un incendio forestal que quemó parte del campo y también parte del área de estudio, en total se quemaron ocho parcelas completas y parte de otras ocho (Figura 3.3), es probable que algunos árboles suprimidos y dominados hayan muerto por efecto del incendio, pero ninguno dominante o codominante; también murieron varios árboles de hojosas principalmete de *A. firmifolia* y de especies arbustivas.

#### 3.4. ESTIMACION DEL VOLUMEN.

Para estimar el volumen individual de *P. montezumae* se utilizó un modelo ajustado por Rodríguez y Moreno (1982) con datos de análisis troncales de árboles del CEF San Juan Tetla, Puebla; el modelo ajustado fue el que (Clutter et al, 1983) llaman logarítmico:

$$\ln (V) = -9.2036083 + 1.886638 \ln (DN_{sc}) + 0.845361 \ln (H) \quad (3.1)$$

Donde:

V = volumen en m<sup>3</sup>/ha

DN<sub>sc</sub> = diámetro normal sin corteza en cm

H = altura en m

ln = logaritmo natural

El modelo predice el volumen sin corteza a partir del DN sin corteza y la altura total de cada individuo. Por lo anterior, se decidió hacer las predicciones de crecimiento y rendimiento para volumen sin corteza.

Puesto que en la toma de datos no se determinó la variable grosor de corteza, fue necesario ajustar un modelo de grosor de corteza (GC) en función del DN con corteza (DN<sub>cc</sub>) (i. e. GC=f(DN<sub>cc</sub>)) con esta función se pudo estimar el DN sin corteza, para calcular el volumen individual. Para ajustar este modelo se utilizaron datos de los SPIS que se midieron en 1981 (Figura 3.3), en los cuales sí se contempló la medición de GC y DN. Con estos dos modelos (el de volumen y el de GC) se siguió la secuela de la Figura (3.4) para determinar el volumen individual de *P. montezumae*.

Para determinar los volúmenes de *A. firmifolia* y *Q. laurina*, se utilizaron los modelos ajustados por la UIEF San Rafael los cuales son (Garcidueñas, 1987):

$$V = 0.022944 + 0.0004335 DN^2 + 0.0000054 (DN^2 * H) \quad (3.3)$$

para *A. firmifolia* y:

$$V = 0.08149793 - 0.00006883 DN^2 + 0.00002729 (DN^2 * H) \quad (3.4)$$

para *Q. laurina*.

Respecto a las demás especies como *Arbutus glandulosa*, *P. teocote* y *P. ayacahuite*, no se utilizó ningún modelo para el

cálculo del volumen, debido a que existen muy pocos árboles y su volumen sería casi inapreciable.

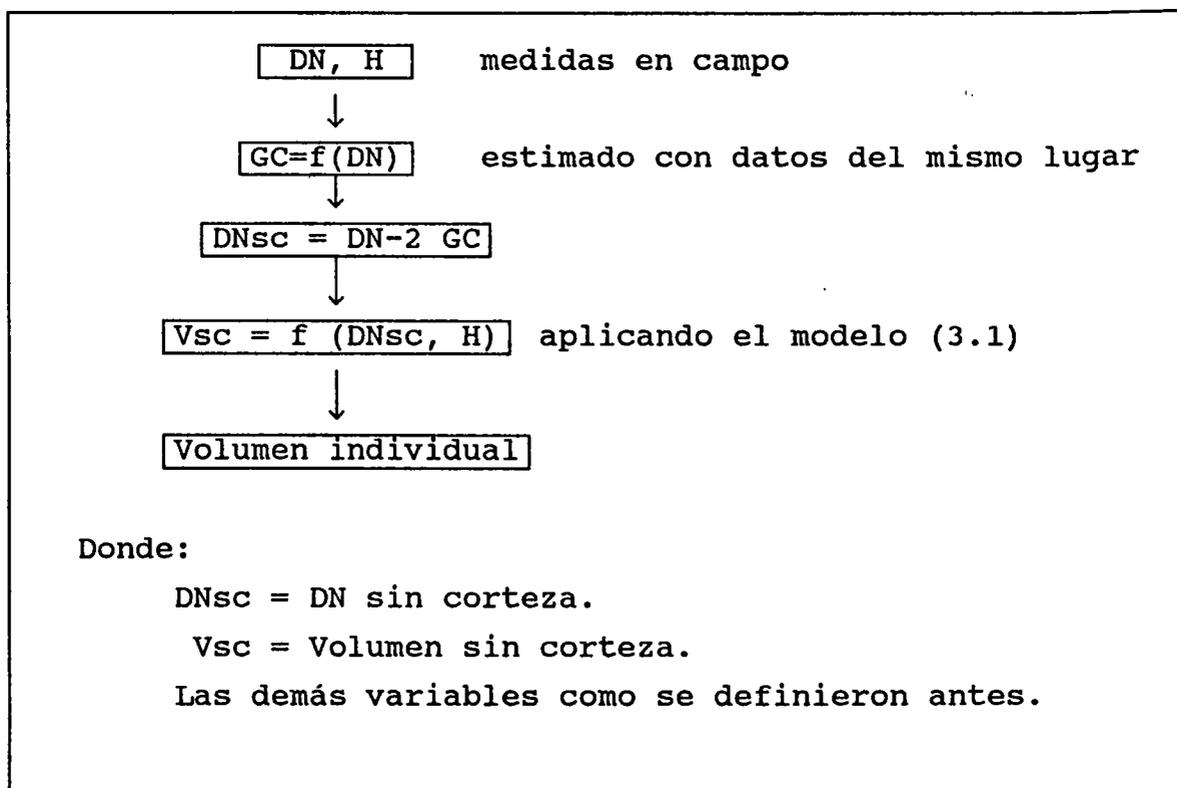


Figura 3.4. Secuela seguida para determinar el volumen individual de *P. montezumae*.

### 3.5. ESTIMACION DE INDICE DE SITIO.

Para ajustar la ecuación que determina el índice de sitio (IS) de cada parcela, se utilizaron también los datos de los análisis troncales que realizó Rodríguez (1980) en el CEF San Juan Tetla, a esos datos se les agregaron los de edad-altura que se obtuvieron en las 64 parcelas, cuando se midió la edad en la tercera medición.

Con esta base de datos se decidió utilizar el modelo de Chapman-Richards y ajustarlo por el método de la diferencia algebraica en su formulación polimórfica. Se utilizó este modelo porque en algunos trabajos que se han desarrollado recientemente para ajustar curvas de IS, ha presentado buenos ajustes (Fierros, 1989; Bojorges, 1990 y Guerra, 1990). De hecho el último autor, al hacer pruebas de validación de diferentes modelos que utilizó, concluyó que fue uno de los dos modelos que obtuvieron mejores resultados en dicha prueba.

Para obtener la formulación polimórfica, se parte de la expresión (2.3) siguiente:

$$H = e_1 [1 - \exp(-\theta_2 E)]^{\theta_3}$$

Donde ya se definieron cada una de las variables, en seguida suponemos  $\theta_3$  específico para un sitio y los otros dos parámetros comunes para todos los sitios. Con esta suposición cada curva de IS describe su propia tasa de crecimiento, mientras el parámetro asintótico ( $e_1$ ) es común para todas.

Para dos mediciones hechas en el mismo individuo se tendrían las siguientes expresiones:

$$H_1 = e_1 [1 - \exp(-\theta_2 E_1)]^{\theta_{31}} \quad H_2 = e_1 [1 - \exp(-\theta_2 E_2)]^{\theta_{31}}$$

Al transformar en base de logaritmos naturales en ambos miembros de las dos ecuaciones y despejar  $\theta_{31}$  queda:

$$\theta_{31} = \frac{\ln(H_1/e_1)}{\ln[1 - \exp(-\theta_2 E_1)]} \quad \theta_{31} = \frac{\ln(H_2/e_1)}{\ln[1 - \exp(-\theta_2 E_2)]}$$

Igualando ambas expresiones y resolviendo para  $H_2$  se tiene:

$$H_2 = e_1 \left( 1 - e^{e_2 E_2} \right) \left[ \frac{\ln (H_1/e_1)}{\ln (1 - e^{-e_2 E_1})} \right] \quad (3.5)$$

Esta expresión se ajustó por mínimos cuadrados como modelo de regresión no lineal. Para realizar el ajuste se utilizó el paquete estadístico SAS, con el procedimiento NLIN y el método MARDQUARDT.

### 3.6. ESTIMACION DEL INDICE DE DENSIDAD.

Para determinar el índice de densidad de cada parcela, se utilizó la fórmula de índice de densidad del rodal (IDR). Para lo cual primero se ajustó la expresión (2.5) como modelo de regresión lineal simple por mínimos cuadrados con datos de las parcelas de mayor área basal. Después el parámetro  $\beta$  se sustituyó en la expresión (2.7) y se obtuvo el IDR, sustituyendo el número de árboles y  $D_{\bar{q}}$  para cada parcela. Cabe hacer la aclaración que no se realizaron correcciones por usar la transformación logarítmica.

### 3.7. PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO USANDO MODELOS DE TOTALIDAD DEL RODAL O DE PREDICCIÓN EXPLÍCITA.

Para predecir el rendimiento corriente se usó la fórmula básica del modelo de Schumacher (2.8) en donde se utilizó como variables independientes el IS, altura dominante, área basal, con y sin corteza, IDR, número de árboles por ha y edad. En ocasiones se usaron algunas transformaciones en estas variables con el fin de lograr un mejor ajuste en el modelo.

Para predecir el rendimiento futuro, también se ajustó la forma básica del modelo de Schumacher (2.8), utilizando el modelo de rendimiento desarrollado por Bennett (1970b), citado por Clutter et al, (1983) para rodales naturales de *Pinus elliottii*.

Además, en la parte de la ecuación que incluye la función de densidad, se estimó a la edad de proyección con la expresión (2.9), de esta forma se ajustó el siguiente modelo:

$$\ln (V_2) = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 E^{-1} + \beta_3 \left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right) + \beta_4 \left(\frac{E_1}{E_2}\right) \ln (AB_1) \quad (3.6)$$

Donde:

$V_2$  = volumen en m<sup>3</sup>/ha predicho a la edad  $E_2$

IS = índice de sitio

$E_1$  = edad inicial

$E_2$  = edad actual

$AB_1$  = área basal presente

ln = logaritmo natural

También se ajustó el modelo que inicialmente desarrolló Clutter (1963) y posteriormente Sullivan y Clutter (1972) y que se muestra en la expresión (2.11). Al igual que para predecir el rendimiento corriente, se incluyeron algunas transformaciones de las variables independientes con el fin de lograr mejores ajustes o para evitar violar los supuestos en que se fundamentan los modelos de regresión.

### 3.8. PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO USANDO MODELOS DE CLASES DIAMÉTRICAS O DE PREDICCIÓN IMPLÍCITA.

#### 3.8.1. DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS.

Primeramente se estimaron las distribuciones diamétricas de cada parcela para la primera y tercera medición, mediante la función de distribución Weibull (2.13). Este procedimiento consiste en estimar los parámetros de esta distribución de acuerdo a la distribución diamétrica que tiene cada parcela, y por cualquiera de los métodos que se describieron antes. Una vez que se obtiene el juego de los tres parámetros "a", "b" y "c" de la fdW, se procede a calcular las frecuencias por clases de

diámetros por medio de integrar la función Weibull y tomando en cuenta los límites inferior y superior de cada categoría, así se obtiene la siguiente expresión:

$$P (I < X < S) = \exp \left[ - \left( \frac{I - a}{b} \right)^c \right] - \exp \left[ - \left( \frac{S - a}{b} \right)^c \right] \quad (3.7)$$

Donde:

I = valor inferior de la categoría diamétrica (X)

S = valor superior de la categoría diamétrica (X)

X = categoría diamétrica

P = proporción de probabilidad para cada categoría diamétrica.

Una vez que se obtiene la proporción para cada categoría diamétrica, esta se multiplica por el número de árboles por hectárea que contiene cada parcela para obtener la frecuencia del número de árboles en cada categoría.

Para el caso de este estudio se usaron categorías diamétricas de 5 cm. El procedimiento que se siguió para estimar los parámetros de la función Weibull, se basó en diferentes métodos, debido a que se utilizó un programa escrito en FORTRAN llamado WEIBULL desarrollado por Torres (1987). Este programa estima los parámetros de la Weibull para cada parcela por ocho métodos de estimación de percentiles, cinco de máxima verosimilitud y tres por análisis de regresión no lineal. Las bases teóricas para cada uno de los métodos utilizados en este paquete, fueron descritas por el mismo autor.

El programa Weibull, también proporciona el promedio, la desviación standard y la varianza para el DN observado; el número total de observaciones, DN mayor, DN menor y el área y número de parcela. Después proporciona los parámetros estimados por los diferentes métodos de acuerdo al procedimiento de estimación (i.e. por percentiles, máxima verosimilitud y regresión no

lineal); el valor calculado para las pruebas de ajuste de Kolmogorov-Smirnov y Ji-cuadrada, y el valor estimado del DN.

De esta manera, ambas pruebas de ajuste, así como la diferencia entre el DN observado y predicho sirvieron de base para seleccionar en primer lugar; las parcelas que después se utilizaron para estimar los parámetros de la Weibull de acuerdo a las características del rodal, y en segundo lugar para seleccionar el mejor juego de parámetros de la Weibull que define la distribución diamétrica de cada parcela.

### 3.8.2. SELECCION DE LA MUESTRA (PARCELAS) PARA AJUSTAR LOS PARAMETROS "a", "b" Y "c" DE LA FUNCIÓN WEIBULL CON CARACTERISTICAS DEL RODAL.

Para determinar las parcelas que mejor ajuste tuvieron se determinó un nivel de significancia de 0.95 para las dos pruebas de ajuste. De esta manera se eliminaron 23 parcelas de la muestra. Cuando alguna de las parcelas mostró buen ajuste sólo en una de sus mediciones, esta se eliminó, debido a que para hacer las proyecciones de las variables es necesario contar con las dos mediciones hechas en diferente período de tiempo.

### 3.8.3. PROYECCION DE VARIABLES PARA ESTIMAR LOS PARAMETROS DE LA WEIBULL.

Se proyectaron las variables área basal, DN,  $D_{\frac{1}{q}}$ , IDR, por medio de modelos de regresión lineal múltiple. La forma básica que se utilizó fue la siguiente.

$$Vp_2 = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln (Vp_1) + \beta_2 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (3.8)$$

Donde:

$Vp_2$  = variable a proyectar a la edad  $E_2$

$Vp_1$  = variable a proyectar a la edad  $E_1$

$E_1$  y  $E_2$  = edades inicial y final en el periodo de  
proyección

$\ln$  = logaritmo natural

$\beta_i$  = parámetros a estimar para  $i=0,1,2$

#### 3.8.4. FUNCION DE MORTALIDAD.

Como otra variable a proyectar, fue necesario contar con el número de árboles por hectárea ( $N_2$ ) a la edad  $E_2$ , de esta forma, aunque también se utilizó la forma básica para proyectar variables (expresión 3.8), se probaron algunas otras como las funciones (2.13) y (2.15), con ligeras modificaciones para tratar de lograr mejores ajustes.

#### 3.8.5. ECUACIONES QUE ESTIMAN "a", "b" Y "c" DE LA FUNCION WEIBULL.

La ventaja de utilizar el programa WEIBULL, aparte de la rapidez para estimar los parámetros, proporciona 15 juegos de éstos, de los cuales; la mayoría describe la misma distribución aunque con diferente grado de ajuste y con diferente curva, ya que cada método está fundamentado en diferentes propiedades estadísticas (Torres, 1987).

Se ajustaron modelos de regresión lineal múltiple para estimar los parámetros, en donde la variable dependiente fue cualesquiera de los parámetros de la Weibull, y las variables independientes fueron área basal, diámetro normal, diámetro cuadrático, número de árboles por ha, índice de sitio y edad. El criterio para seleccionar el mejor modelo para estimar cada parámetro de la Weibull, fue el coeficiente de determinación ( $R^2$ ), el valor de F y el cuadrado medio del error, sin descuidar

los valores obtenidos para el estadístico Durbin-Watson y la distribución de errores.

Cabe aclarar que se utilizaron transformaciones de variables independientes o combinaciones de éstas, con el fin de lograr mejores ajustes. Además, se utilizaron los juegos de parámetros que mejor ajustaron a las condiciones de las parcelas, con el fin de que si en alguna observación el valor del residual se disparaba, se utilizó otro juego de éstos (cuidando de no mezclar parámetros obtenidos por diferente método). Al realizar esta operación, había la posibilidad de afectar el ajuste de otro parámetro. Por ejemplo, si se estaba ajustando un modelo para estimar el parámetro "a" y en alguna observación, el residual se disparaba, se utilizaba otro juego de parámetros; al efectuar dicho cambio posiblemente el residual de esa observación ya no se disparaba pero al hacer el ajuste, por ejemplo, para el parámetro "b", éste se podría ver afectado a favor o en contra del ajuste.

#### 3.8.6. FUNCION DE ALTURA.

Es necesario contar con una función de altura, para que una vez que se tienen las frecuencias por cada categoría diamétrica, se pueda calcular su volumen, ya que casi todos los modelos que estiman el volumen de árboles individuales depende del DN y la altura. En este caso la variable altura debe estar en función del DN, IS, área basal y edad para que se logre una buena estimación por parcela.

#### 3.9. VALIDACION DE LOS MODELOS.

Para validar los modelos que se generaron en este trabajo, se seleccionaron aleatoriamente cuatro parcelas, las cuales no participaron en ningún ajuste de los modelos. Las parcelas seleccionadas fueron 11, 19, 50 y 63, se decidió este número porque después de eliminar las parcelas que no presentaron

ajustes satisfactorios, quedaron 41 para ajustar las funciones que estiman los parámetros de la Weibull con características del rodal; si se desea obtener una muestra aproximada del 10 % para validar los modelos, se requirieron cuatro parcelas.

Para hacer la validación se siguió el procedimiento descrito por Knoebel et al (1986) citado por Torres (1987) el cual calcula el valor de  $R^2$  por medio de la siguiente expresión:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (3.9)$$

Donde:

$$r_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$Y_i$  = valor i-ésimo observado de la variable dependiente

$\hat{Y}_i$  = valor i-ésimo predicho de la variable dependiente

$\bar{Y}$  = valor promedio de la variable dependiente

También se calculó el valor de  $t$  para comparar dos poblaciones. Con estas dos pruebas y con los resultados de los ajustes para cada modelo, se usaron como criterio para seleccionar los modelos de crecimiento y rendimiento para *P. montezumae*.

## 4. RESULTADOS Y DISCUSION.

### 4.1. CORRECCION DE ERRORES EN LA BASE DE DATOS.

Como se mencionó anteriormente, para subsanar los errores que pudieron haberse cometido durante la primera medición, fue necesario utilizar un modelo de regresión lineal simple para estimar el dato de la primera medición en función de la segunda, de esta forma se ajustaron dos modelos; uno para estimar el DN y otro para la H. Los ajustes se efectuaron con los datos que en apariencia no presentaron problemas; los modelos resultantes son los siguientes:

$$H_1 = -2.7908 + 0.9637744 H_2 \quad \begin{array}{l} r^2 = 0.929 \\ \sigma^2 = 4.7 \\ n = 2599 \end{array} \quad (4.1)$$

$$\begin{array}{ccc} (0.16875) & (0.00527) & \\ (0.0001) & (0.00000) & \end{array}$$

$$DN_1 = -1.202895 + 0.901556 DN_2 \quad \begin{array}{l} r^2 = 0.974 \\ \sigma^2 = 7.76 \\ n = 2599 \end{array} \quad (4.2)$$

$$\begin{array}{ccc} (0.15514) & (0.00290) & \\ (0.0001) & (0.00000) & \end{array}$$

$H_1$  y  $DN_1$  corresponden a la altura y diámetro normal respectivamente, medidos en la primera medición.  $H_2$  y  $DN_2$  son las mismas variables medidas en la tercera medición.

---

\* / De todos los modelos que se ajustaron en el presente trabajo, no se incluyó el cuadro correspondiente al análisis de varianza, en su lugar, se incluyó en el mismo modelo los valores del error estandar de cada parámetro y su nivel de significancia, la varianza del modelo ( $\sigma^2$ ), el coeficiente de determinación ( $r^2$ ) y el número de muestras que participaron en el ajuste de cada modelo (n). El formato que se siguió en todos estos fue el siguiente.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p \quad \begin{array}{l} r^2 = ? \\ \sigma^2 = ? \\ n = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (E. Std.) & (E. Std.) & (E. Std.) \\ (N. S.) & (N. S.) & (N. S.) \end{array}$$

Donde:

$Y$  = variable dependiente

$X_1$  = variables independientes

$\beta_1$  = parámetros del modelo

E. std. = error standard de cada parámetro

N. s. = nivel de significancia.

Con estos modelos (los cuales presentaron buenos ajustes) se procedió a estimar los datos de la primera medición que presentaron incongruencias (i.e.  $DN_1 > DN_2$  ó  $H_1 > H_2$ ) y que nuevamente se verificaron para asegurar que el error no se hubiera cometido en la tercera medición. De esta manera, se modificaron aproximadamente un 3.3 % de los datos de todas las parcelas para DN y un 12 % para altura. Una vez que se realizaron las modificaciones pertinentes y que se verificó que no hubiera más incongruencias (comparando la primera y tercera mediciones) esos archivos constituyeron la base de datos para generar los modelos de crecimiento.

#### 4.2. CALCULO DEL VOLUMEN.

Puesto que se optó por utilizar el modelo (3.1) que ajustaron Rodríguez y Moreno (1982) el cual estima el volumen sin corteza en función del DN sin corteza, y además en la base de datos no se contempló medir el GC, fue necesario ajustar un modelo para estimar éste en función del DN.

Después de probar el ajuste con varios modelos (lineal simple con y sin interceptada, lineal múltiple elevando la variable independiente a la segunda potencia y lineal simple con transformaciones logarítmicas en las variables, con y sin interceptada), se optó por utilizar el modelo donde se hicieron las transformaciones logarítmicas ya que éste presentó mejor ajuste y además en la gráfica de residuales contra predichos no se observaron aparentes problemas de heterocedasticidad ni problemas de estar ajustando un modelo equivocado. El modelo ajustado es el siguiente:

$$\ln (GC) = 1.306831 + 0.557899 \ln (DN) \quad \begin{array}{l} r^2 = 0.666 \\ \sigma^2 = 0.0599 \\ n = 522 \end{array} \quad (4.3)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0.06353 \\ 0.0001 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.01734 \\ 0.0001 \end{pmatrix} \end{array}$$

En el cual se obtuvo un ajuste de  $r^2 = 0.665$ , dicho ajuste en apariencia es bajo, sin embargo, debe tomarse en cuenta que la

variable GC presenta una alta variación, además los errores que se cometen al medirla se suman a ésta, por lo que en realidad puede decirse que es un buen ajuste.

Con los modelos (3.1) y (4.3) fue posible estimar el volumen sin corteza individual siguiendo la secuela del diagrama descrito en la Figura (3.4).

Para determinar el volumen de *Alnus firmifolia* y *Quercus laurina*, se utilizaron los modelos (3.3) y (3.4) respectivamente. Para las demás especies presentes en el área como *P. ayacahuite*, *P. teocote*, y *Arbutus glandulosa* no se estimó su volumen porque sería inapreciable.

En el Cuadro 1 del Apéndice, se presentan las estadísticas básicas de las variables para las dos mediciones que se realizaron en las 64 parcelas. Para la primera medición se obtuvo un volumen mínimo de aproximadamente 214 m<sup>3</sup>/ha, un máximo de 478 y un promedio de 341 aproximadamente en toda el área de estudio. Para la tercera, se obtuvo un mínimo de 293 m<sup>3</sup>/ha, máximo de 648 y un promedio de 469 aproximadamente. Al comparar estas dos mediciones, se observó un rendimiento promedio de 128 m<sup>3</sup>/ha en 15 años, lo que da un rendimiento promedio anual de 8.5 m<sup>3</sup>/ha/año.

#### 4.3. MODELO DE CRECIMIENTO EN ALTURA.

Para estimar el índice de sitio (IS) se usó el modelo de Chapman-Richards en su formulación polimórfica (3.5) el cual se ajustó por el método de la diferencia algebraica. Cabe señalar que se intentó ajustar el modelo con los datos de los árboles que se les determinó la edad, ya que se tenían dos edades con sus respectivas alturas; sin embargo, el problema principal fue que las edades de estos árboles variaban desde 45 hasta poco más de 100 años por lo que se requería tener representaciones de edades más jóvenes. Entonces se intentó usar los datos del análisis troncal que realizó Rodríguez (1982). Aquí el problema fue que la

edad máxima a que se hace referencia son 70 años, y al ajustar el modelo, el parámetro asintótico mostraba un valor muy bajo con respecto a la altura máxima real que se tenía en los árboles de las parcelas.

Finalmente se optó por mezclar ambas bases de datos y ajustar el modelo, lo que dió resultados congruentes y con buenos ajustes. El modelo ajustado es el siguiente:

$$H_2 = 42.617725 \left( 1 - e^{-0.031214 E_2} \right) \left[ \frac{\ln (H_1 / 42.617725)}{\ln (1 - e^{-0.031214 E_1})} \right] \quad (4.4)$$

$\left( \begin{smallmatrix} 0.38673 \\ \text{-----} \end{smallmatrix} \right) \quad \left( \begin{smallmatrix} 0.00100 \\ \text{-----} \end{smallmatrix} \right) \quad \begin{matrix} r^2 = 0.955 \\ \sigma^2 = 3.535 \\ n = 1266 \end{matrix}$

Donde:

- $H_1$  = altura dominante medida a la edad  $E_1$
- $H_2$  = altura dominante medida a la edad  $E_2$
- $\ln$  = logaritmo natural
- $e$  = base de los logaritmos neperianos

En este modelo se puede observar que se obtuvo una  $r^2 = 0.955$  y los coeficientes de variación para los dos parámetros ajustados fueron bajos: para  $\theta_1$  (parámetro asintótico) el C.V. = 0.91 % y para  $\theta_2$  (parámetro de tasa de crecimiento) el C.V. = 3.22 %. De acuerdo a los resultados obtenidos, puede decirse que es un buen modelo para estimar  $H_2$  en función de  $E_1$ ,  $E_2$  y  $H_1$ .

Para estimar el IS se sustituyó éste por  $H_2$  y  $E_b$  (edad base) por  $E_2$ , para este caso se usó una  $E_b = 60$  años; después de cambiar estas variables se estimó el IS para cada parcela en base a la edad y altura promedio de cada una. Con este mismo modelo (4.4) se generó la familia de curvas para los diferentes IS sustituyendo  $H$  por  $H_2$ , 60 por  $E_1$  e IS por  $H_1$ . Así, se generó una curva por cada IS supuesto (Figura 4.1), incluso esta misma familia de curvas sirve para determinar el IS para otras áreas de

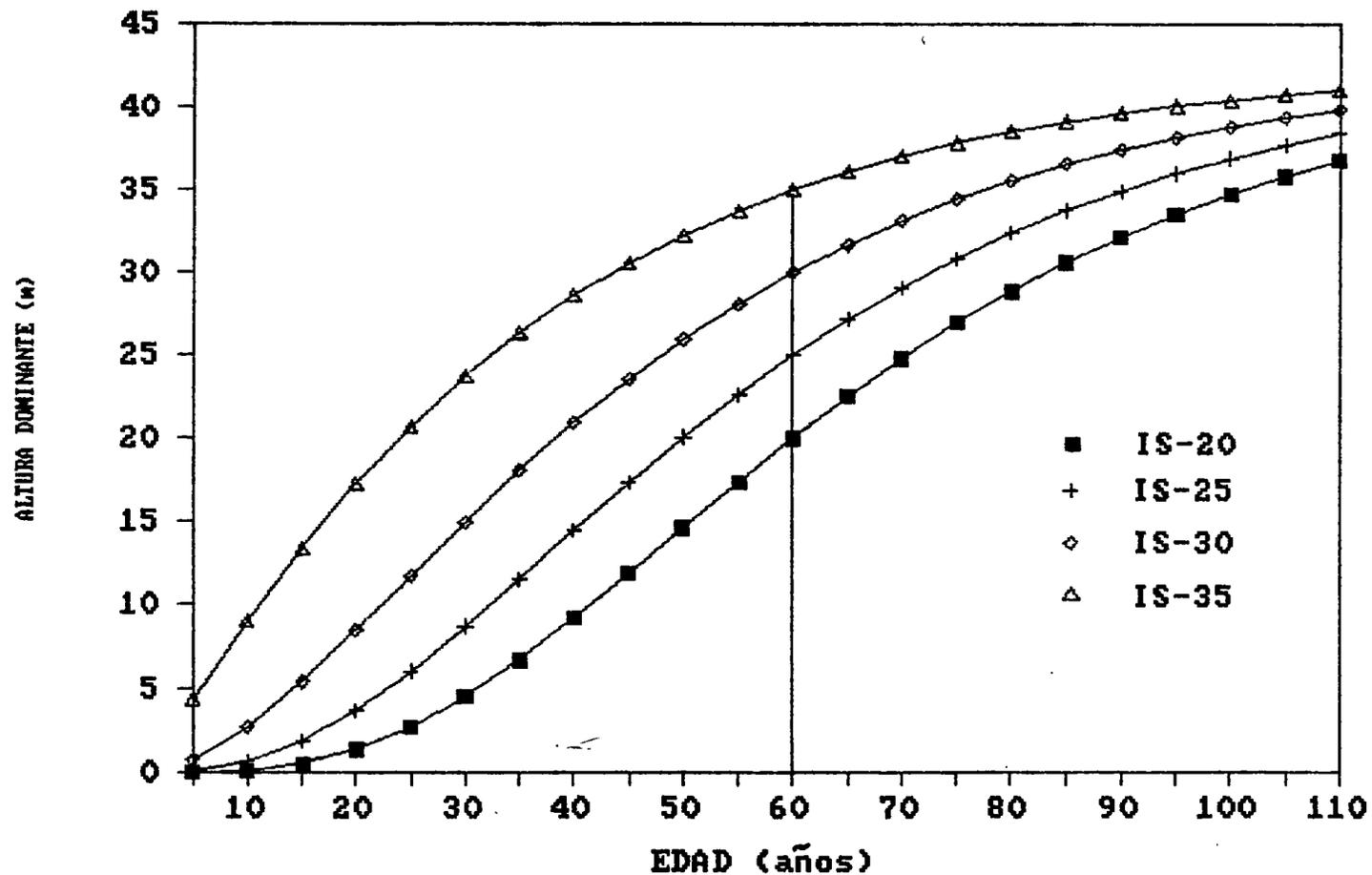


Figura 4.1. Familia de curvas polimórficas de IS generadas por el modelo de Chapman-Richards (4.4) para datos de análisis troncal y remediación de parcelas en Pinus montezumae.

*P. montezumae* dentro del campo, así como para calcular su H en función del IS y E actual.

#### 4.4. ESTIMACION DEL INDICE DE DENSIDAD.

Para estimar el índice de densidad del rodal (IDR) se utilizó la expresión (2.7) la cual presentan Clutter et al (1983) en base a los resultados de Reineke (1933). Pero antes fue necesario ajustar la expresión (2.5) como modelo de regresión lineal simple, para después sustituir el valor de  $\beta$  en la expresión (2.7) y así obtener el IDR. El modelo ajustado es el siguiente:

$$\ln(N) = 11.181727 - 1.492847 \ln(D_{\bar{q}}) \quad (4.5)$$

$$\begin{pmatrix} 0.84874 \\ 0.0001 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.21316 \\ 0.0001 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r^2 = 0.605 \\ \sigma^2 = 0.0062 \\ n = 34 \end{matrix}$$

Donde:

N = número de árboles por ha

$D_{\bar{q}}$  = diámetro cuadrático promedio.

De acuerdo a los resultados del ajuste se puede apreciar que se obtuvo una  $r^2 = 0.605$ , para ajustar este modelo se utilizaron 34 observaciones (parcelas con mayor área basal) para suponer parcelas con mayor densidad. De esta forma la ecuación para definir el IDR queda:

$$IDR = N (25.4/D_{\bar{q}})^{-1.492847} \quad (4.6)$$

Con esta ecuación fue posible estimar el IDR para cada parcela, sustituyendo el No. de árboles por ha (N) y  $D_{\bar{q}}$  presentes en cada una. Cabe señalar que se usó este índice por la facilidad de estimación, ya que el objetivo en el presente trabajo era contar con un índice de densidad para que en función de éste y de otras variables, poder predecir el rendimiento presente y futuro.

#### 4.5. PREDICCIÓN EXPLÍCITA DEL RENDIMIENTO ACTUAL.

Para estimar el rendimiento actual se tomó como base el modelo (2.8) que proviene del modelo de Schumacher (1939). A partir de esta forma se ajustaron varios modelos que eran diferentes sólo en alguna de sus variables independientes o en alguna transformación de éstas.

El modelo que mejores estadísticas presentó fue el que incluye el área basal como indicador de la densidad; otro modelo que también presentó buen ajuste fue en el que se incluye el IDR, pero no tan bueno como el anterior. El modelo ajustado es el siguiente:

$$\ln (V) = 2.498379 + 0.010248 \text{ IS} - 31.294298/E + 1.028586 \ln (\text{AB})$$
$$\begin{matrix} (0.06483) & (0.00101) & (1.53305) & (0.01519) \\ (0.0001) & (0.0001) & (0.0001) & (0.0001) \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} r^2 = 0.991 \\ \sigma^2 = 0.00056 \\ n = 120 \end{matrix} \quad (4.7)$$

Donde:

V = rendimiento actual en m<sup>3</sup>/ha  
IS = índice de sitio  
E = edad del rodal (años)  
AB = área basal en m<sup>2</sup>/ha

Para el ajuste del modelo se obtuvo una  $r^2=0.99$  y un valor bajo del cuadrado medio del error ( $\sigma^2=0.00056$ ), además todos los coeficientes fueron altamente significativos.

Por otra parte, al hacer la prueba de validación en las cuatro parcelas seleccionadas para tal fin (considerando las dos mediciones por separado, proporciona una muestra de 8 parcelas), se obtuvo un valor de  $R^2=0.997$  calculada con la expresión (3.9). Además el valor calculado de t muestra que se trata de dos poblaciones iguales, o sea que no hay diferencias entre los datos reales de las parcelas y los que se predicen con el modelo (4.7).

Los resultados de la validación se muestran en el Cuadro 2 del Apéndice.

#### 4.6. PREDICCIÓN EXPLÍCITA DEL RENDIMIENTO FUTURO.

Para predecir el rendimiento futuro, se tomó como base la expresión (3.6) en la cual se utilizó el área basal con y sin corteza, como variable de densidad, de esta forma se ajustaron dos modelos que son los siguientes:

$$\ln (V_2) = 2.917068 + 0.01318 IS - 0.000040564 E_2^2 +$$

$$\begin{matrix} (0.65100) & (0.00372) & (0.000031) \\ (0.0001) & (0.0008) & (0.1948) \end{matrix}$$

$$1.149191 \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln (AB_1) - 0.328519 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (4.8)$$

$$\begin{matrix} (0.05986) & (2.1308) \\ (0.0001) & (0.8780) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 0.924 \\ \sigma^2 &= 0.4616 \\ n &= 60 \end{aligned}$$

$$\ln (V_2) = 2.433747 + 0.009672 IS - 0.000007629 E_2^2 +$$

$$\begin{matrix} (0.25838) & (0.00149) & (0.000012) \\ (0.0001) & (0.0001) & (0.5295) \end{matrix}$$

$$1.211359 \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln (ABsc_1) + 1.596759 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (4.9)$$

$$\begin{matrix} (0.02351) & (0.84284) \\ (0.0001) & (0.0634) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= 0.988 \\ \sigma^2 &= 0.000429 \\ n &= 60 \end{aligned}$$

Donde:

$V_2$  = rendimiento predicho a la edad de proyección  $E_2$

$E_1$  = edad actual

$E_2$  = edad de proyección

$AB_1$  = área basal actual

$ABsc_1$  = área basal actual sin corteza

$\ln$  = logaritmo natural

Como se puede observar, estos dos modelos sólo son diferentes en sus parámetros y en la variable indicadora de la densidad. Ambos tuvieron buenos ajustes ( $r^2 > 0.92$ ), siendo mejor para el (4.9) donde se utilizó el área basal sin corteza. A pesar de haber obtenido un coeficiente de determinación alto ambos modelos, algunos de sus parámetros no son significativos principalmente para el modelo (4.8) donde la variable  $(1-E_1/E_2)$  ni el cuadrado de la edad ( $E_2^2$ ) son significativos. Respecto al modelo (4.9) sólo la variable cuadrado de la edad ( $E_2^2$ ) no es significativa.

En el Cuadro 2 del Apéndice se muestran los resultados de la validación donde se observa que el mejor ajuste se obtuvo para el modelo (4.9) con una  $R^2=0.976$ , a diferencia del modelo (4.8) que sólo obtuvo una  $R^2=0.766$ . El hecho de haber obtenido un menor valor de  $R^2$  en la validación del modelo (4.8) quizá se deba en parte a que su coeficiente de determinación fue menor que el del modelo (4.9) y su cuadrado medio del error ( $\sigma^2$ ) mayor.

Otro modelo que se ajustó para obtener el rendimiento futuro fue el que inicialmente desarrolló Clutter (1963) y posteriormente integraron Sullivan y Clutter (1972) el cual se muestra en la expresión (2.11). Al igual que en los dos anteriores también se ajustó tomando como variable de densidad el área basal con y sin corteza, así se ajustaron dos modelos.

El resultado del ajuste de estos modelos se muestra en seguida con la misma simbología que los anteriores.

$$\ln(V_2) = 3.93255 - 27.944387/IS - 2.191E_2^2(10)^{-5} - 2.403671 \left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right) + 93.426214/IS \left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right) + 1.14731 \left(\frac{E_1}{E_2}\right) \ln(AB_1) \quad (4.10)$$

$\begin{pmatrix} 0.86775 \\ 0.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 26.905 \\ 0.3036 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.000034 \\ 0.5200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.89824 \\ 0.6256 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 154.8044 \\ 0.5487 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.05836 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$

$r^2 = 0.929$   
 $\sigma^2 = 0.371$   
 $n = 60$

$$\ln (V_2) = 2.204929 + 21.926129/IS - 2.14E_2^2(10)^{-5} + 6.61975 \left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right) \\
\begin{matrix} (0.33975) & (10.4125) & (0.000013) & (1.89025) \\ (0.0001) & (0.0399) & (0.1057) & (0.0009) \end{matrix} \\
-170.9644/IS \left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right) + 1.214357 \left(\frac{E_1}{E_2}\right) \ln(ABsc_1) \quad (4.11) \\
\begin{matrix} (59.7302) & (0.02252) \\ (0.0060) & (0.0001) \end{matrix} \\
\begin{matrix} r^2 = 0.989 \\ \sigma^2 = 0.3952 \\ n = 60 \end{matrix}$$

El resultado del análisis de varianza para el ajuste de estos dos modelos se observa que es similar a los anteriores, ligeramente mejorado. Sin embargo en la validación el modelo que predice el volumen a partir del área basal con corteza (4.10) mejoró notablemente porque obtuvo una  $R^2=0.93$  (Cuadro 2 del Apéndice). Respecto al modelo (4.11) tanto en el coeficiente de determinación como en el resultado de la validación se obtuvieron resultados similares que con el modelo (4.9).

Otro aspecto que es necesario apuntar, es que sólo dos de los coeficientes estimados del modelo (4.10) son altamente significativos, mientras que los coeficientes del modelo (4.11) puede decirse que todos son significativos, aunque con diferente grado de significancia.

Cabe señalar que se hicieron transformaciones en las variables IS y edad, ya que al ajustar el modelo tal como se muestra en la expresión (2.11), se presentaron problemas debido a que no había independencia de variables ya que la matriz  $X'X$  era singular.

Con los modelos ajustados que se acaban de mostrar en este punto, es posible obtener el rendimiento actual de un rodal, con solo determinar las variables edad, IS y área basal. Para estimar el rendimiento futuro se requiere aparte de esas variables, la edad de proyección, y si se desea utilizar cualquiera de los modelos (4.9) o (4.11) se necesita el área basal sin corteza. De

esta manera se puede construir una tabla de rendimiento para cada rodal proporcionando las variables iniciales y así obtener el rendimiento futuro dependiendo de la edad de proyección.

Un inconveniente de este método de estimación del rendimiento futuro, es que no proporciona la estructura del rodal y por consiguiente se desconoce la distribución del volumen por clases o grupos de árboles. El siguiente capítulo muestra los resultados de los modelos de rendimiento por clases diamétricas o de predicción implícita, que se desarrollaron con la misma base de datos y con los cuales sí es posible obtener la distribución del volumen por categorías diamétricas.

#### 4.7. DISTRIBUCIONES DIAMETRICAS.

Después de haber obtenido los parámetros de la función de distribución Weibull (fdW) con el programa WEIBULL que generó Torres (1987); se determinó en función de los estadísticos de ajuste de Kolmogorv-Smirnov y de Ji-cuadrada con un  $\alpha=0.05$  la bondad de ajuste para cada parcela, donde se obtuvo como resultado que para 23 de éstas (ya sea en una o en sus dos mediciones) no se ajustaron a los datos reales con ningún método de estimación.

Para hacer los cálculos que involucran la estimación de las frecuencias diamétricas integrando la función Weibull con los parámetros estimados, se aplicó la regla de truncación que proponen Clutter *et al* (1983) que consiste en lo siguiente: cuando en la primera clase del extremo superior o inferior, se calcula una frecuencia de clase menor a 0.5, ésta se considera como cero y se ajusta a la siguiente categoría mayor o menor (según sea el extremo) acumulando las cantidades de las frecuencias para sumarlas cuando el límite de 0.5 sea revasado.

En la figura (4.2) se muestra un ejemplo de dos parcelas que no ajustaron, en donde se puede observar que una de las causas

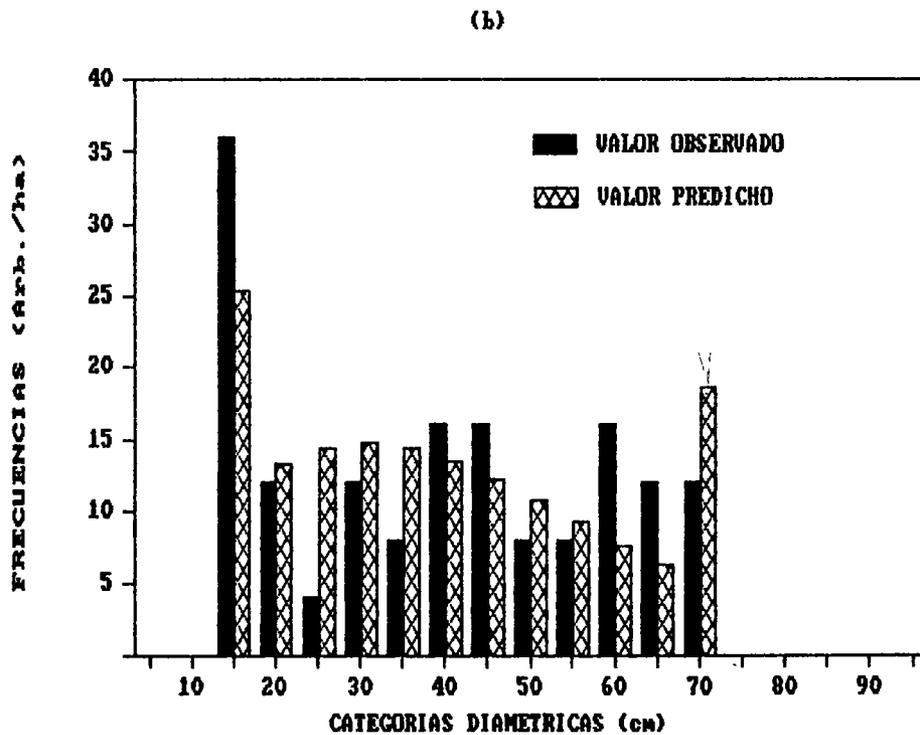
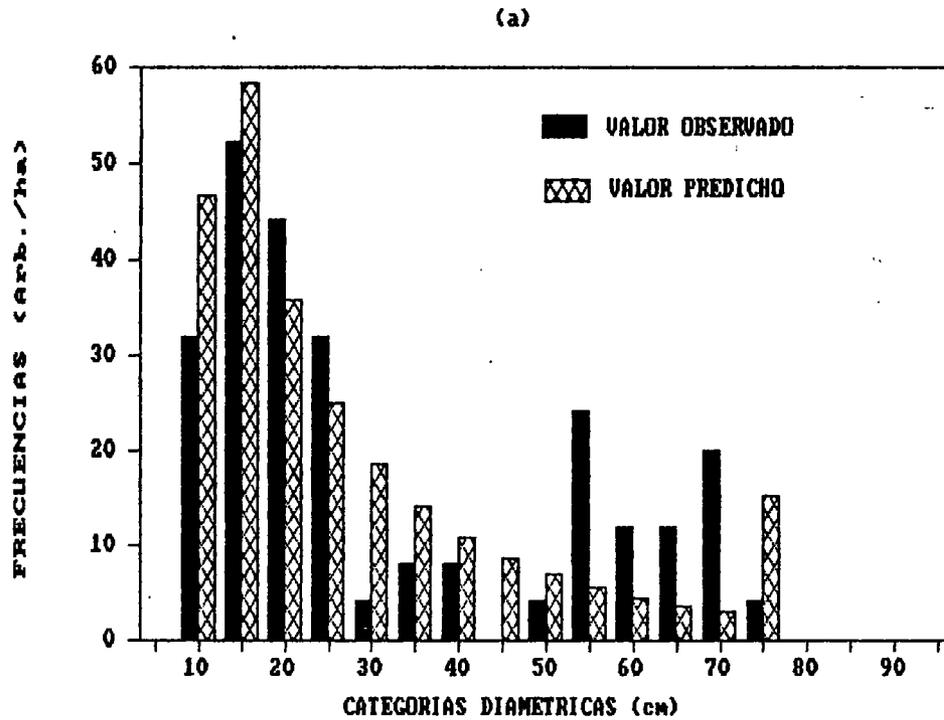


Figura 4.2. Ejemplo de dos parcelas que no ajustaron con la función Weibull, (a) de distribución bimodal y (b) de distribución indefinida

(que fue la más común) por las que algunas parcelas no ajustaron es que presentaron una distribución bimodal (Figura 4.2 a) y la función Weibull a pesar de tener propiedades que otras funciones no tienen, no ajusta distribuciones bimodales. Otro factor que causó problemas de ajuste es por la frecuencia tan disparada de algunas categorías mientras que otras no presentaron datos o éstos eran muy escasos, por lo que este tipo de parcelas mostraron una distribución defectiva (Figura 4.2 b).

Es posible utilizar otros tipos de funciones de distribución de probabilidad para ajustar estructuras de parcelas como las descritas en el párrafo anterior. Sin embargo, uno de los objetivos en el presente trabajo fue obtener modelos que estimen los parámetros de la función Weibull en función de características del rodal, después dichas características se proyectan a edades futuras, se recupera la distribución con los parámetros estimados, y finalmente la frecuencia por cada categoría.

En la figura (4.3) se muestra el ejemplo de dos parcelas que sí ajustaron con diferente grado de ajuste, claramente se nota la diferencia con las de la figura anterior. La estructura de las parcelas que sí ajustaron, generalmente mostraron distribuciones semejantes a una normal, ya sea con sesgo positivo o negativo, ninguna mostró la forma de una "j" invertida por lo que se refuerza su coetaneidad.

#### **4.8. FUNCIONES PARA ESTIMAR LOS PARAMETROS DE LA WEIBULL.**

Para determinar las funciones que estiman los parámetros de la fdW, se usaron modelos de regresión lineal múltiple, donde la variable dependiente fue en cada caso los parámetros de esta función, y las variables independientes fueron las características del rodal como el No. de árboles por ha, área

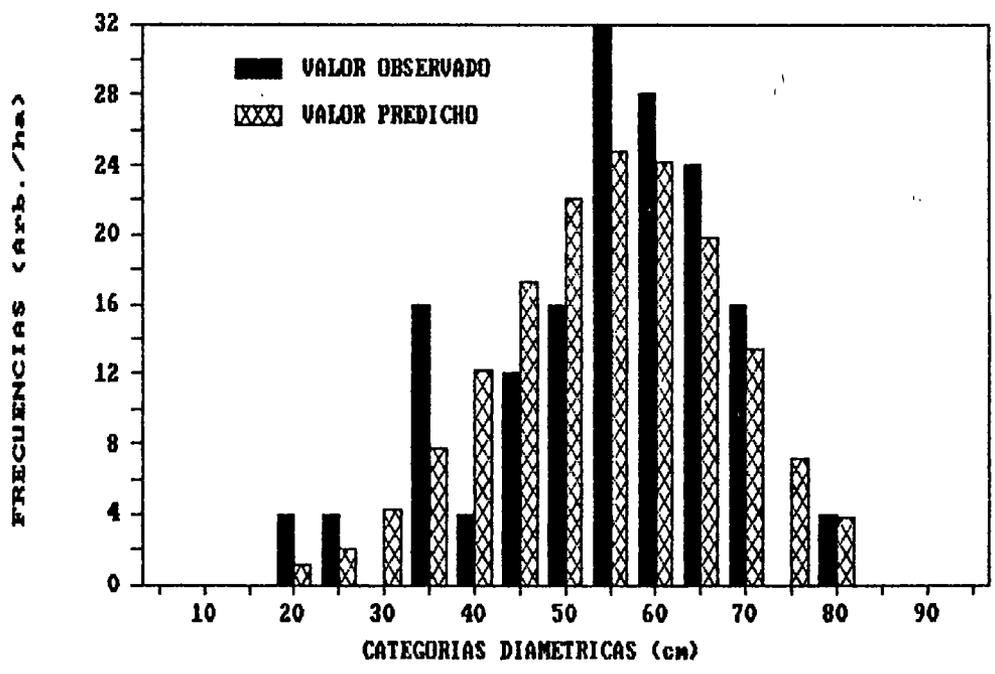
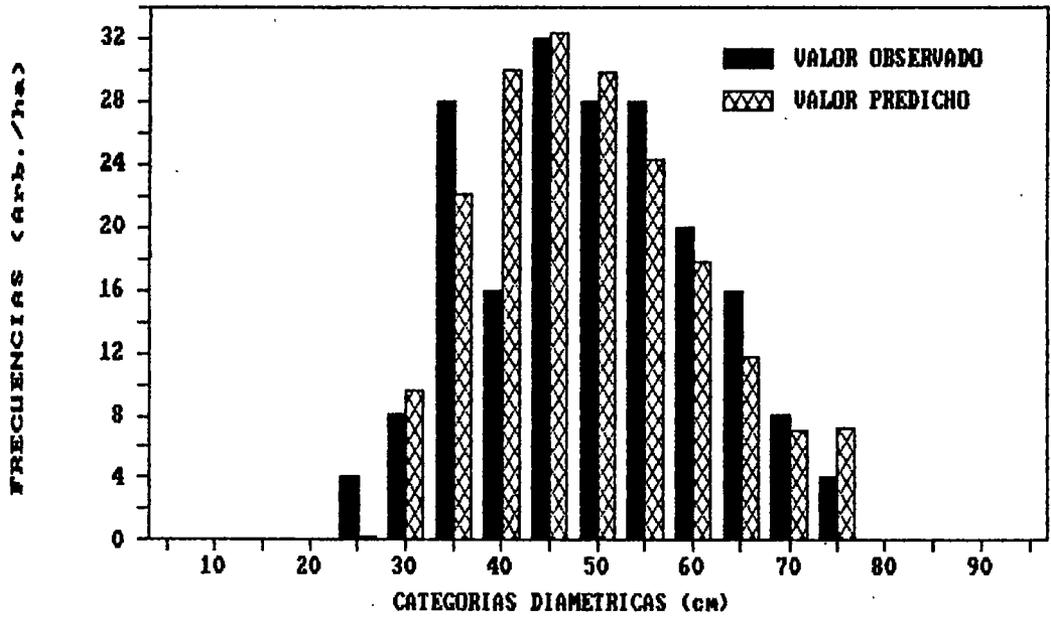


Figura 4.3. Ejemplo de dos parcelas que si ajustaron con la función Weibull.

basal,  $D_{\frac{1}{q}}$ , IS, y DN; también se usaron transformaciones o combinaciones de éstas.

El trabajo consistió en buscar la mejor combinación posible de variables independientes para ajustar los modelos con el mejor juego de parámetros en cada observación (de los obtenidos a través del paquete WEIBULL), de tal manera que al hacer el ajuste de un determinado modelo se obtuvo un buen estimador del parámetro en cuestión. De esta manera se utilizaron diferentes juegos de parámetros, obtenidos por diferentes métodos, pero cuidando de no mezclar los obtenidos por un método con los de otro.

Es difícil estimar las consecuencias estadísticas que pudiera acarrear el utilizar el procedimiento descrito, sin embargo, si se parte del supuesto que cada juego de parámetros ajusta la misma distribución (aunque con diferente curva) en realidad no se altera más que la variable dependiente, la cual es ajustada sin cambiar la base de datos. Por lo tanto es como si se estuviera utilizando otro método de estimación de parámetros de la función Weibull el cual engloba a varios.

Para ajustar estas funciones que estiman los parámetros, se utilizó como base los datos que se muestran en el cuadro (4.1), el juego de parámetros "a", "b" y "c" por parcela, es el que finalmente se seleccionó como el mejor para obtener un buen ajuste en los modelos. Los criterios para seleccionar los mejores modelos fueron el valor de  $r^2$ , la suma de cuadrados de los residuales, el valor estimado de F y respecto a los parámetros, su nivel de significancia.

De esta manera se ajustaron tres modelos para estimar "a", tres para estimar "b" y dos para estimar "c", en todos se obtuvieron ajustes satisfactorios ( $r^2$  superior a 0.9). En los tres modelos para estimar el parámetro de posición ("a") se incluyó el parámetro de escala ("b") como variable independiente y en todos fue significativo.

CUADRO 4.1. Variables de las parcelas y juego de parámetros de la Weibull, que se usaron para ajustar las funciones que predicen éstos parámetros con características del rodal, para *Pinus montezumae*.

PAR	N ARB. X ha	AB (m <sup>2</sup> )	D <sub>q</sub> (cm)	IS	ND (cm)	PARAMETROS DE LA fdW		
						a	b	c
MEDICION DE 1974								
01	212	30.09	42.51	30.5	40.2	0.0000	44.7935	3.2531
02	204	35.63	47.16	27.4	44.3	1.2109	48.3780	2.8903
03	148	20.74	42.24	28.3	37.9	11.2272	29.3568	1.4406
04	204	26.25	40.48	27.8	36.0	12.7022	25.0020	1.2527
05	260	31.88	39.51	29.0	35.0	10.4966	24.5034	1.2221
06	204	21.59	36.71	29.4	31.8	10.4900	16.0818	0.8609
12	232	41.27	47.59	31.1	45.5	0.0000	50.3750	3.7969
13	148	25.06	46.43	28.6	41.9	2.0089	43.9911	2.2039
15	172	26.04	43.91	28.4	40.7	5.0000	40.2815	2.3077
16	188	32.50	46.92	31.7	44.3	0.0000	49.2688	3.2084
17	192	34.38	47.75	31.3	46.3	0.0000	51.0461	4.1657
18	152	27.89	48.34	29.9	45.7	0.0000	51.0085	3.4054
21	204	37.84	48.60	31.1	46.3	0.0000	51.3664	3.4942
22	152	31.22	51.14	28.7	49.7	0.0000	54.2041	4.6056
24	108	21.12	49.90	30.4	47.8	0.0000	52.8158	4.0364
26	176	27.67	44.74	30.8	41.9	0.0000	47.0385	3.0200
27	160	27.45	46.73	26.8	44.5	0.0000	49.2984	3.5203
30	144	24.72	46.75	27.5	44.3	0.0000	50.4547	3.5248
31	204	37.21	48.19	27.7	45.4	0.0000	50.7078	3.1049
32	160	31.07	49.73	21.7	47.6	0.0000	52.5874	3.7119
34	176	36.35	51.28	28.3	49.6	0.0000	54.5199	4.4553
35	168	31.39	48.78	27.2	46.9	0.0000	51.7631	4.1304
36	188	30.54	45.48	30.3	42.3	0.0000	47.3775	2.7981
38	232	35.52	44.15	32.8	41.2	0.0000	46.2361	2.8402
40	168	34.16	50.88	24.6	48.8	0.0000	53.7040	4.0775
42	204	35.49	47.06	27.4	45.2	0.0000	49.8590	3.9201
43	136	32.63	55.27	29.7	53.7	0.0765	58.6802	4.6822
44	188	32.15	46.66	25.2	44.8	0.0000	49.5586	3.9975
49	196	25.11	40.39	27.4	35.5	9.9375	21.9440	1.0052
54	180	32.06	47.62	27.1	43.4	1.7631	47.0284	2.2746
55	184	32.44	47.38	28.5	44.8	0.8950	49.0932	3.1823
57	192	38.26	50.37	25.9	49.0	0.0000	53.5039	4.7127
58	184	35.18	49.34	26.8	48.0	0.0000	52.3720	4.5923
59	184	34.35	48.75	25.4	46.1	0.0000	51.4207	3.3086
60	176	23.40	41.14	27.7	36.7	9.0000	29.7420	1.3019
61	172	32.93	49.37	27.0	47.8	0.0000	52.4076	4.7444
64	212	34.54	45.55	24.9	43.5	0.0271	48.2837	3.6888

CONTINUA...

CUADRO 4.1. Variables de las parcelas y juego de parámetros de la Weibull, que se usaron para ajustar las funciones que predicen éstos parámetros con características del rodal, para *Pinus montezumae*.

CONTINUACION...

N ARB. PAR X ha	AB (m <sup>2</sup> )	D- q (cm)	IS	ND (cm)	PARAMETROS DE LA fdw			
					a	b	c	
MEDICION 1989-90								
01	192	37.62	49.95	30.5	47.6	0.0000	52.9615	3.6055
02	200	45.14	53.61	27.4	50.5	2.3803	53.9615	2.8570
03	136	25.96	49.30	28.3	45.7	0.0000	50.6321	2.7370
04	192	35.54	48.55	27.8	44.2	0.0000	49.6414	2.3816
05	236	38.55	45.60	29.0	41.1	8.5849	36.9889	1.5371
06	196	30.64	44.62	29.4	39.0	12.9990	26.4827	0.9343
12	216	48.63	53.54	31.1	51.3	0.0000	56.7535	3.9482
13	140	32.17	54.09	28.6	49.4	2.2669	52.7331	2.3030
15	168	33.52	50.40	28.4	47.0	2.0000	50.6680	2.7193
16	180	39.31	52.73	31.7	50.1	0.0000	55.7311	3.4270
17	184	41.17	53.38	31.3	52.2	0.0000	56.8617	4.9433
18	132	32.96	56.38	29.9	54.1	0.0000	59.3869	4.0912
21	184	46.03	56.44	31.1	54.3	0.0000	59.9801	4.0197
22	144	36.02	56.43	28.7	54.7	0.0000	62.0620	4.3319
24	108	29.19	58.67	30.4	56.4	0.0000	62.0620	4.3313
26	172	37.37	52.60	30.8	49.6	0.0000	55.4646	3.2603
27	148	34.13	54.19	26.8	51.6	0.0000	57.1564	3.5238
30	132	32.06	55.61	27.5	52.9	0.0000	58.5844	3.3880
31	196	45.40	54.31	27.7	51.2	0.0000	58.9094	3.5545
32	124	30.40	55.87	21.7	53.3	0.0000	58.9095	3.5545
34	172	47.34	59.20	28.3	57.3	0.2982	62.7018	4.5636
35	164	39.44	55.33	27.2	53.2	0.0000	58.6975	4.1144
36	168	38.83	54.25	30.3	51.2	0.0000	57.1769	3.2515
38	208	44.69	52.30	32.8	49.5	0.0000	55.2798	3.3562
40	140	37.18	58.15	24.6	56.1	0.0000	61.4502	4.5079
42	196	43.38	53.09	27.4	51.1	1.9506	55.0494	3.8431
43	136	39.98	61.18	29.7	59.5	4.3055	60.6255	4.3120
44	180	41.46	54.15	25.2	52.0	0.0000	57.5098	3.9817
49	172	30.99	47.90	27.4	43.4	8.5519	39.6258	1.5993
54	180	40.50	53.52	27.1	49.3	1.7273	53.7098	2.4229
55	176	41.76	54.97	28.5	52.3	0.0000	58.2422	3.5539
57	192	44.42	54.28	25.9	52.9	0.6586	56.3414	4.4219
58	176	42.04	55.15	26.8	53.5	0.0000	57.7176	4.0862
59	160	41.69	57.60	25.4	55.4	0.0000	68.0835	5.6864
60	144	26.73	48.61	27.7	45.0	0.0000	50.5963	2.6983
61	160	39.34	55.95	27.0	54.6	0.0000	59.1081	5.3047
64	200	44.55	53.25	24.9	51.1	0.0000	56.5534	3.9548

En seguida se muestran los modelos ajustados; el valor de sus parámetros y las estadísticas básicas del ajuste, se proporcionan en el Cuadro (4.2).

$$a1 = \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 \ln(N) + \alpha_3 \ln(AB) \quad (4.12)$$

$$a2 = \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 LDQN + \alpha_3 \ln(D_{\bar{q}}) \quad (4.13)$$

$$a3 = \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 LDQN + \alpha_3 \ln(IS) \quad (4.14)$$

$$b1 = \alpha_0 + \alpha_1 LDQN \quad (4.15)$$

$$b2 = \alpha_0 + \alpha_1 LDQN + \alpha_2 \ln(DN) \quad (4.16)$$

$$b3 = \alpha_0 + \alpha_1 LDQN + \alpha_2 LNAB \quad (4.17)$$

$$c1 = \alpha_0 + \alpha_1 LNAB + \alpha_2 LDQN + \alpha_3 D_{\bar{q}} \quad (4.18)$$

$$c2 = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(DN) + \alpha_2 \ln(AB) + \alpha_3 \ln(N) \quad (4.19)$$

Donde:

a = parámetro de localización

b = parámetro de escala

c = parámetro de forma

N = número de árboles por ha

AB = área basal

$D_{\bar{q}}$  = diámetro cuadrático

$LDQN = 1 - \ln(D_{\bar{q}})/DN$

$LNAB = \ln(N/AB)$

Una variable que se utilizó en la mayoría de los modelos (a excepción del (4.12) y 4.19) es la variable  $(1 - \ln(D_{\bar{q}})/DN)$  se intentó utilizar otras relaciones como  $1 - \ln(D_{\bar{q}})/AB$ ,  $1 - \ln(D_{\bar{q}})/N$ , etc. para no utilizar el DN, porque esta variable es difícil de proyectar, sin embargo con ninguna funcionó mejor.

CUADRO 4.2. Estadísticas básicas de cada uno de los modelos que estiman los parámetros de la Weibull, y que mejores resultados dieron. Modelos (4.12) al (4.19).

MODELO	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	
(4.12)	COEFICIENTE	63.3118	-0.6593	-18.5206	19.0639
	ERROR STAND.	3.8720	0.0237	1.1513	1.1717
	ESTADISTICO t	16.3511	-27.7814	-16.0964	16.2700
	$R^2 = 0.947$		SUMA DE CUAD.=	44.434	
	$R^2$ AJUST.= 0.945		EST. F=	419.90	
(4.13)	COEFICIENTE	-261.73	-0.7472	206.889	28.5337
	ERROR STAND.	61.985	0.04342	84.9122	4.27312
	ESTADISTICO t	-4.2226	-17.2068	2.4365	6.67748
	$R^2 = 0.951$		SUMA DE CUAD.=	41.41	
	$R^2$ AJUST.= 0.949		EST. F=	452.20	
(4.14)	COEFICIENTE	-601.47	-0.89472	703.148	1.17791
	ERROR STAND.	49.287	0.04855	55.3352	1.41467
	ESTADISTICO t	-12.707	-18.4258	12.7070	0.83288
	$R^2 = 0.920$		SUMA DE CUAD.=	67.133	
	$R^2$ AJUST.= 0.917		EST. F=	270.04	
(4.15)	COEFICIENTE	-959.26	1101.89	--	--
	ERROR STAND.	29.449	32.1307	--	--
	ESTADISTICO t	-32.131	34.2940	--	--
	$R^2 = 0.942$		SUMA DE CUAD.=	413.41	
	$R^2$ AJUST.= 0.941		EST. F=	1176.08	

CONTINUA...

CUADRO 4.2. Estadísticas básicas de cada uno de los modelos que estiman los parámetros de la Weibull, y que mejores resultados dieron. Modelos (4.12) al (4.19).

CONTINUACION...

MODELO	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	
(4.16)	COEFICIENTE	-2154.6	2939.93	-127.02	--
	ERROR STAND.	191.36	293.116	20.177	--
	ESTADISTICO t	-11.259	10.0299	-6.2953	--
	$R^2 = 0.963$		SUMA DE CUAD.=	265.32	
	$R^2$ AJUST.= 0.962		EST. F=	923.36	
(4.17)	COEFICIENTE	-1514.3	1664.42	24.153	--
	ERROR STAND.	119.78	121.789	5.0872	--
	ESTADISTICO t	-12.649	13.6667	4.7478	--
	$R^2 = 0.956$		SUMA DE CUAD.=	313.79	
	$R^2$ AJUST.= 0.955		EST. F=	775.25	
(4.18)	COEFICIENTE	-438.58	30.3827	387.52	0.74099
	ERROR STAND.	23.058	2.88798	16.964	0.09957
	ESTADISTICO t	-19.021	10.5204	22.843	7.44182
	$R^2 = 0.946$		SUMA DE CUAD.=	3.9820	
	$R^2$ AJUST.= 0.944		EST. F=	412.78	
(4.19)	COEFICIENTE	-151.68	33.4629	-16.677	16.4676
	ERROR STAND.	5.8834	1.22985	0.7576	0.73876
	ESTADISTICO t	-25.781	27.2089	-22.011	22.2909
	$R^2 = 0.958$		SUMA DE CUAD.=	3.1322	
	$R^2$ AJUST.= 0.956		EST. F=	531.10	

Una vez que se obtuvieron los modelos para predecir cada uno de los parámetros, se intentó buscar la mejor combinación de éstos, de tal manera que al hacer la integración de la fdW con cada combinación de modelos para los tres parámetros, se selecciona el que mejor ajuste representa para la distribución diamétrica de las parcelas, en base a los estadísticos de bondad de ajuste de Kolmogorv-Smirnov y Ji-cuadrada.

Para realizar el procedimiento descrito en el párrafo anterior se utilizó un programa en FORTRAN llamado VALIDAR que utilizó y programó Torres (1987), el cual de entrada pide al usuario el nombre del archivo donde están los diámetros por parcela y su formato; el nombre del archivo de salida; y las variables que se utilizan en los modelos para estimar los parámetros como área basal, IS, edad, número de árboles por ha y DN; respecto al  $D_q$  se calculó con el número de árboles por parcela y el área basal.<sup>1</sup>

El programa se utilizó en 30 parcelas (en sus dos mediciones) seleccionadas al azar, en donde se aplicó el mismo criterio de aceptar o rechazar el ajuste para cada parcela que se utilizó cuando se estimaron los parámetros de la fdW con el programa WEIBULL. De esta manera se obtuvo como resultado que se rechazaron cinco de las 60 parcelas que se validaron por no presentar buen ajuste.<sup>2</sup>

---

<sup>1/</sup> El programa VALIDAR fue modificado por el mismo autor de éste para el caso particular de este trabajo, de tal manera que incluyó cada modelo para estimar los parámetros de la fdW con sus respectivos coeficientes de las variables.

<sup>2/</sup> Aquí el término "validar" se refiere a la aplicación de las diferentes combinaciones de los modelos para seleccionar la mejor en base a las características de la parcela.

Otro de los objetivos de efectuar esta operación, fue para encontrar la mejor combinación en base a rangos de las características de las parcelas como área basal y número de árboles por hectárea. Se supuso que para determinados rangos de estas variables, podría existir alguna combinación de modelos que ajustara mejor que cualquier otra a la distribución diamétrica real de la parcela con esas características.

El resultado fue que para rangos de área basal menores a 28 o mayores a 38 m<sup>2</sup>/ha es conveniente usar la combinación a2-b2-c2 o sea los modelos (4.13), (4.16) y (4.19); para rangos de área basal entre 28 y 38 m<sup>2</sup>/ha y con número de árboles por ha menor a 150, es preferible utilizar la combinación a2-b3-c1 o sea los modelos (4.13), (4.17) y (4.18); y para el mismo rango de área basal pero con número de árboles por ha superior a 150, es conveniente utilizar la combinación a2-b1-c1 o sea los modelos (4.13), (4.15) y (4.18).

Para hacer la validación se usó este criterio de asignación de modelos dependiendo de las características que presentó cada parcela seleccionada para tal fin.

#### 4.9. MODELOS DE PROYECCION DE VARIABLES Y FUNCION DE MORTALIDAD.

Una vez que se seleccionaron los modelos para predecir los parámetros de la fdW, fue necesario ajustar ecuaciones de proyección de variables que se usaron en dichos modelos. Para lo cual se utilizó como base la expresión (3.8), de esta manera se proyectaron las variables área basal, DN y  $D_{\bar{q}}$ . En seguida se muestran las ecuaciones resultantes.

$$\ln(AB_2) = -0.412918 + 1.128018 \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln(AB_1) + 4.948211 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right)$$

$$\begin{matrix} (0.24330) & (0.05725) & (0.5571) \\ (0.0951) & (0.0001) & (0.0001) \end{matrix}$$

$$r^2 = 0.893 \quad (4.20)$$

$$\sigma^2 = 0.0028$$

$$n = 60$$

$$\ln(DN_2) = -1.168657 + 0.008958 \ln(IS) + 4.975662 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right)$$

$$\begin{matrix} (0.25662) & (0.0431) & (0.3852) \\ (0.0001) & (0.8361) & (0.0001) \end{matrix}$$

$$+ 1.322413 \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln(D_{q1}^-)$$

$$\begin{matrix} (0.05546) & & \\ (0.0001) & & \end{matrix}$$

$$r^2 = 0.938 \quad (4.21)$$

$$\sigma^2 = 0.00063$$

$$n = 60$$

$$\ln(D_{q2}^-) = 0.131907 + 3.897857 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right) + 1.0004445 \left( \frac{E_1}{E_2} \right) \ln(D_{q1}^-)$$

$$\begin{matrix} (0.19725) & (0.31178) & (0.04665) \\ (0.5064) & (0.0001) & (0.0001) \end{matrix}$$

$$r^2 = 0.919 \quad (4.22)$$

$$\sigma^2 = 0.00045$$

$$n = 60$$

Para los tres modelos se obtuvieron buenos ajustes, por ejemplo, para el (4.20) se obtuvo una  $r^2=0.893$  y para los otros dos, una  $r^2$  superior a 0.91. El modelo que se usó para proyectar el DN, se le anexó la variable IS para tratar de obtener un mejor ajuste, pero su parámetro no fue significativo, sin embargo, se decidió utilizarlo debido a que el ajuste sí se mejoró ligeramente, por otra parte, en lugar de utilizar el DN inicial se usó el  $D_{q1}^-$  como variable independiente, con lo cual se obtuvieron buenos resultados.

Estos tres modelos también se validaron por medio de la expresión (3.9) y el estadístico t para comparar dos poblaciones. Los resultados se muestran en el Cuadro 2 del Apéndice, donde se observa que los modelos (4.20) y (4.21) para proyectar área basal y DN brindaron buenos resultados ya que la  $R^2$  calculada fue de

0.966 y 0.88 respectivamente; en cambio para proyectar el  $D_{\bar{q}}$  se determinó una  $R^2=0.67$  a pesar de que en el ajuste el coeficiente de determinación fue de 0.919. Por esta razón se decidió utilizar las variables área basal, y número de árboles por ha para calcular  $D_{\bar{q}}$  a la edad de proyección  $E_2$ .

Otra de las variables a proyectar que es de gran importancia en este tipo de estudios, es el número de árboles por ha. Para predecirlo se usan funciones de mortalidad e incluso en algunos casos se usan modelos para estimar la probabilidad de muerte de un árbol para un determinado período de tiempo. Este último tipo de predicciones por lo general se utiliza en modelos de árboles individuales.

Para el presente caso se usó un modelo sencillo de regresión no lineal (2.16), aunque se probaron otros como el que se muestra en la expresión (2.18) pero el coeficiente de variación de sus parámetros era muy alto, por eso se decidió utilizar un modelo similar al de la expresión (2.16). El modelo ajustado se presenta en seguida en donde se observa que se obtuvo una  $r^2=0.918$  y el coeficiente de variación de su único parámetro fue bajo (8.3 %).

$$N_2 = N_1 e^{-0.3480323 [\ln(E_2) - \ln(E_1)]} \quad (4.23)$$

$(\frac{0.02886}{\text{-----}})$

$r^2 = 0.918$   
 $\sigma^2 = 54.851$   
 $n = 57$

Donde:

- $N_1$  = número de árboles/ha a la edad inicial  $E_1$
- $N_2$  = número de árboles/ha a la edad de proyección  $E_2$
- $E_1$  = edad inicial
- $E_2$  = edad de proyección
- $\ln$  = logaritmo natural

Este modelo también se validó siguiendo el mismo criterio que en los anteriores, donde se obtuvo como resultado una  $R^2=0.856$  y un valor más o menos bajo de  $t_c=-0.46$  (Cuadro 2 del Apéndice).

Si se toma en cuenta la dificultad que acarrea el estimar mortalidad, estos resultados bien pudieran considerarse como buenos. Por ejemplo en los resultados que se obtuvieron en las dos mediciones de las 64 parcelas, el número de árboles por hectárea muertos en el período de medición (15 años) varió desde 0 hasta 36, lo que significa que en la ocurrencia de este fenómeno (mortalidad) intervienen muchos factores difíciles de determinar y más aún de evaluar.

#### 4.10. ECUACION DE ALTURA EN FUNCION DEL DIAMETRO NORMAL Y SITIO.

Una vez que se tienen definidos los modelos que se deben utilizar para estimar los parámetros de la fdW, se requiere ajustar una función que estime la altura en base al DN y a características del rodal como IS, edad, etc.. De esta forma, después al hacer la integración de la función Weibull y estimar las frecuencias por categoría diamétrica, se podrá determinar el volumen por cada categoría y finalmente obtener el volumen total por ha, de cada parcela sumando el volumen de las categorías.

Con base en lo anterior se buscó alguna función para estimarla altura, cabe señalar que se ajustaron varios modelos (incluyendo modelos no lineales) y finalmente se optó por utilizar el que se muestra en seguida:

$$H = DN^2 / (4.310938 + 0.026076 DN^2 - 0.838744 IS + 2601.116771/E)$$

(5.2944)	(0.00021)	(0.18846)	(216.8197)
(0.4159)	(0.00000)	(0.0001)	(0.0001)

$$\begin{aligned} r^2 &= 0.968 \\ \sigma^2 &= 91.292 \\ n &= 518 \end{aligned} \quad (4.24)$$

De acuerdo a los resultados del análisis de varianza para este modelo se observa que se obtuvieron resultados

satisfactorios, ya que se logró una  $r^2=0.968$ ; los coeficientes fueron significativos, a excepción de la interceptada. Este modelo tiene la característica de que cuando DN tiende a infinito el valor de H se vuelve asintótico y el parámetro que define ese valor, es el coeficiente del  $DN^2$  porque  $(DN^2/(0.026076DN^2))$  queda  $1/0.026076 = 38.3494$ , dicho valor es congruente con la base de datos que se utilizaron.

#### 4.11. VALIDACION DE LA PREDICCIÓN IMPLÍCITA DEL RENDIMIENTO FUTURO.

La validación de la técnica, de utilizar modelos por clases diamétricas o de predicción implícita, se llevó a cabo desde dos puntos de vista; uno fue para recuperar la distribución que se genera con el juego de parámetros estimados y compararla con la distribución real de las parcelas seleccionadas, el otro consistió en obtener el volumen y área basal por categoría diamétrica, sumarla para obtener el total de estas variables, y finalmente, estimar la  $R^2$  aplicando la expresión (3.9) y el estadístico t para comparar dos poblaciones.

Para la primera prueba se basó en los estadísticos de bondad de ajuste de Kolmogorv-Smirnov y Ji-cuadrada., Para la comparación se utilizó el programa VALIDAR, al cual de entrada se le proporcionaban los datos de las parcelas estimados con las ecuaciones de proyección y la función de mortalidad. En el Cuadro (4.3) se presentan los resultados de esta validación donde se observa que el ajuste es satisfactorio con un  $\alpha=0.05$  para las cuatro parcelas y para las dos pruebas de ajuste utilizadas. Cabe señalar que en la parcela 11 se obtuvo un valor cercano al umbral del criterio de decisión para aceptar o rechazar el ajuste, sin embargo éste es suficiente para ser aceptado.

Respecto a la combinación recomendada, se refiere a las ecuaciones que se sugiere utilizar para estimar los parámetros de la Weibull, en base a los rangos de área basal y número de árboles por ha que se establecieron antes.

CUADRO 4.3. Resultados de la validación utilizando el programa VALIDAR en las parcelas seleccionadas para ese fin y con la proyección de variables y estimación de parámetros con las ecuaciones ajustadas.

PARCELA	VARIABLES ESTIMADAS		COMBINACION RECOMENDADA	K-S	JI-C	G.L.
	AB	N				
11	44.993	178.83	a2-b2-c2	0.1990	47.73	44
19	37.727	153.05	a2-b1-c1	0.0935	6.06	37
50	27.866	137.72	a2-b2-c2	0.0887	15.13	32
63	33.359	147.19	a2-b3-c1	0.0895	16.71	35

AB = área basal en m<sup>2</sup>/ha

N = número de árboles /ha

a<sub>1</sub>, b<sub>1</sub>, c<sub>1</sub> = parámetros de la fdW (estimados)

K-S = valor calculado del estadístico de Kolmogorv-Smirnov

JI-C = valor calculado de Ji-cuadrada

G.L. = grados de libertad

Respecto a la segunda prueba de validación, en el Cuadro (4.4) se muestran los resultados obtenidos de volumen y área basal por categoría diamétrica y el total de éstos por parcela. Respecto al resultado de la validación se muestra en el Cuadro 2 del Apéndice, en donde se obtuvo una R<sup>2</sup>=0.885 para volumen y R<sup>2</sup>=0.902 para el área basal, el valor de t<sub>c</sub> también es bajo lo que sugiere que se trata de dos poblaciones iguales. Con estos resultados se concluye que las predicciones del rendimiento futuro utilizando esta técnica, son satisfactorias, al menos para la especie y el lugar donde se desarrolló el trabajo.

CUADRO 4.4. Resultados de la integración de la función Weibull con el juego de parámetros predichos por las variables proyectadas, para hacer la prueba de validación en parcelas de *Pinus montezumae*.

CAT.	CLAS.	FREC.						
DIAM	PROB.	N X Pi	ALT.	VOL.	IND.	AB	IND.	
(cm)	Pi	(arb/ha)	(m)	(m <sup>3</sup> )	(m <sup>2</sup> )	X CLAS.	X CLAS.	
				(m <sup>3</sup> /ha)	(m <sup>2</sup> /ha)			
PARCELA 11								
10	0.004	0.78	5.8	0.01916	0.00785	0.0150	0.00616	
15	0.011	2.04	11.0	0.07871	0.01767	0.1608	0.03610	
20	0.022	3.98	16.0	0.19791	0.03142	0.7893	0.12529	
25	0.037	6.58	20.2	0.38391	0.04909	2.5273	0.32314	
30	0.054	9.67	23.6	0.63728	0.07069	6.1646	0.68377	
35	0.072	12.97	26.3	0.95596	0.09621	12.4024	1.24823	
40	0.090	16.08	28.4	1.33737	0.12566	21.5062	2.02080	
45	0.104	18.52	30.0	1.77916	0.15904	32.9633	2.94668	
50	0.111	19.87	31.3	2.27940	0.19635	45.3079	3.90287	
55	0.111	19.84	32.3	2.83658	0.23758	56.2848	4.71425	
60	0.103	18.38	33.1	3.44948	0.28274	63.4197	5.19833	
65	0.088	15.75	33.8	4.11715	0.33183	64.8595	5.22751	
70	0.069	12.42	34.4	4.83880	0.38485	60.1241	4.78187	
75	0.050	8.97	34.8	5.61381	0.44179	50.3767	3.96447	
80	0.033	5.89	35.2	6.44164	0.50266	38.0018	2.96537	
85	0.020	3.50	35.5	7.32183	0.56745	25.6857	1.99068	
90	0.010	1.87	35.8	8.25398	0.63617	15.4713	1.19244	
95	0.005	0.89	36.0	9.23774	0.70882	8.2539	0.63333	
TOTAL		178.69				504.314	41.9613	
PARCELA 19								
10	0.004	0.58	7.5	0.02386	0.00785	0.0139	0.00457	
15	0.010	1.56	13.6	0.09425	0.01767	0.1475	0.02766	
20	0.020	3.11	18.9	0.22862	0.03142	0.7133	0.09801	
25	0.034	5.23	23.2	0.43062	0.04909	2.2531	0.25684	
30	0.051	7.79	26.3	0.69864	0.07069	5.4457	0.55098	
35	0.069	10.58	28.7	1.02979	0.09621	10.9043	1.01877	
40	0.087	13.29	30.5	1.42146	0.12566	18.8925	1.67019	
45	0.101	15.50	31.9	1.87157	0.15904	29.0262	2.46661	
50	0.110	16.85	32.9	2.37853	0.19635	40.0978	3.31011	
55	0.111	17.05	33.7	2.94113	0.23758	50.1739	4.05303	
60	0.105	16.03	34.4	3.55843	0.28274	57.0494	4.53301	
65	0.091	13.94	34.9	4.22968	0.33183	58.9642	4.62593	
70	0.073	11.16	35.3	4.95427	0.38485	55.3080	4.29631	
75	0.053	8.18	35.7	5.73170	0.44179	46.9364	3.61775	
80	0.036	5.46	36.0	6.56154	0.50266	35.8864	2.74913	
85	0.022	3.30	36.2	7.44340	0.56745	24.5952	1.87503	
90	0.012	1.79	36.4	8.37695	0.63617	15.0241	1.14098	
TOTAL		152.91				451.432	36.2949	

CONTINUA...

CUADRO 4.4. Resultados de la integración de la función Weibull con el juego de parámetros predichos por las variables proyectadas, para hacer la prueba de validación en parcelas de *Pinus montezumae*.  
(CONTINUACION)...

CAT. DIAM (cm)	CLAS. PROB. P <sub>i</sub>	FREC. N X P <sub>i</sub> (arb/ha)	ALT. (m)	VOL. IND. (m <sup>3</sup> )	AB IND. (m <sup>2</sup> )	VOL. X CLAS. (m <sup>3</sup> /ha)	AB X CLAS. (m <sup>2</sup> /ha)	
PARCELA 50								
10	0.019	2.57	6.4	0.02078	0.00785	0.0536	0.02025	
15	0.036	5.00	11.9	0.08422	0.01767	0.4216	0.08848	
20	0.054	7.49	17.0	0.20907	0.03142	1.5670	0.23547	
25	0.071	9.76	21.3	0.40124	0.04909	3.9192	0.47947	
30	0.084	11.59	24.6	0.66040	0.07069	7.6584	0.81972	
35	0.093	12.81	27.2	0.98411	0.09621	12.6132	1.23312	
40	0.097	13.34	29.2	1.36973	0.12566	18.2742	1.67655	
45	0.096	13.16	30.7	1.81497	0.15904	23.9026	2.09456	
50	0.090	12.38	31.9	2.31802	0.19635	28.6971	2.43081	
55	0.081	11.11	32.9	2.87748	0.23758	31.9746	2.64003	
60	0.069	9.53	33.6	3.49225	0.28274	33.3153	2.69732	
65	0.057	7.84	34.2	4.16144	0.33183	32.6344	2.60226	
70	0.045	6.17	34.7	4.88436	0.38485	30.1692	2.37708	
75	0.034	4.66	35.2	5.66041	0.44179	26.3956	2.06014	
80	0.024	3.37	35.5	6.48910	0.50266	21.9014	1.69651	
85	0.017	2.34	35.8	7.37001	0.56745	17.2606	1.32897	
90	0.011	1.55	36.0	8.30277	0.63617	12.9349	0.99110	
95	0.007	0.99	36.3	9.28705	0.70882	9.2248	0.70407	
TOTAL						135.75	312.918	26.1759
PARCELA 63								
10	0.003	0.37	8.1	0.02538	0.00785	0.0096	0.00298	
15	0.008	1.15	14.4	0.09901	0.01767	0.1140	0.02035	
20	0.017	2.53	19.8	0.23755	0.03142	0.6022	0.07964	
25	0.031	4.61	24.0	0.44366	0.04909	2.0488	0.22669	
30	0.050	7.37	27.1	0.71522	0.07069	5.2751	0.52134	
35	0.072	10.61	29.4	1.04927	0.09621	11.1368	1.02118	
40	0.095	13.93	31.1	1.44324	0.12566	20.1152	1.75144	
45	0.114	16.77	32.3	1.89517	0.15904	31.7852	2.66743	
50	0.125	18.47	33.3	2.40356	0.19635	44.4123	3.62810	
55	0.126	18.55	34.1	2.96730	0.23758	55.0538	4.40801	
60	0.114	16.85	34.7	3.58551	0.28274	60.4441	4.76647	
65	0.093	13.73	35.2	4.25749	0.33183	58.4686	4.55708	
70	0.067	9.92	35.6	4.98268	0.38485	49.4352	3.81821	
75	0.043	6.27	35.9	5.76060	0.44179	36.1668	2.77367	
80	0.023	3.43	36.2	6.59084	0.50266	22.6250	1.72552	
85	0.011	1.59	36.4	7.47303	0.56745	11.9419	0.90679	
90	0.004	0.62	36.6	8.40685	0.63617	5.2400	0.39653	
TOTAL						147.15	414.875	33.2714

#### 4.12. DISCUSION GENERAL DE LAS DOS TECNICAS PARA PREDECIR EL RENDIMIENTO.

En la Figura (4.4) se muestra la secuela que se debe seguir para predecir el rendimiento futuro, el cual puede ser en forma explícita o implícita. Es conveniente señalar que antes de hacer uso de cualesquiera de las dos formas para predecir el rendimiento, se comparen las predicciones para delimitar rangos de confiabilidad, en cuanto a edad, área basal, IS, etcétera.

Se menciona esto porque hay que tomar en cuenta que para la predicción implícita, se incurre en más errores de estimación al hacer las predicciones, debido a que primero se calcularon los juegos de parámetros de la función Weibull en base a los datos de las distribuciones diamétricas, después se proyectaron las variables que formaron parte de las ecuaciones de predicción de parámetros, se usó una función para estimar la altura y, finalmente, se estimó el volumen individual. A través de todo este procedimiento los errores de estimación se van acumulando.

La aseveración anterior quedó demostrada con los resultados obtenidos en los ajustes y la prueba de validación del presente trabajo. Además, desde el punto de vista práctico y de confiabilidad, es preferible usar los modelos de totalidad del rodal que los de distribuciones diamétricas.

Es posible que si los ajustes se hubieran realizado para plantaciones, en lugar de un rodal natural, los resultados serían diferentes; sobretodo en cuanto a las predicciones y validación para los modelos de distribuciones diamétricas, en los cuales se lograrían mejores ajustes debido a la distribución homogénea que hay en éstas. En cambio, para generar modelos predictores en rodales naturales, posiblemente sería conveniente utilizar modelos de árboles individuales, debido a que en este tipo de masas, existe una gran diversidad de condiciones ecológicas individuales como son: dominancia, competencia con sus vecinos,

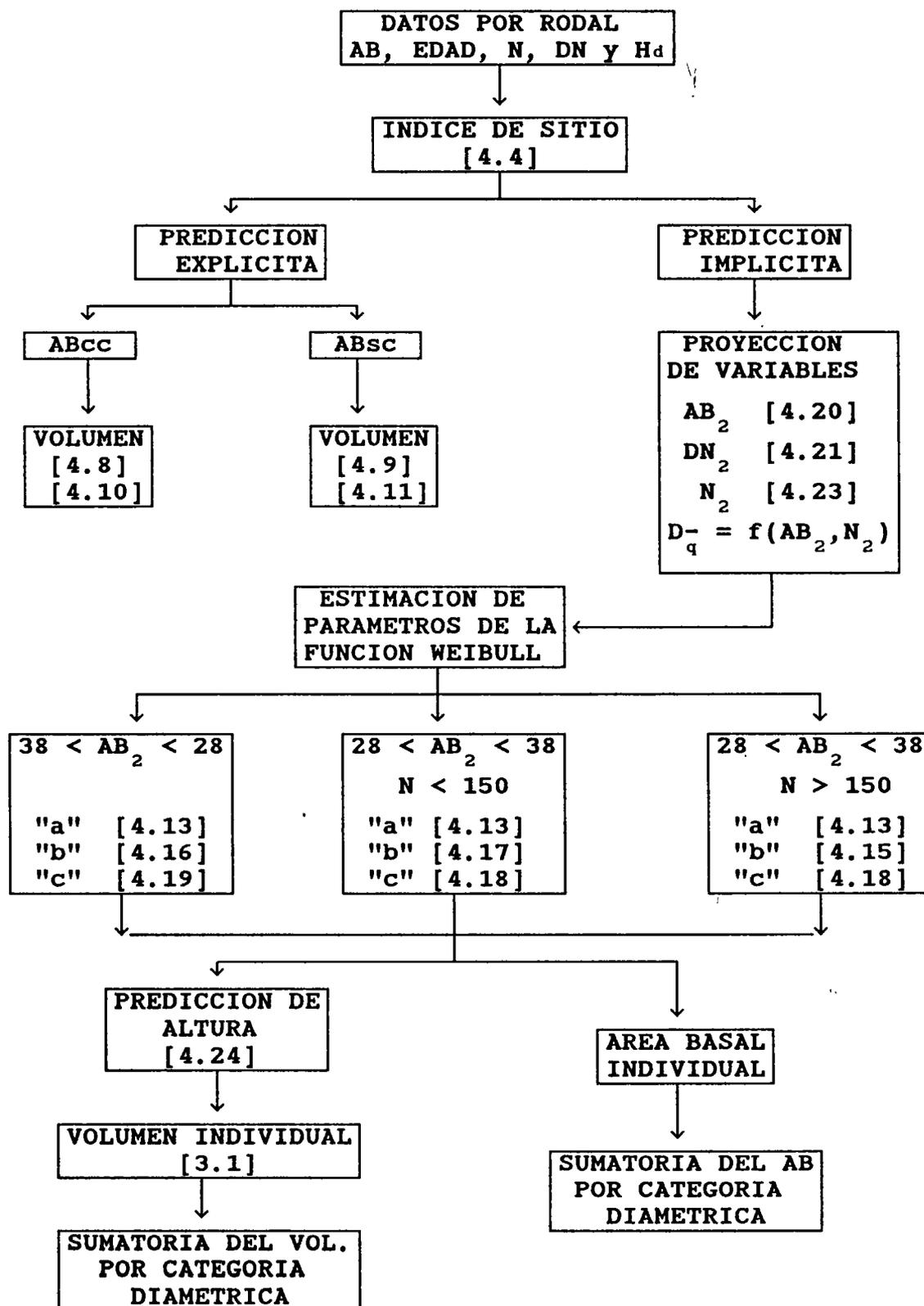


Figura 4.3. Diagrama que presenta la secuela a seguir para calcular el rendimiento futuro (volumen) en forma explícita o implícita, para *Pinus montezumae* en el CEF San Juan Tetla, Puebla.

edad, componente genético, etc., por lo que sería más conveniente hacer la predicción de las variables tomando en cuenta dichas características. Es por eso que algunos investigadores prefieran los modelos de árboles individuales para predecir el rendimiento en bosques naturales, a pesar de ser más complejos y que requieren de equipos de cómputo más avanzados que los requeridos para modelos de totalidad del rodal o de distribuciones diamétricas.

Una vez que se determinen los rangos de confiabilidad (tomando como indicador la predicción explícita) el utilizar cualesquiera de las dos técnicas que se acaban de presentar en el presente escrito, para determinar el rendimiento de un bosque; va a depender de varios factores, entre los que se pueden mencionar los siguientes: equipo de cómputo disponible, facilidad para entender las bases teóricas de la técnica, disponibilidad de la información (base de datos), tiempo para realizar los cálculos, calidad de predicción e información requerida, y los objetivos de manejo del área de estudio.

Uno de los principales problemas para utilizar técnicas más complejas en los modelos de predicción de rendimiento, es el tipo de información que se requiere para desarrollarlas. Es posible que para las condiciones de México apenas se pueda aplicar la técnica más simple, debido al tipo de información que se acostumbra levantar en los inventarios. Si la pretención es utilizar técnicas más complicadas, primeramente se debe generar la información adecuada, lo cual resulta en un gasto económico mayor y la actividad forestal que se practica en el país, aun no lo permite. Ya que aun seguimos aprovechando bosques naturales que ni siquiera hemos cultivado.

## 5. CONCLUSIONES.

-Se determinó que las predicciones del crecimiento y rendimiento se pueden estimar en forma explícita e implícita para, con resultados satisfactorios, para este tipo de rodales.

-Se determinó en base a los ajustes y la validación, que la predicción explícita proporciona mejor confiabilidad en las predicciones del rendimiento futuro.

-En la predicción explícita, se observó que se obtienen mejores resultados en cuanto a confiabilidad, cuando se usa la variable área basal sin corteza en lugar del área basal con corteza (modelos 4.9 y 4.11 en comparación con los modelos 4.8 y 4.10).

-El procedimiento que se utilizó para ajustar los modelos que predicen los parámetros de la Weibull, el cual consistió en intercambiar juegos de parámetros, dió buenos resultados, ya que los ocho modelos que se ajustaron, presentaron estadísticas favorables.

-En la validación de los modelos de predicción del rendimiento y proyección de variables, se lograron resultados satisfactorios.

-Con los modelos que se generaron en el presente trabajo, se puede integrar un sistema de manejo para el área y especie en estudio, de tal manera que se puedan comparar diferentes alternativas para seleccionar las mejores, dependiendo de los objetivos del manejo.

## 6. LITERATURA CITADA.

- AGUIRRE B., C. 1987. Stand average and distribution growth and yield. Ph. D. Dissertation. Colorado State University. 110 p.
- AGUIRRE C., O. A. 1984. Estimación de índices de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en la Región de Iturbide, Nuevo León. Tesis de Ing. Agr. Esp. en Bosques. Departamento de Bosques. UACH. Chapingo, México. 71 p.
- ARTEAGA M., B. 1985. Índice de sitio para *Pinus patula* Schl et. Cham., en la región Chignahuapan-Zacatlán, Puebla. Tesis de Maestría. Programa Forestal. Colegio de Postgraduados. Chapingo. 181 p.
- BAILEY, R. L y CLUTTER, J. L. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science* 20:155-159.
- BAILEY, R. L. y DELL, T. R. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science* 19:97-104.
- BALDERAS A., M. C. y RODRIGUEZ F., R. 1989. Elaboración de tres guías de densidad para *Pinus montezumae* Lamb. en el CEF San Juan Tetla, Puebla. Tesis de Ing. Agr. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. 71 p.
- BECERRA L., F. 1986. Determinación de una guía de densidad para *Pinus patula* Schl. et Cham. en la región de Chignahuapan-Zacatlán, Pue. Tesis de Maestría. Colegio de Postgraduados. Chapingo, México. 82 p.
- BELCHER, D. M., HOLDAWAY, M. R. y BRAND, G. J. 1982. A description of stems the stand and tree evaluation and modeling system. USDA. For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC-79. North Central For. Exp. Sta.
- BENAVIDES S., J. D. 1987. Estimación de la calidad de sitio mediante índices de sitio del *Pinus michoacana cornuta* Martínez y *Pinus oocarpa* Schiede. para el A.D.F. Tapalpa, Estado de Jalisco. Tesis de Ing. Agr. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. 80 p.
- BOJORGES S., J. A. 1990. Índice de sitio para oyamel (*Abies religiosa* (H.B.K.) Schl. et Cham.) en Zoquiapan, México. Tesis de Ing. Agr. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. 57 p.
- BORDERS, B. E., BAILEY, R. L. y CLUTTER, J. L. 1988. Forest growth models: parameter estimation using real growth series. In Proceedings of the IUFRO Forest Growth Modelling and Prediction Conference, Minneapolis, MN, August 24-28, 1987. USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC-120. Vol. 2 pp. 660-667.

- BORDERS, B. E., BAILEY, R. L. y WARE, K. K. 1984. Slash pine site index from a polymorphic model by joining (splining) nonpolynomial segments with an algebraic difference method. *Forest Science* 30:411-423.
- BURCK, T. E. y NEWBERRY, J. D. 1984. A simple algorithm for moment-based recovery of Weibull distribution parameters. *Forest Science* 30:329-332.
- BURKHART, H. E. y BROOKS, T. M. 1982. Predicting growth and yield: alternative approaches and their applications. Prepared for Presentation at 31st. Annual Forestry Symposium "Predicting Growth and Yield in the Mid-South". Louisiana State University. 13 p.
- CASTILLO S., M. A. 1988. Modelo para estimación de incremento y producción maderable neta en *Pinus caribaea* var. *hondurensis* Barr. y Golf., de la Sabana, Oax. Tesis de Ing. Agr. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. 81 p.
- CLUTTER, J. L. 1963. Compatible growth and yield models for loblolly pine. *Forest Science* 9:354-371.
- CLUTTER, J. L., FORTSON, J. C., PIENAAR, L. V., BRISTER, H. G. y BAILEY, R. L. 1983. Timber management: A quantitative approach. New York, Wiley. 333 p.
- CURTIS, R. O. 1970. Stand density measures: an interpretation. *Forest Science* 16:403-414.
- CURTIS, R. O. 1972. Yield tables past and present. *Journal of Forestry* 70:28-32.
- DANIEL, T. W., HELMS, J. A. y BAKER, F. S. 1982. Principios de Silvicultura. Trad. del inglés por Ramón Elizondo Mata. McGraw-Hill. México. 492 p.
- DANIELS, R. F. y BURKHART, H. E. 1975. Simulation of individual tree growth and stand development in managed loblolly pine plantations. Division of Forestry and Wildlife Resources. Virginia Polytech. Institute and State University. FWS-5-75. 69 p.
- DAVIS, S. L. y JOHNSON, K. N. 1987. Forest management. 3a. ed. MCGRAW-HILL. USA. 730 p.
- DREW, T. J. y FLEWELLING, J. W. 1977. Some recent japanese theories of yield-density relationships and their application to monterey pine plantations. *Forest Science* 23:517-534.
- DREW, T. J. y FLEWELLING, J. W. 1979. Stand density management: an alternative approach and its application to douglas-fir plantations. *Forest Science* 25:518-532.

- DUBEY, S. D. 1967. Some percentile estimators for Weibull parameters. *Technometrics* 9:119-129.
- EK, A. R. 1971. A formula for white spruce site index curves. *Univ. Wisc. Forest. res. Notes No. 161* 2 p.
- FIERROS G., A. M. 1989. Site quality, growth and yield, and growing space occupancy by plantations of *Pinus caribaea* var. *hondurensis* in Oaxaca, México. Ph. D. Diessertation. Yale University Graduate School. 213 p.
- GARCIDUEÑAS M., A. R. 1987. Producción de biomasa y acumulación de nutrientes en un rodal de *Pinus montezumae* Lamb. Tesis de Maestría. Programa Forestal. Colegio de Postgraduados. Montecillos, México. 243 p.
- GLOVER, G. R. y HOOL, J. N. 1979. A basal area ratio predictor of loblolly pine plantation mortality. *Forest Science* 25:275-282.
- GRANEY, D. L. y BURKHART, H. L. 1973. Polimorphic site index curves for shortleaf pine in the Ouachita mountains. USDA. For. Serv. Res. Pap. SO-85 p.
- GREY, D. C. 1980. On the concept of site forestry. *South African Forestry Journal*. 113:81-83.
- GUERRA L., G. C. 1990. Análisis de algunas estrategias para la estimación del índice de sitio en rodales puros-coetáneos de *Pinus engelmannii* Carr. Tesis de Ing. Agr. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. 110 p.
- HYNK, D. M. y MOSER Jr., J. W. 1983. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions. *Forest Science* 29:85-93.
- MAS P., J. 1983. Sitios permanentes de experimentación silvícola (SPES) en bosques de coníferas. In *Primera Reunión Sobre Modelos de Crecimiento de Arboles y Masas Forestales. Publicación Especial No. 44. INIF-México.* pp. 81-105.
- MENDOZA B., M. A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. In *Primera Reunión Sobre Modelos de Crecimiento de Arboles y Masas Forestales. Publicación Especial No. 44. INIF-México.* pp. 35-45.
- MOSER Jr., J. W. y HALL, O. F. 1969. Deriving growth and yield functions for uneven-aged forest stands. *Forest Science* 15:183-188.
- PAYANDEH, B. 1974. Nonlinear site index equations for several major Canadian timber species. *Forestry Chronicle* 50:194-196.

- PIENAAR, L. V. 1965. Quantitative theory of forest growth. Ph. D. Dissertation. Univ. of Washington. 176 p.
- PIENAAR, L. V. y TURNBULL, K. J. 1973. The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. *Forest Science* 19:2-22.
- RAMIREZ M., H. 1983. Diseño de muestreo para estudios de crecimiento con base en un inventario forestal continuo. In Primera Reunión Sobre Modelos de Crecimiento de Arboles y Masas Forestales. Publicación Especial No. 44. INIF-México. pp. 137-139.
- RAMIREZ-MALDONADO, H., BAILEY, R. L. y BORDERS, B. E. 1988. Some implications of the algebraic difference approach for developing growth models. In Proceedings of the IUFRO Forest Growth Modelling and Prediction Conference, Minneapolis, MN. August 24-28, 1987. USDA. For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC-120 Vol. 2 pp. 731-738.
- RAMIREZ M., H. y FIERROS G., A. M. 1989. Estimación del crecimiento y rendimiento de *Pinus caribaea* var. *hondurensis* a través de su distribución diamétrica. In Salazar, R. (ed.). 1989. Cuarta Reunión del Grupo de Trabajo de IUFRO. Silvicultura en los Neotrópicos. Memoria. Antigua, Guatemala. 3 al 7 de Abril de 1989. CATIE, Turrialba, Costa Rica. pp. 459-474.
- REINEKE, L. H. 1933. Perfecting a stand-density index for even-aged forest. *J. of Agric. Res.* 46:627-638.
- RICHARDS, F. J. 1959. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10:290-300.
- RODRIGUEZ F., C. 1982. Determinación de la calidad de estación de *Pinus montezumae* Lamb., a través de análisis troncales en el CEF San Juan Tetla, Puebla. Tesis de Maestría. Programa Forestal. Colegio de Postgraduados. Chapingo, México. 134 p.
- RODRIGUEZ F., C. 1987. Development of a competition index for *Pinus montezumae* Lamb. in a temperate forest of México. Doctor of Forestry Dissertation. Yale University. School of Forestry. 200 p.
- RODRIGUEZ F., C. y MORENO S., R. 1982. Elaboración de tablas de volúmenes a través de análisis troncales para *Pinus montezumae* Lamb., en el C.E.F. San Juan Tetla, Puebla. Boletín Técnico No. 90. INIF-México. 37 p.
- RODRIGUEZ F., C. y ORTIZ S., C. 1982. Levantamiento de suelos del Campo Experimental Forestal "San Juan Tetla", Puebla. *Ciencia Forestal* 40:25-47.

- RZEDOWSKI, J., VELA G., L. y MADRIGAL S., X. 1986. Algunas consideraciones acerca de la dinámica de los bosques de coníferas en México. In Antología Fitogeográfica (Compilador: Guizar N., E.) Serie de Apoyo Académico No. 25. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. pp. 183-209.
- SCHREUDER, H. T., HAFLEY, W. L. y BENNETT, F. A. 1979. Yield prediction for unthinned natural slash pine stands. *Forest Science* 25:25-30.
- SCHUMACHER, F. X. 1939. A new growth curve and its applications to timber yield studies. *Journal of Forestry* 37:819-820.
- SOMERS, G. L., ODERWALD, R. G., HARMS, W. R. y LANGDON, O. G. 1980. Predicting mortality with a Weibull distribution. *Forest Science* 26:291-300.
- SULLIVAN, A. D. y CLUTTER, J. L. 1972. A simultaneous growth and yield model for loblolly pine. *Forest Science* 18:76-86.
- TORRES R., J. M. 1987. Economic analysis of several alternatives of forest management for *Pinus hartwegii*. Master Thesis. Oregon State University. 126. p.
- ZEPEDA B., E. M. 1984. Ejemplificación de tres procedimientos para caracterizar rodales por su densidad. Serie de Apoyo Académico No. 34. DiCiFo-UACH. Chapingo, México. 57 p.
- ZEPEDA B., E. M. 1990. Predictor de rendimientos maderables probables de *Pinus patula* Schiede y Deppe, de Perote, Ver., México. Tesis de Maestría. Colegio de Postgraduados. Montesillos, México. 331 p.
- ZEPEDA B., E. M. y RIVERO B., P. 1984. Construcción de curvas anamórficas de índice de sitio: ejemplificación del método de la curva guía. *Ciencia Forestal* 51:3-38.

## 7. APENDICE.

CUADRO 1. Estadísticas básicas de todas las variables que se utilizaron para generar los modelos de crecimiento y rendimiento, para *Pinus montezumae*.

VARIABLES	V A L O R			VARIANZA
	MINIMO	MAXIMO	PROMEDIO	
E1	48.800	87.100	70.470	68.734
E2	63.800	102.100	85.470	68.734
N1	108.000	260.000	182.062	865.519
N2	108.000	236.000	168.812	732.027
DN1	31.770	53.750	42.529	24.393
DN2	39.030	59.490	49.828	21.690
H1	19.320	33.260	26.518	12.366
H2	23.500	35.800	30.723	10.223
HD1	25.900	35.000	31.803	3.619
HD2	29.700	38.100	35.710	3.105
IS	21.700	34.500	28.476	5.575
AB1	20.730	41.268	29.948	26.529
AB2	25.950	48.801	37.279	35.166
ABSC1	17.510	33.778	25.118	17.598
ABSC2	19.870	37.913	28.726	21.212
DQ1	36.710	55.270	45.888	14.879
DQ2	44.620	61.180	53.170	14.203
V1	214.078	478.147	341.935	4712.314
V2	292.850	648.186	469.602	7275.800
IDR1	297.400	595.000	439.142	4484.954
IDR2	367.700	661.000	508.232	5575.056

Las variables con el número 1 se midieron en 1974, y las que presentan el 2, en 1989-90.

E = edad

N = No. árb./ha

DN = diámetro normal

H = altura

Hd = altura dominante

IS = índice de sitio

AB = área basal

ABSC = área basal sin corteza

DQ = diámetro cuadrático

V = volumen sin corteza

IDR = índice de densidad del rodal

CUADRO 2. Prueba de validación para los modelos de crecimiento y rendimiento que se ajustaron para *Pinus montezumae*; para la prueba se usaron las parcelas 11, 19, 50 y 63. Se usaron los estadísticos de prueba de t y  $R^2$  que se calculó con la expresión (3.9).

MODELOS	VARIABLE DEPENDIENTE	n	$R^2$	$t_c$
(4.7)	V	8	0.997	-0.032
(4.8)	$V_2$	4	0.766	-0.539
(4.9)	$V_2$	4	0.976	0.140
(4.10)	$V_2$	4	0.931	-0.168
(4.11)	$V_2$	4	0.976	-0.127
(4.20)	$AB_2$	4	0.966	-0.129
(4.21)	$DN_2$	4	0.880	0.223
(4.22)	$D_{q^2}$	4	0.670	0.391
(4.23)	$N_2$	4	0.856	-0.460
PREDICCION IMPLICITA	$V_2$ $AB_2$	4	0.885 0.902	0.263 0.166

V = rendimiento actual en el rodal

$V_2$  = rendimiento futuro

$AB_2$  = área basal proyectada a la edad  $E_2$

$DN_2$  = DN proyectado a la edad  $E_2$

$D_{q^2}$  =  $D_q$  proyectado a la edad  $E_2$

$N_2$  = número de árboles por ha proyectados a la edad  $E_2$