



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

**DIVISIÓN DE CIENCIAS FORESTALES
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN CIENCIAS FORESTALES**

**MODELOS DE CRECIMIENTO EN ALTURA COMO
INDICADORES DE PRODUCTIVIDAD DE CONÍFERAS EN
MICHOCÁN**

TESIS

Que como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIAS FORESTALES



Presenta:

MARGARITO MALDONADO ORTIZ

DIRECCION GENERAL ACADEMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXAMENES PROFESIONALES

**Bajo la supervisión de: FRANCISCO JOSÉ ZAMUDIO
SÁNCHEZ, DR.**



Chapingo, Estado de México, diciembre, 2017

**MODELOS DE CRECIMIENTO EN ALTURA COMO INDICADORES DE
PRODUCTIVIDAD DE CONÍFERAS EN MICHOACÁN**

Tesis realizada por **Margarito Maldonado Ortiz** bajo la supervisión del Comité Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN CIECIAS FORESTALES

DIRECTOR:



Dr. Francisco José Zamudio Sánchez

CO-DIRECTOR:



Dr. Martín Martínez Salvador

ASESOR:

Luz Judith R.E.

Dra. Luz Judith Rodríguez Esparza

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS	iv
LISTA DE FIGURAS	iv
DEDICATORIA	v
AGRADECIMIENTOS	vi
DATOS BIOGRÁFICOS	vii
RESUMEN GENERAL	viii
ABSTRACT	ii
1.- INTRODUCCIÓN GENERAL.....	2
1.1 Objetivo General.....	4
1.1.1 Objetivos particulares.....	4
2.- REVISIÓN DE LITERATURA	4
2.1 Modelo matemático forestal.....	4
2.2 Funciones de crecimiento forestal	5
2.3 Índice de sitio.....	7
2.4 Método para calcular curvas de índice de sitio	8
2.5 Trabajos realizados en México sobre modelos de índice de sitios	11
2.6 Modelos de crecimiento en índice de sitio aplicados en el estado de Michoacán	15
2.7 Bibliografía.....	16
3.- MODELOS CUANTITATIVOS DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE PARA <i>Pinus pseudostrobus</i> EN MICHOACÁN	21

3.1	Resumen	21
3.2	Abstract.....	22
3.3	Introducción	23
3.4	Objetivos.....	24
3.5	Materiales y Métodos.....	24
3.5.1	Área de estudio	24
3.5.2	Base de datos	25
3.5.3	Modelos.....	26
3.5.4	Método de ajuste de los modelos.....	26
3.5.5	Selección del modelo	27
3.6	Resultados y discusión	28
3.7	Conclusiones	33
3.8	Bibliografía.....	33
4.-	CONCLUSIONES GENERALES	37
5.-	ANEXOS.....	38

LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Ecuaciones dinámicas para ajustar.....	27
Cuadro 2. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de las ecuaciones..	28
Cuadro 3. Ecuaciones generadas por UMAFOR	38

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Mapa de ubicación del área de estudio	25
Figura 2. Curvas de calidad a la edad de referencia de 35 años.....	31

DEDICATORIA

A mis padres por la confianza, comprensión y el cariño que me han dado, esperando que este logro refleje el esfuerzo y el trabajo de varios años.

A mis hermanos: Francisco, Mauricio, Gaudencio, Fernando, Gelasio, Luciano, Lucio y Maurilio por sus alientos en seguir superándome.

A mis adorados sobrinos, por brindarme sus hermosas sonrisas y alegría en la familia.

A toda la familia Maldonado.

AGRADECIMIENTOS

A la **Universidad Autónoma Chapingo**, y en particular al programa de Maestría en Ciencias en Ciencias Forestales por brindarme la oportunidad de obtener un grado más.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología**, por brindarme el apoyo económico para la realización de mis estudios de la Maestría, con la ayuda otorgada hizo posible cumplir los objetivos.

Al **Dr. Francisco J. Zamudio Sánchez**, por compartir sus conocimientos y lo más importante por su extraordinaria disponibilidad para aclarar dudas, sus valiosas sugerencias en la investigación y antemano agradecer la dirección de la tesis.

Al **Dr. Martin Martínez Salvador**, por su ayuda en la obtención de los datos necesarios, además, por su disponibilidad y aporte de ideas para el desarrollo de la presente investigación.

A la **Dra. Luz Judith Rodríguez Esparza**, por la disponibilidad para realizar mejoras en el trabajo de investigación, sus comentarios constructivos ayudaron afinar detalles.

A la **Dra. Amparo Máxima Borja de la Rosa**, por todas atenciones y apoyo brindado desde mi llegada a la Maestría.

Geovanni Becerril Gonzáles y a **Saúl Viana** por el apoyo brindado en los ajustes de los modelos en los programas estadísticos.

A Cintia Lara Mejía por ser una gran amiga y por sus valiosas sugerencias.

A mis amigos por los momentos compartidos.

*En Mixteco **Kutavisa nundakani** (Agradezco a todos)*

DATOS BIOGRÁFICOS

Datos personales

Nombre: Margarito Maldonado Ortiz

Fecha de nacimiento: 22 de febrero de 1990

Lugar de nacimiento: Yosocahua, Magdalena Peñasco, Oaxaca

CURP: MAOM900222HOCLRR04

Profesión: Ingeniero Forestal

Cédula profesional: 09576792



Desarrollo académico

- Bachillerato: CECyTE EMSAD 51 en el municipio Magdalena Peñasco de 2006-2009.
- Universidad: Universidad Autónoma Indígena de México de 2009-2013, hoy Universidad Autónoma Intercultural de Sinaloa.

Después de terminar la Universidad con la especialidad de Ingeniero Forestal, entra a trabajar en el Instituto Nacional de Investigadores Forestales Agrícolas y Pecuarias en el Campo Experimental Uruapan, como administrador de certificación forestal, en la recepción, revisión y asesoría a los técnicos forestales en jornadas de certificación en los estados de Michoacán, Hidalgo, Campeche y Oaxaca. En 2016 tuvo la gran oportunidad de ingresar en el programa de estudios de posgrados de la Maestría en Ciencias en Ciencias Forestales de la Universidad Autónoma Chapingo.

RESUMEN GENERAL

Modelos de crecimiento en altura como indicadores de productividad en coníferas en Michoacán

Los modelos de crecimiento forestal representan una abstracción de la dinámica forestal, abarcando crecimiento, mortalidad y otros cambios en la composición y estructura de un sitio. Una de las herramientas que atribuye un mejor manejo forestal es la identificación de la calidad sitio. Actualmente la forma habitual de calificarla es mediante el índice de sitio, que es la altura de los árboles dominantes de un rodal a cierta edad base. En el presente estudio se generaron curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus pseudostrobus*, a una edad base de 35 años en cinco Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR) en el estado Michoacán. Se utilizaron datos provenientes de análisis tronco de árboles dominantes. Las curvas se obtuvieron por el método de diferencias algebraicas generalizada (GADA), usando dos modelos de crecimiento el de Chapman-Richards y el de Hossfeld IV, ajustando por mínimos cuadrados no lineales. Con la técnica de GADA resultó ser adecuado el ajuste para cada UMAFOR, permitiendo estimar la productividad de los rodales. Finalmente, las ecuaciones generadas solo tendrán validez de aplicación en cada una de las UMAFORES analizadas, con sus respectivos sitios con 35 años, para estimar la altura dominante y con ello calificar la productividad a través del índice de sitio.

Palabras clave: modelos de crecimiento, índice de sitio, diferencia algebraica generalizada.

ABSTRACT

Models of growth in height as indicators of productivity in conifers in Michoacán

Forest growth models represent an abstraction of forest dynamics, including growth, mortality and other changes in the composition and structure of a site. One of the tools that attributes better forest management is the identification of the quality site. Currently the usual way of grading it is by means of the site index, which is the height of the dominant trees of a stand at a certain age base. In the present study, dynamic curves of site index were generated for *Pinus pseudostrobus*, at a base age of 35 years in five Unities for Forest Management (UMAFOR) in the state of Michoacán. Data from stem analysis of dominant trees were used. The curves were obtained by the method of generalized algebraic differences (GADA), using two models of growth that of Chapman-Richards and that of Hossfeld IV, adjusting by minimum squares nonlinear. With the technique of GADA proved to be adequate adjustment for each UMAFOR, allowing estimating the productivity of the stands. Finally, the equations generated will only have validity of application in each of the UMAFORES analyzed, with their respective sites with 35 years, to estimate the dominant height and thus to classify the productivity through the site index.

Key words: growth models, site index, generalized algebraic difference.

1.- INTRODUCCIÓN GENERAL

Para lograr un manejo forestal deseable, eficiente y con miras de sustentabilidad, es necesario que los silvicultores cuenten con herramientas cuantitativas que les permitan simular y predecir los efectos posteriores del manejo que han aplicado o aplicarán.

En los bosques naturales sometidos a un manejo forestal es importante contar con modelos de crecimiento que permitan describir el desarrollo de los árboles a un cierto tiempo (Magaña-Torres, Torres-Rojo, Rodríguez-Franco, Aguirre-Díaz, & Fierros-González, 2008; Santiago-García, de los Santos-Posadas, Ángeles-Pérez, Valdez-Lazalde & Ramírez-Valverde, 2013).

La predicción del crecimiento en bosques naturales implementando modelos matemáticos a nivel regional para conocer su comportamiento a través del tiempo, ha sido ampliamente aplicable tanto en bosques regulares como en irregulares (Vargas-Larreta, 1999). De los factores más importantes que influyen en el crecimiento de los bosques forestales es la calidad de estación, ya que representa la capacidad productiva de un terreno para cierta especie. Una forma sencilla de calificar la calidad es a través del índice de sitio, que es la altura que los árboles dominantes alcanzan a una cierta edad (Clutter, Fortson, Pienaar, Brister & Bailey, 1983; Diéguez-Aranda, Grandas-Arias, Álvarez-González, & Von Gadow, 2006; Martín-Benito, Gea-Izquierdo, del Río, & Cañellas, 2008).

Tradicionalmente las curvas de índice de sitio (IS) han sido usadas para predecir el promedio de la altura a una edad de interés (edad base). El enfoque del IS es suficientemente conocido, a través de los años varios métodos de construcción de curvas de índice sitio han sido propuestos y discutidos; destacando la técnica de la curva guía, la predicción de parámetros, diferencia algebraica (Clutter *et al.*, 1983), y en años recientes se ha propuesto otro método llamado Diferencia Algebraica Generalizada (GADA) (Cieszewski & Bailey, 2000).

Una familia de curvas de índice de sitio representa un grupo de patrones de desarrollo en altura dominante con un símbolo cualitativo, asociado a cada curva, para propósitos de referencia de calidades de sitio diferentes. Dependiendo de las condiciones de la naturaleza, las curvas se han clasificado en dos grupos: anamórficos y polimórficos (Clutter *et al.*, 1983).

La planeación forestal puede mejorarse a través de una adecuada identificación de calidad de sitio, por lo que es recomendable realizar una adecuada modelación del crecimiento forestal, a través de datos de altura dominante-edad en un determinado sitio de interés puede derivarse su correspondiente curva y la plantación puede clasificarse en zonas de productividad equivalentes, siendo así posible seleccionar aquellos sitios con una mejor productividad. Muchos investigadores han discutido ventajas y desventajas en el uso de las diferentes curvas de IS, pero, a la fecha nadie argumenta sobre la superioridad real en alguna de ellas, dado que su uso es prácticamente dependiente de la especie (Magaña-Torres *et al.*, 2008).

Por lo tanto, es de suma importancia calcular la productividad de los índices de sitio para regular el aprovechamiento de los recursos forestales generando una mejor administración forestal. Debido a que los manejadores, propietarios y dueños requieren de herramientas silvícolas cuantitativas sencillas y actualizadas que sirvan de apoyo a la toma de decisiones en el manejo forestal.

En la siguiente investigación se plantean dos ecuaciones que modelan el índice de sitio y con ello generar curvas de índice de sitio para el manejo forestal maderable en los bosques templados del estado de Michoacán, considerado como uno de los tres estados en México con mayor producción forestal detrás de los estados de Durango y Chihuahua, además permitiendo que los investigadores, prestadores de servicios forestales, así como técnicos tengan mayor posibilidad de contar con herramientas *ad hoc* a las condiciones actuales de los bosques. Esto permitirá actualizar los modelos que a la fecha son utilizados en varias UMAFORES, muchos de ellos construidos para bosques vírgenes o con poco manejo silvícola.

A través de la instrumentación de herramientas cuantitativas renovadas se garantizará el cumplimiento de los principios de sostenibilidad basados, entre otros aspectos, en el uso de los modelos de índice de sitio/productividad desarrollados con bases científicas.

1.1 Objetivo General

Comparar los modelos de Chapman-Richards y Hosfeld IV sobre la especie de *Pinus pseudostrobus*, en el estado de Michoacán, para obtener una mejor administración forestal.

1.1.1 Objetivos particulares

Realizar un análisis estadístico comparativo y gráfico entre los modelos señalados en cada UMAFOR del estado de Michoacán para así seleccionar el más conveniente respecto a su ajuste al crecimiento en cada una de ellas.

Realizar una prueba de hipótesis para determinar si es necesario generar una ecuación por modelo por cada UMAFOR o si es posible generar una sola para todo el estado.

2.- REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 Modelo matemático forestal

El concepto de modelo matemático se puede definir como una representación teórica que simula el comportamiento o la actividad de un sistema, proceso o fenómeno, que incluye el uso de ecuaciones matemáticas y herramientas de cómputo. En este trabajo se utilizará dos modelos para predecir el crecimiento de los arboles a través del tiempo.

La modelación es una de las herramientas para establecer prácticas silvícolas factibles de aplicar a los bosques, y describir las características biológicas de la especie asociada al fenómeno del crecimiento, estimar la producción futura, determinar el turno óptimo de corta, así como comparar alternativas de manejo para

analizar las mejores opciones de uso de la tierra y simular prácticas silvícolas (Rodríguez-Shade *et al.*, 2010).

Vanclay (1994) menciona que los modelos de crecimiento forestal representan una abstracción de la dinámica forestal natural, abarcando crecimiento, mortalidad y otros cambios en la composición y estructural del rodal. Generalmente se usa el término de modelo de crecimiento forestal para hacer referencia un sistema de ecuaciones con una predicción de crecimiento y producción de un rodal bajo una amplia variedad de condiciones de manejo.

2.2 Funciones de crecimiento forestal

El crecimiento biológico de un árbol o de una masa forestal es el resultado de un gran número de procesos complejos que pueden representar de forma simplificada mediante modelos matemáticos teóricos o empíricos.

Las funciones de crecimiento han sido utilizadas a lo largo de los años para promover información y conocimiento sobre el comportamiento temporal de los datos concernientes al crecimiento de un organismo (Kiviste, 2002).

Las funciones más utilizadas para predecir el crecimiento de los bosques en México, han sido los modelos de Chapman-Richards, Schumacher, Korf y Hossfeld IV, principalmente para modelar diámetro (D), altura (h) y altura dominante (H) para construir curvas de índice de sitio (Ramírez, 1981).

Modelo de Chapman-Richards

El modelo de Chapman-Richards se considera una generalización del modelo de crecimiento de Von Bertalanffy, mismo que es una expresión matemática de una hipótesis que implica las causas esenciales del fenómeno de crecimiento; además, los parámetros en el modelo tienen interpretación biológica o fisiológica (Pienaar & Turnbull, 1973), características deseables para representar el crecimiento biológico de los árboles a través de una ecuación.

El modelo de crecimiento de Chapman-Richards, aplicado a índice de sitio (Clutter *et al.*, 1983), suele representarse de la siguiente forma

$$Y = B_1(1 - e^{-B_2t})^{B_3} \quad (\text{Ecuación 1})$$

donde

Y = Altura dominante (m)

t = Edad (años)

e = Es la función exponencial

B_i = Parámetros a ser estimados $i=1, 2, 3$.

Modelo de Hosfeld IV

El modelo de Hosfeld IV es una función sigmoidea, propuesta por Zeide (1993) para describir el crecimiento de los árboles. Esta función puede tomar varias formas y producir puntos de inflexión

$$Y = \frac{B_1}{1 + B_2t^{-B_3}} \quad (\text{Ecuación 2})$$

donde

Y = Altura dominante (m)

t = Edad (años)

B_i = Parámetros a ser estimados $i=1, 2, 3$.

Vanclay (1994) generalmente los modelos se elaboran para obtener estimaciones confiables del crecimiento, para generar información necesaria que permita mantener las cosechas dentro de la capacidad sustentable del bosque, además, para comparar alternativas de manejo que permitan analizar las mejores opciones de uso de la tierra, así como determinar la edad óptima de cosecha, la programación de las cortas intermedias, la estimación de la producción anual, periódica o total

durante el periodo de rotación y las clases de productos a obtener, además para un análisis financiero, para examinar los impactos del manejo forestal y de la cosecha sobre valores del bosques y, determinar un régimen de manejo que maximice el volumen maderable o el valor de la producción .

2.3 Índice de sitio

El índice de sitio (IS) es el método más comúnmente empleado para definir la calidad de estación en virtud de que proporciona estimaciones precisas de la calidad de sitio, es de relativamente bajo costo y de fácil aplicación (Cornejo-Oviedo, Pereyra-Goicochea, Mares-Arreola, Valencia-Manzo, & Flores-López, 2005; Diéguez-Aranda *et al.*, 2006; Hernández-Ramos *et al.*, 2014; Magaña-Torres *et al.*, 2008).

El IS se define como la altura máxima que alcanza un bosque o rodal de acuerdo al sitio donde se desarrolla y a una edad determinada o edad base. La altura de los árboles dominantes se utiliza como indicador de productividad ya que es la menos afectada por la densidad del rodal y el manejo, siempre y cuando las podas no sean intensas, además de que la altura de los árboles se relaciona más con la capacidad de producción de madera que cualquier otra variable del rodal (De los Santos-Posadas, Montero-Mata, & Kanninen, 2006; González, Anta, Aranda, & Rojo, 2004).

La principal tarea de los forestales ha sido estimar la producción de los bosques y, lo que es más complejo, predecirla con suficiente antelación. Por lo que se utiliza el término de calidad de estación que se define como la capacidad productiva de un sitio, para el crecimiento de los árboles de una determinada especie como respuesta a la totalidad de las condiciones ambientales existentes (Clutter *et al.*, 1983). La forma más frecuente de referenciar la calidad de estación utilizando la relación altura dominante-edad en rodales es utilizar el denominado índice de sitio, que se define como el valor de su altura dominante a una edad determinada edad base o de referencia. Además, implica desarrollar un conjunto de curvas que presentan diferentes patrones de crecimiento en altura en función a la edad, cada una de éstas con valor asignado a la altura alcanzada a cierta edad de referencia.

Es importante destacar la importancia de la calidad de estación, básicamente el interés es predecir el crecimiento de los árboles en el futuro, y de esta manera proponer adecuadamente una planificación y manejo en los bosques.

2.4 Método para calcular curvas de índice de sitio

Para calcular el índice de sitio se han utilizado una gran cantidad de funciones para modelar la altura de un rodal en relación al sitio con respecto a la edad, siendo modelos lineales y no lineales. Los primeros son menos flexibles y pueden requerir de una mayor cantidad de parámetros para describir las variables, dando valores pocos confiables (Cieszewski & Bella, 1989). Mientras que los modelos no lineales, en general son más flexibles y precisos, además de poder tener una interpretación biológica (Pienaar & Turnbull, 1973).

Beck (1971) y Clutter *et al.*, (1983) mencionan que los modelos de índice de sitio pueden generar un sistema de curvas *anamórficas* o *polimórficas*: las primeras se caracterizan por que guardan esa proporcionalidad entre sí, esto es que una curva con respecto a otra siempre es una proporción constante, independientemente del punto en la abscisa en que se haga la comparación, además por presentar la misma forma. Las curvas *polimórficas* pueden ser articuladas y desarticuladas, o no cruzadas y cruzadas, respectivamente. Las articuladas son curvas que guardan una relación, aunque no proporcional, y no llegan cruzarse en los intervalos de interés, mientras que las desarticuladas no tienen ninguna relación entre sí y, es posible que se crucen dentro del intervalo de interés.

Bailey y Clutter (1974) mencionan que las curvas de índice de sitio deben de cumplir una serie de propiedades, entre las que destacan son; polimorfismo, pauta de crecimiento sigmoide con un punto de inflexión, alcanzar una asíntota horizontal a edades avanzadas, tener un comportamiento lógico (es decir, la altura dominante debe ser cero a la edad cero, la curva debe ser siempre creciente), deben ser invariantes con respecto al camino de simulación (*path invariance*) y deben ser invariantes con respecto a la edad de referencia (*base-age invariance*). La condición de invarianza con respecto al camino de simulación implica que cuando se parte de

la altura dominante H_1 a la edad t_1 y se estima con las curvas el valor de la altura dominante (H_3) a la edad H_3 se debe obtener el mismo valor que si se estima primero la altura dominante H_2 a la edad t_2 y después se emplea este valor para estimar la altura dominante a la edad t_3 . La condición de invarianza con respecto a la edad de referencia implica que la forma de las curvas no debe variar sea cual sea la edad de referencia que se emplee para definir el índice de sitio. El cumplimiento de esas propiedades depende tanto de la expresión matemática del modelo empleado.

Para modelar la relación edad-altura de un árbol, que genere las curvas de índice de sitio, se han empleado muchas técnicas, la mayoría de las cuales pueden considerarse como en diferentes métodos de desarrollo (Clutter *et al.*, 1983).

a) Método de curva guía

Este método se ha utilizado para generar curvas de calidad de estación de tipo anamórficas o polimórficas. Con este método se ajusta la tendencia promedio de las alturas dominantes en todo el intervalo de edad para obtener una curva guía, a partir de ésta, se construye una familia de curvas por arriba y por debajo de ella, proporcionales entre sí. Así, cada curva representa un índice de sitio diferente (García *et al.*, 1994). Para su construcción se requieren datos provenientes de parcelas temporales de muestreo o de datos procedentes de análisis troncales.

b) Método de la diferencia algebraica y diferencia algebraica generalizada

Este método requiere de datos procedentes de análisis troncales o datos procedentes de árboles de parcelas permanentes, estos datos pueden ser utilizados con cualquier ecuación altura-edad para generar curvas anamórficas o polimórficas. El primer paso consiste en desarrollar en una forma de diferencia la ecuación que va ser ajustada, esta forma de diferencia expresa la altura remeida (H_2) como una función de la edad de remediación (E_2), de la edad inicial (E_1) y de la altura inicial (H_1) (Clutter *et al.*, 1983), en general una ecuación de diferencia tiene la siguiente forma:

$$Y_2 = f(Y_1, E_2, E_1, B)$$

donde (Y_2) es el valor de la variable definida sobre el árbol o rodal en el periodo 2 de la medición, (Y_1) es la misma variable medida en el periodo 1, (E_1) y (E_2) son las edades del árbol o rodal, correspondientes a los periodos 2 y 1, respectivamente y (B) es el vector de parámetros.

La mayoría de los modelos derivados del método de la diferencia algebraica son anamórficos o tiene una asíntota (Cieszewski & Bailey, 2000). Sin embargo, Cieszewski y Bailey (2000) introdujeron una generalización a esta técnica, conocida como el enfoque de las ecuaciones de diferencia algebraica generalizada (GADA, *Generalized Algebraic Difference Approach*). La principal ventaja de esta técnica propuesta es que el modelo base utilizado puede ser expandido permitiendo que dos de sus parámetros varíen con las condiciones específicas de la calidad del sitio, haciendo posible derivar ecuaciones dinámicas más flexibles que las obtenidas con la técnica ADA, además de que las curvas generadas por medio de éstas ecuaciones pueden ser a la vez polimórficas y tener múltiples asíntotas (Cieszewski, 2002).

c) Método de predicción de parámetros

Este método refleja las tasas variantes de crecimiento en altura para diferentes sitios, donde la altura está en función de la edad del rodal o índice de sitio (Clutter *et al.*, 1983). En el ajuste de curvas de índice de sitio por este método, también se requieren datos procedentes de remediciones de árboles en parcelas permanentes, o de análisis troncales. El procedimiento consiste en lo siguiente:

- ajustar una función de altura-edad a los datos de árboles o sitios,
- utilizar cada curva ajustada para asignar el valor del índice de sitio que le corresponda a cada árbol o sitio,
- relacionar los parámetros de las curvas ajustadas con los índices de sitio, a través de procedimientos de regresión,
- cuando existen diferentes tratamientos silviculturales, preparación del sitio, aplicación de fertilización y control de la vegetación, los parámetros (B_i) de

respuesta en altura dominante son valores esperados por sitio, que están en función de los tratamientos aplicados (Hall & Bailey, 2001).

2.5 Trabajos realizados en México sobre modelos de índice de sitios

En México se han encontrado publicaciones en tesis y revistas científicas acerca de índice de sitio, haciendo uso de curvas anamórficas y polimórficas con diferentes métodos, destacando la curva guía, ADA (método de ecuaciones diferenciales) y el método paramétrico. Una de los primeros fue desarrollada por Rincón-Gallardo (1976) para una tabla de producción en *Pinus hartwegii* en Zoquiapan, Estado de México.

Años después, Aguirre (1984), hizo un estudio de índice de sitio empleando la técnica de predicción de parámetros, con la finalidad de clasificar el potencial productivo de rodales de *P. pseudostrobus*, en la región de Iturbide, Nuevo León, utilizando 72 árboles provenientes de análisis troncales, los cuales se ajustaron a siete modelos, siendo la ecuación desarrollada a partir del modelo de Richards (Modificado) la que registro los mejores resultados, obteniendo curvas polimórficas

$$Y = 1.5846IS^{0.9349}(1 - \exp(0.0357t))^{0.7844IS^{0.2217}}$$

donde

Y = Altura dominante (m)

IS = Índice de sitio (m)

exp = Función exponencial

t = Edad (años).

Posteriormente Aguirre y Smith (1986) evaluaron el crecimiento, rendimiento e índice de sitios de masas naturales de *P. patula* en Perote, Veracruz, tomaron datos de 162 parcelas ubicadas en 54 masas diferentes para desarrollar ecuaciones de

estimación. Empleando el método de la curva guía en una función de tipo Chapman-Richards con datos de altura dominante y edad, obteniendo curvas anamórficas

$$IS = Y \left[\frac{1 - \exp(-0.076942 t_0)}{1 - \exp(-0.076942 t)} \right]^{1.95618}$$

donde

Y = Altura dominante (m)

IS = Índice de sitio (m)

t = Edad (años)

t_0 = Edad referencia (edad base).

Monroy (1996) usó la técnica de la curva guía, mediante la función de Schumacher, mediante datos de edad-altura de análisis troncales de 72 árboles, obteniendo curvas tipo anamórficas para *P. patula* en la región de Huayacocotla, Veracruz

$$\ln(IS) = \ln(Y) + 14.8520(t^{-1} - t_0^{-1})$$

donde

IS = Índice de sitio

Y = Altura dominante (m)

t = Edad (años)

t_0 = Edad referencia (edad base).

Rodríguez-Acosta y Arteaga-Martínez (2005), estimaron el índice de sitio de *P. chiapensis* en el estado de Veracruz y en Puebla, mientras que Santiago-García *et al.*, (2013), trabajaron con *P. patula* en el estado de Hidalgo

$$IS = 36.9361(1 - \exp(-0.0755t)) \left[\frac{\ln(Y/36.9361)}{\ln(1 - \exp(-0.0755t_{ref}))} \right]$$

$$IS = Y \left[\frac{1 + \exp(4.2347) \exp(-1.3958 \ln(t))}{1 + \exp(4.2347) \exp(-1.3958 \ln(t_{ref}))} \right]$$

Vargas-Larreta, Álvarez-González, Corral-Rivas, y Aguirre-Calderón (2010) compararon dos procedimientos (variables artificiales o *dummy approach* y el método iterativo o *nested iterative procedure*) con la técnica de diferencias algebraicas generalizadas GADA, para la construcción de curvas dinámicas de índice de sitio de *P. cooperi* Blanco, obtuvieron las curvas de índice de sitio derivadas del modelo de Chapman-Richards, finalmente concluyeron que el mejor procedimiento es el método iterativo

$$H_1 = H_0 \left[\frac{1 - \exp(-0.0174t_1)}{1 - \exp(-0.0174t_0)} \right]^{1.9050 + 11.2228/X}$$

donde H_1 es la altura predicha (m) a la edad t (años), y

$$X = \frac{1}{2} \left\{ \ln(H_0) + 1.9050L_0 \pm \sqrt{(-1.9050L_0 - \ln(H_0))^2 - 4 * 11.2228L_0} \right\}$$

$$L_0 = \ln[1 - \exp(0.0174t_0)]$$

donde

H_0 = Altura dominante

t_0 = Edades iniciales.

Por otro lado, la productividad con base a la altura dominante se destaca en el trabajo de Castillo López *et al.*, (2013) que presentan un estudio de modelos compatibles en altura dominante-índice de sitios de *P. arizonica*, *P. durangensis*, *P. leiophylla* y *P. teocote* en la región de Santiago Papasquiario, Durango, ajustaron usando los modelos de Korf, Hossfeld IV y Bertalanffy-Richards, utilizando el método de diferencias algebraicas generalizadas. De acuerdo el análisis recomienda el modelo de Bertalanffy-Richards para calificar la calidad de estación de las cuatro taxa. Así como el de Vargas-Larreta, Aguirre-Calderon, Corral-Rivas,

Crecente-Campo, y Diéguez-Aranda (2013) donde utilizaron el método de la diferencia algebraica generalizada y desarrollaron una ecuación de crecimiento en altura dominante para *P. pseudostrobus*, en el noreste de México, seleccionando como la más adecuada la ecuación dinámica de Korf

$$Y = \exp(X_0)\exp(-(-7.360 + 63.14/X_0)t^{-0.5589})$$

donde Y es la altura pronosticada (m) a la edad t (años),

$$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-0.5589} (-7.360 + t_0^{-0.5589} \ln(Y_0) + \sqrt{4 * 63.14 t_0^{-0.5589} + (-7.360) - t_0^{-0.5589} \ln(Y_0)})^2$$

donde

Y_0 = Altura (m)

t_0 = Edad (años).

Mientras que Quiñonez-Barraza *et al.*, (2015) presentan un índice de sitio con polimorfismo complejo para las masas forestales del estado de Durango, con *P. arizonica*, *P. durangensis*, *P. teocote*, *P. leiophylla* y *P. ayacahuite* juntos y por especie con variables indicadoras, y se comparó con dos ecuaciones con la técnica de diferencias algebraicas generalizadas. En su comparación indicaron que la ecuación derivada presentó mejor parsimonia en la expresión algebraica que describe la productividad del sitio y consideraron la variabilidad de la potencialidad del sitio como una función de la asíntota.

Sin embargo, a pesar de que se han generado modelos para los planes del manejo forestal, la mayoría no han sido utilizados por los responsables de los mismos, a pesar de que la normatividad en materia forestal requiere de justificación del uso de los modelos de crecimiento.

2.6 Modelos de crecimiento en índice de sitio aplicados en el estado de Michoacán

Madrigal-Huendo y Ramírez-Maldonado (1995) compararon nueve modelos empíricos para determinar índice de sitio, con datos procedentes de análisis troncales de *P. douglasiana* y *P. lawsonii* del Campo Experimental Barranca de Cupatitzio. El que mejor bondad de ajuste proporcionó fue el polimórfico de Schumacher.

En la región de Hidalgo-Zinapécuaro Madrigal-Huendo, Moreno-Chan, & Vázquez-Collazo, (2004) generaron curvas polimórficas con *P. pseudostrobus*, con el método de predicción de parámetros y la técnica de la diferencias algebraica. En sus resultados mostraron que la técnica de predicción de parámetros logró un buen ajuste con mayor fidelidad en la tendencia de los valores observados

$$Y = (32.97515 + 0.335788IS) \left[1 - \exp \left(- \left(-0.016713 + \frac{0.0017141}{IS} \right) t \right) \right]^{(1.05291 + \frac{0.025547}{IS})} .$$

Cornejo-Oviedo *et al.*, (2005) presentaron dos métodos, el método de la curva guía y estimación del parámetro, para la región de Cd. Hidalgo. Concluyeron que los índices de sitio determinados con el método de la predicción del parámetro cubrieron con mayor confiabilidad y fidelidad, y obteniendo curvas polimórficas

$$Y = (15.615 + 0.927 IS)(1 - \exp(-(0.041 - 1.1 \times 10^{-5} IS)) t)^{1.048 - 0.037} .$$

Calvillo-García, Cornejo-Oviedo, Valencia-Manzo, y Flores-López, (2005) trabajaron con el crecimiento e incremento en altura, diámetro, área basal y volumen de *P. herrerae* a través de análisis troncales de 34 árboles dominantes en la región de Cd. Hidalgo. Probaron modelos de crecimiento como el de Chapman-Richards, Gompertz, Logístico, Schumacher, Weibull y Exponencial. El modelo seleccionado para describir el crecimiento en altura fue el Chapman-Richards

$$Y = 37.18067157(1 - \exp(-0.03863296t))^{1.88674927} .$$

2.7 Bibliografía

- Aguirre-Bravo, C., & Smith, F. W. (1986). Site index and volume equations for *Pinus patula* in Mexico. *The Commonwealth Forestry Review*, 51-60.
- Aguirre C., O. A. 1984. Estimación de índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl., en la región de Iturbide Nuevo León. Tesis Profesional. Universidad Autónoma Chapingo. Chapingo, México. 71 p.
- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155–159.
- Beck, D. E. (1971). Height-growth patterns and site index of white pine in the southern Appalachians. *Forest Science*, 17(2), 252-260.
- Calvillo-García, J. C., Cornejo-Oviedo, E. H., Valencia-Manzo, S., & Flores-López, C. (2005). Estudio epidométrico para *Pinus herrerae* martínez en la región de Cd. Hidalgo, Michoacán, México. *Foresta Veracruzana*, 7(1), 2005.
- Castillo-López, A., Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Nájera-Luna, J. A., Cruz-Cobos, F., & Hernández, F. J. (2013). Modelo compatible altura- índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiario, Durango. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 4(18), 89–103. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-11322013000400007&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Clutter, J. L., Fortson, J. C., Pienaar, L. V., Brister, G. H., & Bailey, R. L. (1983). *Timber management: a quantitative approach*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 333 p.
- Cieszewski, C. J., & Bella, I. E. (1989). Polymorphic height and site index curves for lodgepole pine in Alberta. *Canadian Journal of Forest Research*, 19(9), 1151-1160.
- Cieszewski, C. J. (2002). Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *Forest Science*, 48(1).
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach:

Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1).

Cornejo-Oviedo, E. H., Pereyra-Goicochea, J. A., Mares-Arreola, O., Valencia-Manzo, S., & Flores-López, C. (2005). Índice de sitio para *Pinus montezumae* Lamb. en la región de Cd. Hidalgo, Michoacán. *Revista Fitotecnia Mexicana*, 28(3), 213–219.

De los Santos-Posadas, H. M., Montero-Mata, M., & Kanninen, M. (2006). Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonica* (Gmel). Excell en Costa Rica. *Agrociencia*, 40, 521–532.

Diéguez-Aranda, U., Grandas-Arias, J. A., Álvarez-González, J. G., & Von Gadow, K. (2006). Site quality curves for birch stands in North-Western Spain. *Silva Fennica*, 40(4), 631–644.

García, O. (1994). The state-space approach in growth modelling. *Canadian Journal of Forest Research*, 24(9), 1894-1903.

Garzón Rincón Gallardo, J. C., & Flores Rodríguez, L. J. Tabla normal de producción para *Pinus hartwegii* Lind. en la Estación Experimental Forestal de Zoquiapan, Estado de México [método estadístico].; [Pinus hartwegii Lind. normal production table at Zoquiapan forestry experimental station, Mexico State [statistical method]]. *Chapingo (México)*. (Ene-Feb 1977). (, (3), 3-15.

González, J. G. Á., Anta, M. B., Aranda, U. D., & Rojo, A. (2004). Metodología para la construcción de curvas de calidad de estación. *Cuaderno de La Sociedad Espanila de Ciencias Forestales*, 309, 303–309.

Hall, D. B., & Bailey, R. L. (2001). Modeling and prediction of forest growth variables based on multilevel nonlinear mixed models. *Forest Science*, 47(3), 311–321.

Hernández-Ramos, J., García-Magaña, J. J., Olvera-Delgadillo, E. H., Velarde-Ramírez, J. C., García-Cuevas, X., & Muñoz-Flores, H. J. (2014). Índice de sitio para plantaciones de *Pinus greggii* Engelm. en Metzititlán, Hidalgo, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales Y Del Ambiente*, XX(2), 167–176. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2013.04.016>

- Kiviste, A. (Andres). (2002). *Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal*. Madrid: Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, *Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria*.
- Madrigal-Huendo, S., & Ramírez-Maldonado, H. (1995). Comparación de nueve modelos empíricos para la determinación de índice de sitio en Michoacán. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 20(78), 35–57.
- Madrigal-Huendo, S., Moreno-Chan, J., & Vázquez-Collazo, I. (2004). Comportamiento de dos métodos en la predicción y representación gráfica del índice de sitio. *Revista Ciencia Forestal En México*, 29(95).
- Magaña-Torres, O. S., Torres-Rojo, J. M., Rodríguez-Franco, C., Aguirre -Díaz, H., & Fierros-González, A. M. (2008). Predicción de la producción y rendimiento de *Pinus rudis* Endl Aloapan, Oaxaca. *Madera Y Bosques*, 14(1), 5–19.
- Martín-Benito, D., Gea-Izquierdo, G., del Río, M., & Cañellas, I. (2008). Long-term trends in dominant-height growth of black pine using dynamic models. *Forest Ecology and Management*, 256(5), 1230–1238. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2008.06.024>
- Monroy R., C. R. (1996). Índice de sitio para *Pinus patula* Schl. et Cham. en la región de Huayacocotla, Estado de Veracruz. *Revista Ciencia Forestal En México*, 21(80), 57–77.
- Quiñonez-Barraza, G., De los Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439–454. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952015000400007&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Pienaar, L. V., & Turnbull, K. J. (1973). The Chapman-Richards generalization of Von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. *Forest Science*, 19(1), 2-22.

- Ramírez A., M. 1981. Comparación de cuatro modelos matemáticos aplicados al crecimiento forestal. *Ciencia Forestal en México*. 16(70):87-108.
- Rodríguez-Acosta, M., & Arteaga-Martínez, B. (2005). Índice de sitio para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen, en los estados de Veracruz y Puebla, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales Y Del Ambiente*, 11(1), 39–44.
- Rodríguez-Shade, L., Bravo-Iglesias, J. antonio, Torres-Cárdenas, V., Montalvo-Guerrero, J. M., Álvarez-Góngora, Y., & Mogená-Navarro, O. (2010). Mathematical Modelling of the Diameter and Height Growing of *Pinus Maestrensis* Bisse. *Revista Forestal Baracoa*, 29(2), 33–41.
- Santiago-García, W., de los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Valdez-Lazalde, J. R., & Ramírez-Valverde, G. (2013). Sistema compatible de crecimiento y rendimiento para rodales coetáneos de *Pinus patula*. *Revista fitotecnica mexicana*, 36(2), 163-172.
- Vanclay, J. K. (1994). Modelling forest growth and yield: applications to mixed tropical forests. *School of Environmental Science and Management Papers*, 537.
- Vargas-Larreta, B., Aguirre-Calderon, O. A., Corral-Rivas, J. J., Crecente-Campo, F., & Diéguez-Aranda, U. (2013). A dominant height growth and site index model for. *Agrociencia*, 47, 91–106.
- Vargas-Larreta, B., Álvarez-González, J. G., Corral-Rivas, J. J., & Aguirre-Calderón, Ó. (2010). Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* blanco. *Revista Fitotecnica Mexicana*, 33(4), 343–351.
- Vargas-Larreta, B., (1990). Caracterización de la productividad y estructura de *Pinus hartwegii* Lindl., en tres gradientes altitudinales en el cerro El Potosí, Galeana, Nuevo León. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias Forestales. Universidad Autónoma de Nuevo León. Linares Nuevo León.
- Zeide, B. (1993). Analysis of growth equations. *Forest science*, 39(3), 594-616.

3.- MODELOS CUANTITATIVOS DE CRECIMIENTO EN ALTURA DOMINANTE PARA *Pinus pseudostrobus* EN MICHOACÁN

QUANTITATIVE MODELS OF GROWTH IN DOMINANT HEIGHT FOR *Pinus pseudostrobus* IN MICHOACÁN

Margarito Maldonado-Ortiz, Francisco J. Zamudio-Sánchez

3.1 Resumen

Los modelos de índice de sitio son herramientas cuantitativas valiosas que permiten clasificar la productividad forestal maderable en los rodales. Por medio del método de las ecuaciones diferenciales generalizadas conocido como GADA se compararon dos modelos de crecimiento el de Chapman-Richards y el de Hossfeld IV conocidos ampliamente en el campo forestal. El ajuste de las ecuaciones dinámicas se realizó con procedimientos no lineales con datos de análisis troncales de *Pinus pseudostrobus* para cinco UMAFORES. Para calificar la calidad de estación de los sitios en cada UMAFOR, se analizaron los resultados estadísticos de ajuste y se realizó un análisis gráfico, resultando que el modelo de Hossfeld IV fue mejor en las UMAFORES 1603,1604 y 1608 y el modelo de Chapman Richards fue mejor en las UMAFORES de 1605 y 1607. La familia de curvas generadas resultó con precisión en la trayectoria de datos observados para la predicción de la altura dominante en todas la UMAFORES.

Palabras clave: diferencia algebraica, índice de sitio, manejo forestal, UMAFOR.

3.2 Abstract

Site index models are valuable quantitative tools for classifying timber productivity in stands. Through the method of generalized differential equations known as GADA, two growth models, Chapman-Richards and Hossfeld IV, widely known in the forestry field, were compared. The adjustment of the dynamic equations was carried out with non-linear procedures with stem analysis data of *Pinus pseudostrobus* for five UMAFORES (Unities for Forest Management). To qualify the site index of the sites for each UMAFOR, we analyzed the statistical results for adjustment, and a graphical analysis was performed the Hossfeld IV model was the best model for the 1603, 1604 and 1608 UMAFORES and the Chapman Richards model was the best model for the 1605 and 1607 UMAFORES. The family of the generated curves was in the trajectory of the observed data for the prediction of the dominant height in each UMAFOR.

Key words: algebraic difference, site index, forest management, UMAFOR

3.3 Introducción

Los modelos de crecimiento en altura son herramientas indispensables para el técnico forestal, ya que permiten clasificar los bosques a través de un índice de sitio (IS) (Vargas-Larreta, Álvarez-González, Corral-Rivas, & Aguirre-Calderón, 2010). El IS es el método más utilizado como medida de productividad forestal, por representar la máxima capacidad de cosecha de madera de un bosque en un tiempo determinado (Torres-Rojo, 2001). Las curvas de crecimiento en altura dominante representan los factores del sitio que influyen sobre el desarrollo de un grupo de árboles y dependen de múltiples factores ambientales. Para diferenciar la productividad entre los sitios es recomendable construir familias de curvas de índice de sitio en altura dominante (Pretzsch, 2009), las cuales servirán en la toma de decisiones al definir acciones para desarrollar los planes de manejo.

En el área forestal se han usado técnicas para generar curvas de índice de sitio, tales como la curva guía, estimación de parámetros, enfoque de diferencias algebraicas (ADA) y las ecuaciones diferenciales generalizadas. Este último es un nuevo procedimiento para derivar ecuaciones dinámicas, el cual se ha denominado *Generalized Algebraic Difference Approach*, por sus siglas en inglés (GADA) (Cieszewski & Bailey 2000). La ventaja de este planteamiento es que la ecuación base puede ser expandida de acuerdo con diversas teorías sobre el crecimiento, lo que permite que más de un parámetro de cada modelo dependa de la calidad de sitio y así el análisis del tipo de familias de curvas a instrumentar se vuelve más flexible (Cieszewski & Bailey, 2000; Cieszewski, 2001, 2002; Cieszewski & Strub, 2008).

A pesar de las bases científicas generadas en México con los métodos ADA y GADA (Castillo-López *et al.*, 2013; González-Méndez, Cobos-Cruz, Barraza-Quiñonez, Vargas-Larreta, & Nájera-Luna, 2016; Rodríguez-Carrillo, Cruz-Cobos, Vargas-Larreta, & Hernández, 2015), en el estado de Michoacán existe un rezago sustancial en el uso de estas herramientas metodológicas, ya que la información sobre el potencial real de sus bosques es escasa, lo que limita la

selección de modelos adecuados para la medición en un sitio, y por tanto se recurre a procedimientos que podrían sobre o sub estimar el volumen o los crecimientos e incrementos del sitio existente en un rodal.

3.4 Objetivos

El objetivo de la presente investigación fue construir curvas de calidad sitio para *Pinus pseudostrobus*, a través de los modelos de Chapman-Richards y Hossfeld IV, para cada una de las cinco Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR) del estado de Michoacán, considerando la metodología GADA.

3.5 Materiales y Métodos

3.5.1 Área de estudio

El trabajo se llevó a cabo en cinco Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR): 1603 (Coalcomán-Aguililla), 1604 (Morelia Centro), 1605 (Oriente), 1607 (Meseta purépecha) y 1608 (Pátzcuaro-Tierra Caliente) Figura 1. Todas estas unidades de manejo se encuentran ubicadas en la Sierra Madre Occidental y en el Eje Neovolcánico, en las franjas geográficas pertenecientes al estado de Michoacán, México.



Figura 1. Mapa de ubicación del área de estudio

3.5.2 Base de datos

La base de datos es propiedad del proyecto “Desarrollo de un sistema biométrico para la planeación del manejo forestal sustentable de los ecosistemas con potencial maderable en México”. Para la colecta de información se seleccionaron 30 árboles dominantes de *P. pseudostrabus* en cada UMAFOR los cuales se seleccionaron considerando diferentes pendientes, exposiciones y características de suelo para abarcar los niveles de productividad alto, medio y bajo. Los datos se obtuvieron derribando el árbol a la altura mínima posible del tocón. Posteriormente, se extrajeron secciones a la altura del tocón de (0.3 m), a 0.6 m y a la altura del diámetro normal (1.3 m). Posteriormente se extrajeron secciones transversales cada 2.54 m de longitud hasta llegar a la punta del árbol. En cada sección se midieron dos diámetros perpendiculares con y sin corteza, lo que permitió estimar el diámetro medio.

Los datos obtenidos en las muestras se graficaron a partir de la altura dominante y se compararon con la edad de cada árbol para determinar visualmente su uniformidad; lo anterior, se hizo con la finalidad de identificar el comportamiento de crecimiento mostrado por cada árbol. Después, se procedió a graficar los

resultados obtenidos en cada UMAFOR, lo cual permitió encontrar diferencias de crecimiento en cada unidad. Con base en esto se eliminaron árboles y rodajas que presentaron error de captura. Finalmente, los árboles se distribuyeron de la siguiente manera: 28 árboles en la 1603, 28 árboles para la 1604, 30 árboles en la 1605, 29 árboles en la 1607 y 28 árboles en la 1608.

3.5.3 Modelos

Se usaron dos funciones de crecimiento. La selección de éstas se realizó con base en criterios tales como: i) Flexibilidad, ii) De amplio uso en el campo forestal. Las funciones aplicadas fueron las siguientes: Chapman-Richards, $H = a_1(1 - e^{-a_2t})^{a_3}$ (Ecuación 3) y Hossfeld IV $H = \frac{a_1}{1+a_2t^{-a_3}}$ (Ecuación 4) (Diéguez-Aranda, Burkhart, & Rodríguez-Soalleiro, 2005; Vargas-Larreta, Aguirre-Calderon, Corral-Rivas, Crecente-Campo, & Diéguez-Aranda, 2013).

3.5.4 Método de ajuste de los modelos

El método empleado para el ajuste de los modelos fue, la técnica de ecuaciones diferencias generalizadas GADA, conocido como diferencias algebraicas generalizadas propuesto por Cieszewki & Bailey (2000) y para la estimación de los parámetros, se utilizó el método iterativo (*nested iterative procedure*) que es invariante con respecto a la edad de referencia descrito por Tait Cieszewki y Bella (1988). Las expresiones de los modelos dinámicos se expresan en el cuadro 1. Para corregir la autocorrelación del término de error, las ecuaciones se corrigieron con el uso de la estructura autorregresiva continua de los errores CAR(2) (Vargas-Larreta et al., 2010), el término del error se expande como: $e_{ij} = d_1\rho_1^{t_{ij}-t_{ij-1}}e_{ij-1} + d_2\rho_2^{t_{ij}-t_{ij-2}}e_{ij-2} + e_{ij}$ donde; e_{ij} = j -ésima residuo de la unidad de muestra i ; $d_k = 1$ para $j > k$ o $j = k$ ($k = 1,2$); ρ_1 es el parámetro autorregresivo de orden k a estimar; $t_{ij} - t_{ij-k}$ distancia que separa la medición j -ésima de la medición j -ésima- k en cada unidad muestral $t_{ij} > t_{ij-k}$ y es el error aleatorio. Para ajuste de los modelos se empleó el procedimiento MODEL del paquete de estadístico SAS/ETS y la paquetería NLS de *R Project* versión 3.4.1.

Cuadro 1. Ecuaciones dinámicas para ajustar.

Parámetros relacionados al sitio	Solución para X con valores iniciales en t_0 y Y_0	Ecuación dinámica
$a_1 = \exp(X)$ $a_3 = b_2 + b_3/X$	$L_0 = \ln(1 - \exp(-b_1 t_0))$ $R_0 = \sqrt{(\ln(Y_0) - b_2 L_0)^2 - 4b_3 L_0}$ $X_0 = 0.5(\ln(Y_0) - b_2 L_0 + R_0)$	$Y = Y_0 \left(\frac{1 - \exp(-b_1 t)}{1 - \exp(-b_2 t_0)} \right)^{(b_2 + b_3/X)}$ Ecuación 5
$a_1 = b_1 + X$ $a_2 = b_2/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[Y_0 - b_1 \pm \sqrt{(Y_0 - b_1)^2 + 4b_2 Y_0 t_0^{-b_3}} \right]$	$Y = \frac{b_1 + X_0}{1 + b_2/X_0 t^{-b_3}}$ Ecuación 6

donde: (Y)= altura dominante (m), t_i = edad de referencia (años), a_i = parámetros de la ecuación base mientras que b_i = parámetros globales de la ecuación GADA.

3.5.5 Selección del modelo

El criterio de selección se basó mediante los estadísticos básicos, como el coeficiente de determinación ajustado (R^2_a), la raíz del cuadrado medio del error ($RMSE$) y el Criterio de Información de Akaike (AIC) (Sharma, Brunner, Eid, & Øyen, 2011). Además se contempló el análisis número y un análisis gráfico de las curvas ajustadas sobre los datos empíricos.

$$R^2_a = 1 - \left[\frac{n - 1 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - 1 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right]$$

$$RMSE = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n - p} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$AIC = 2p + n \left[\ln \left(\frac{RSS}{n} \right) \right]$$

donde y_i y \hat{y} son los valores medidos y estimados de la variable dependiente; n es el número total de observaciones; p es el número de parámetros del modelo.

3.6 Resultados y discusión

El ajuste de los modelos ensayados y los estadísticos de la bondad de ajuste de las ecuaciones (5) y (6), (ver Cuadro 1), la mayoría de los parámetros fueron significativos, excepción en algunos parámetros de la UMAFOR 1604 y 1605 con valores mayores a 0.05 en las ecuaciones 5 y 6 respectivamente (Cuadro 2). Los modelos explicaron un 96 % de la varianza del crecimiento en altura dominante en función a la edad, y el resto de los estadísticos básicos presentaron resultados similares en las cinco UMAFORES comparando los estadísticos básicos, RMSE, IAC y R^2_a .

Cuadro 2. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de las ecuaciones.

UMA-FOR	Ec.	Parámetro	Estimación	Error estándar	Valor de t	Significancia	RMSE	R^2_a	IAC
1603	5	b_1	0.080	0.005	16	<.0001	1.729	0.973	250.692
		b_2	-18.005	5.739	-3.14	0.0019			
		b_3	75.993	20.503	3.71	0.0003			
		ρ_1	0.961	0.013	76.09	<.0001			
		ρ_2	0.931	0.014	64.45	<.0001			
1604	5	b_1	0.059	0.003	17.57	<.0001	1.408	0.984	249.238
		b_2	-2.218	1.224	-1.81	0.0707			
		b_3	17.394	4.675	3.72	0.0002			
		ρ_1	0.974	0.013	72.79	<.0001			
		ρ_2	0.908	0.013	67.99	<.0001			
1605	5	b_1	0.056	0.003	17	<.0001	1.482	0.981	302.395
		b_2	-14.750	4.492	-3.28	0.0011			
		b_3	62.015	16.358	3.79	0.0002			
		ρ_1	1.006	0.008	122.8	<.0001			
		ρ_2	0.939	0.010	96.49	<.0001			
1607	5	b_1	0.092	0.005	19.27	<.0001	1.352	0.980	192.072
		b_2	-33.720	9.386	-3.59	0.0004			
		b_3	128.699	32.244	3.99	<.0001			
		ρ_1	1.013	0.007	140.15	<.0001			
		ρ_2	0.911	0.012	76.35	<.0001			
1608	5	b_1	0.067	0.005	12.17	<.0001	1.399	0.968	126.453
		b_2	-10.564	3.427	-3.08	0.0024			
		b_3	47.592	12.375	3.85	0.0002			
		ρ_1	0.850	0.042	20.07	<.0001			
		ρ_2	0.657	0.162	4.06	<.0001			
1603	6	b_1	25.860	1.898	13.63	<.0001	1.704	0.974	244.088
		b_2	29363.510	14099.400	2.08	0.0384			
		b_3	2.698	0.135	20.02	<.0001			
		ρ_1	0.964	0.012	81.19	<.0001			
		ρ_2	0.935	0.013	69.64	<.0001			
1604	6	b_1	19.337	3.977	4.86	<.0001	1.410	0.984	250.443
		b_2	25989.860	8240.000	3.15	0.0017			
		b_3	2.216	0.092	24	<.0001			
		ρ_1	0.976	0.013	75.19	<.0001			

1605	6	ρ_2	0.911	0.013	70.25	<.0001	1.470	0.981	295.888
		b_1	37.528	2.495	15.04	<.0001			
		b_2	2048.204	1831.000	1.12	0.264			
		b_3	2.058	0.087	23.68	<.0001			
		ρ_1	1.003	0.009	117.17	<.0001			
1607	6	ρ_2	0.937	0.010	92.89	<.0001	1.358	0.980	195.121
		b_1	25.088	1.801	13.93	<.0001			
		b_2	24973.070	11713.500	2.13	0.0338			
		b_3	2.804	0.126	22.34	<.0001			
		ρ_1	1.017	0.006	156.73	<.0001			
1608	6	ρ_2	0.913	0.011	81.75	<.0001	1.361	0.970	116.126
		b_1	26.769	1.697	15.78	<.0001			
		b_2	14826.300	4697.600	3.16	0.0019			
		b_3	2.448	0.124	19.75	<.0001			
		ρ_1	0.853	0.041	21.07	<.0001			
		ρ_2	0.661	0.174	3.81	0.0002			

Con base en los criterios de bondad de ajuste del cuadro 2, en la UMAFOR 1603, el modelo de Hossfeld IV (ecuación 5) presentó mejores valores comparativamente con valores más altos en R^2_a la más alta precisión en las estimaciones con valores menores en la RMSE, IAC. Para la UMAFOR 1604 el modelo de Chapman-Richards (ecuación 6) presentó mejores valores estadísticos; sin embargo, el parámetro b_2 presentó ser no significativo, a pesar de tener un buen ajuste; situación que también ocurrió en la UMAFOR 1605, donde el modelo de Hossfeld IV presentó mejores valores estadísticos; sin embargo, el parámetro b_2 resultó ser no significativo, mientras que en la UMAFOR 1607, el modelo de Chapman-Richards fue mejor mostrando diferencias mínimas con valores menores en la RMSE, IAC y finalmente en la UMAFOR 1608 el modelo Hossfeld IV presentó mejores ajustes con valores más altos en R^2_a y con valores menores en la RMSE, IAC.

La visualización de las diferencias de los modelos para cada UMAFOR, se observa en el análisis gráfico permitiendo definir el mejor modelo, sobreponiendo las curvas generadas sobre los datos reales, para comparar su capacidad en describir la relación de altura dominante-edad (ver figura 2), para un índice de sitio de 10, 15, 20, 25, 30 y 35 m a una edad base de 35 años (turno técnico).

La figura 2 permite demostrar que las curvas ajustadas siguen la tendencia de los datos en el rango de todas las edades para cada unidad. Estas curvas son

similares encontrados para la misma especie estudiada por Vargas-Larreta *et al.*, (2013) en el noreste del país a una edad base de 40 años y González-Méndez *et al.*, (2016) en el estado de Guerrero a un edad de referencia de 15 años, lo que implica que en cada lugar existen tasas de crecimientos diferentes, debido a las variaciones de las condiciones ambientales.

Un análisis más explícito para cada UMAFOR muestran que las tendencias de crecimiento de cada modelo son biológicamente realistas, debido a que consideran un punto máximo crecimiento (asíntota), además un punto de inflexión de la curva. Por otra parte, concuerdan los trabajos reportados por Corral-Rivas, Álvarez-González, Ruíz-González, y Von-Gadow (2004) quienes generaron curvas con el método GADA en los bosques naturales en cinco taxas de *Pinus* en Durango, México, mientras que Rodríguez-Acosta y Arteaga-Martínez, (2005) trabajaron con el *P. chiapensis* en los estados de Veracruz y Puebla.

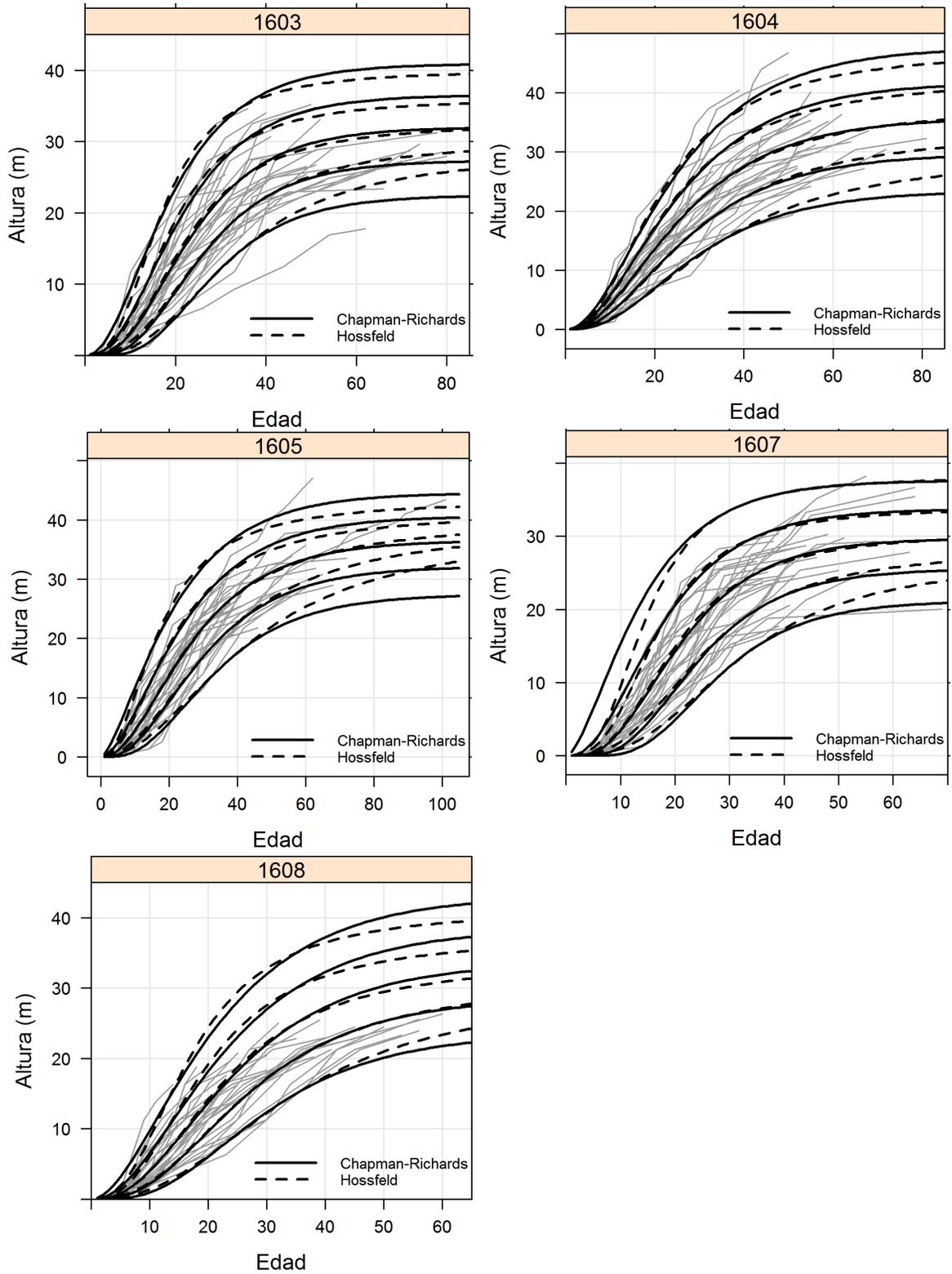


Figura 2. Curvas de calidad a la edad de referencia de 35 años.

En las UMAFORS 1603, 1604 y 1605 se determina buena calidad de estación, por lo que se podrán proponer tratamientos con mayor intensidades de corte, por la capacidad reproductiva de las unidades es buena (Hernández-Ramos *et al.*, 2014), mientras que la unidad 1607 la calidad de los rodales es regular, la curva de calidad de 35 m que califica los mejores sitios sobrestima en edades tempranas y en avanzadas, lo recomendable para esta UMAFOR es calificar el índice de sitio de 30 m como las mejores calidades para describir los rodales. Para la 1608 UMAFOR la calidad es diferente, esto indica que la capacidad productiva es baja, por lo tanto, los tratamientos silvícolas aplicados tendrán que ser más conservadores. Otro de los factores, es considerar que los datos reales provienen de árboles y rodales jóvenes que aún no desarrollan en plenitud.

Las dos ecuaciones dinámicas ensayadas, Chapman-Richards y Hossfeld IV son flexibles, debido que las curvas generadas presentan asíntota, así como, tasa de crecimiento, las cuales pueden variar con el sitio, para este caso entre las diferentes UMAFOR. La estimación precisa de la productividad de las ecuaciones para cada UMAFOR es fundamental, para proyectar el plan de manejo, además contribuye a determinar la cosecha de la madera, la rotación y la toma de decisión en la elección de las especies más adecuadas para cierta localización (Santiago-garcía *et al.*, 2015).

Para ilustrar la aplicación del método en la toma decisiones en manejo forestal, es evidente la demostración de la figura 2. Las cinco UMAFOR presentaron crecimiento de *P. pseudostrobs* diferentes, con ello se demuestra que el crecimiento de dicha especie son variados en las unidades, atribuidas por los diferentes regiones del estado, el tipo de suelo en que se desarrolla la especie de acuerdo a la UAMFOR, las características ambientales, la densidad de la masa o bien las condiciones de manejo del bosque (Martínez-Salvador, Valdez-Cepeda, & Pompa-García, 2013; Tamarit-Urias *et al.*, 2014).

Finalmente, las curvas generadas solo tendrán validez de aplicación en cada una de las UMAFOR con sus respectivos sitios con 35 años para estimar la altura dominante y con ello calificar la productividad a través del índice de sitio. Es

importante destacar que el verdadero propósito de las curvas de índice de sitio es la selección del patrón de desarrollo en altura que el rodal puede seguir durante el resto de su vida como un medio para calificar la productividad de los sitios (Clutter *et al.*, 1983).

3.7 Conclusiones

De los dos modelos ensayados en la descripción del crecimiento en altura de las UMAFOR del estado de Michoacán, el modelo de Hossfeld IV fue superior en las unidades 1603, 1604 y 1608 y mientras que la función de Chapman-Richards proporcionó mejores estimaciones en las unidades 1605 y 1607. Con las curvas de índice de sitio generadas será posible clasificar la productividad en los rodales del estado, además proporciona un apoyo en la toma de decisiones en los planes de manejo forestal para cada UMAFOR.

3.8 Bibliografía

- Castillo-López, A., Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Nájera-Luna, J. A., Cruz-Cobos, F., & Hernández, F. J. (2013). Modelo compatible altura- índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiaro, Durango. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 4(18), 89–103. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-11322013000400007&lng=es&nrm=iso&tlng=es
- Cieszewski, C. J. (2001). Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(1), 165–173. <https://doi.org/10.1139/cjfr-31-1-165>
- Cieszewski, C. J. (2002). Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *Forest Science*, 48(1).
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1).
- Cieszewski, C. J., & Strub, M. (2008). Generalized algebraic difference approach

derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from exponential and logarithmic functions. *Forest Science*, 54(3).

Cornejo-Oviedo, E. H., Pereyra-Goicochea, J. A., Mares-Arreola, O., Valencia-Manzo, S., & Flores-López, C. (2005). Índice de sitio para *Pinus montezumae* Lamb. en la región de Cd. Hidalgo, Michoacán. *Revista Fitotecnia Mexicana*, 28(3), 213–219.

Corral-Rivas, J. J., Álvarez-González, J. G., Ruíz-González, A. D., & Von-Gadow, K. (2004). Compatible height and site index models for five pine species in El Salto, Durango (Mexico). *Forest Ecology and Management*, 201(2–3), 145–160. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2004.05.060>

Clutter, J., Fortson, J., Pienaar, G., Brister, G., & Bailey, R. (1983). *Timber Management: A Quantitative Approach*. John Wiley and Sons. New York, USA. 333 p.

De los Santos-Posadas, H. M., Montero-Mata, M., & Kanninen, M. (2006). Curvas dinámicas de crecimiento en altura dominante para *Terminalia amazonica* (Gmel). Excell en Costa Rica. *Agrociencia*, 40, 521–532.

Diéguez-Aranda, U., Burkhart, H. E., & Rodríguez-Soalleiro, R. (2005). Modeling dominant height growth of radiata pine (*Pinus radiata* D. Don) plantations in north-western Spain. *Forest Ecology and Management*, 215(1–3), 271–284. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2005.05.015>

González-Méndez, M., Cobos-Cruz, F., Barraza-Quiñonez, B., Vargas-Larreta, B., & Nájera-Luna, J. A. (2016). Modelo de crecimiento en altura dominante para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el estado de Guerrero. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 7(37), 7–20.

Hernández-Ramos, J., García-Magaña, J. J., García-Cuevas, X., Hernández-Ramos, A., Muñoz-Flores, H. J., & Samperio-Jiménez, M. (2014). Índice de sitio para bosques naturales de *Pinus teocote* Schlecht. & Cham. en el oriente del estado de Hidalgo. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*,

6(27), 24–37. Retrieved from
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-11322015000100003&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Martínez-Salvador, M., Valdez-Cepeda, R. D., & Pompa-García, M. (2013). Influencia de variables físicas en la productividad de *Pinus arizonica* y *Pinus engelmannii* en el sur de Chihuahua, México. *Madera Y Bosques*, 19(3), 35–49. Retrieved from
http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-04712013000300004&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Martínez-Santiago, S. Y., Alvarado-Segura, A. A., Zamudio-Sánchez, F. J., & Cristóbal-Acevedo, D. (2017). Spatio-temporal analysis of forest modeling in Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales Y Del Medio Ambiente*, 23(1), 5–22. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2016.01.003>

Pretzsch, H. (2009). Forest Dynamics, Growth and Yield. From Measurement to Model. *Springer*. Berlin, Germany. 664 p.

Rodríguez-Acosta, M., & Arteaga-Martínez, B. (2005). Índice de sitio para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen, en los estados de Veracruz y Puebla, México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales Y Del Ambiente*, 11(1), 39–44.

Rodríguez-Carrillo, A., Cruz-Cobos, F., Vargas-Larreta, B., & Hernández, F. J. (2015). Compatible dominant height - site index model for juniper (*Juniperus deppeana* Steud.). *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales Y Del Ambiente*, XXI(1), 97–108. <https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2014.09.041>

Santiago-garcía, W., De los Santos-Posadas, H. M., Ángeles Pérez, G., Valdez Lazalde, J. R., Corral-Rivas, J. J., Rodríguez-Ortiz, G., & Elías, S.-G. (2015). Modelos de crecimiento y rendimiento de totalidad del rodal para *Pinus patula*. *Madera Y Bosques*, 21(3), 95–110.

Sharma, R. P., Brunner, A., Eid, T., & Øyen, B. H. (2011). Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short

time series and large age errors. *Forest Ecology and Management*, 262(12), 2162–2175. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2011.07.037>

Tait, D. E., Cieszewski, C. J., & Bella, I. E. (1988). The stand dynamics of lodgepole pine. *Canadian Journal of Forest Research*, 18(10), 1255-1260

Tamarit-Urias, J. C., De los Santos-Posadas, H. M., Aldrete, A., Valdez-Lazalde, J. R., Ramírez-Maldonado, H., & Guerra-De la Cruz, V. (2014). Ecuaciones dinámicas de índice de sitio para *Tectona grandis* en Campeche, México. *Agrociencia*, 48(2), 225–238. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952014000200008&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Torres-Rojo, J. M. (2001). Curvas de índice de sitio de forma y escala variables en investigación forestal. *Agrociencia*, 35(1), 87–98.

Vargas-Larreta, B., Aguirre-Calderon, O. A., Corral-Rivas, J. J., Crecente-Campo, F., & Diéguez-Aranda, U. (2013). A dominant height growth and site index model for. *Agrociencia*, 47, 91–106.

Vargas-Larreta, B., Álvarez-González, J. G., Corral-Rivas, J. J., & Aguirre-Calderón, Ó. (2010). Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* blanco. *Revista Fitotecnia Mexicana*, 33(4), 343–351.

4.- CONCLUSIONES GENERALES

Uno de los objetivos principales de interés de este trabajo fue comparar las dos ecuaciones dinámicas al que mejor describa el crecimiento en altura dominante, de acuerdo a los resultados obtenidos, es posible proponer una ecuación por cada UMAFOR para estimar y predecir el crecimiento de los rodales, la técnica de GADA presenta una ventaja en los Programas de Manejo Forestal para calcular el índice de sitio, las ecuaciones propuestas ayudarán a determinar la clasificación por índice de sitio de cada unidad y poseen la capacidad de ser una ecuación de proyección de crecimiento en altura.

5.- ANEXOS

Cuadro 3. Ecuaciones generadas por UMAFOR

Solución para X con valores iniciales	Ecuaciones generadas
X_0 $= \frac{1}{2} \left[Y_0 - 25.860 \right.$ $\left. \pm \sqrt{(Y_0 - 25.860)^2 + 4 * 29363.510 Y_0 t_0^{-2.698}} \right]$	$Y = \frac{25.860 + X_0}{1 + 29363.510/X_0 t^{-2.698}}$
X_0 $= \frac{1}{2} \left[Y_0 - 19.337 \right.$ $\left. \pm \sqrt{(Y_0 - 19.337)^2 + 4 * 25989.860 Y_0 t_0^{-2.216}} \right]$	$Y = \frac{19.337 + X_0}{1 + 25989.860/X_0 t^{-2.216}}$
$L_0 = \ln(1 - \exp(-0.056t_0))$ $R_0 = \sqrt{(\ln(Y_0) - (-14.750)L_0)^2 - 4(59.372)L_0}$ $X_0 = 0.5(\ln(Y_0) - (-14.750)L_0 + R_0)$	Y $= Y_0 \left(\frac{1 - \exp(-0.056t)}{1 - \exp(-14.750t_0)} \right)^{(-14.750+59.372)}$
$L_0 = \ln(1 - \exp(-0.092t_0))$ $R_0 = \sqrt{(\ln(Y_0) - (-33.720)L_0)^2 - 4(128.699)L_0}$ $X_0 = 0.5(\ln(Y_0) - (-33.720)L_0 + R_0)$	Y $= Y_0 \left(\frac{1 - \exp(-0.092t)}{1 - \exp(-33.720t_0)} \right)^{(-33.720+128.69)}$
X_0 $= \frac{1}{2} \left[Y_0 - 26.769 \right.$ $\left. \pm \sqrt{(Y_0 - 26.769)^2 + 4 * 14826.300 Y_0 t_0^{-2.448}} \right]$	$Y = \frac{26.769 + X_0}{1 + 14826.300/X_0 t^{-2.448}}$