

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

DIVISIÓN DE CIENCIAS FORESTALES



DIRECCION ACADEMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXAMENES PROFESIONALES

✓ APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CADENAS DE MARKOV
EN UNA PLANTACIÓN DE ÁRBOLES DE NAVIDAD

TESIS

QUE COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS
EN CIENCIAS FORESTALES

PRESENTA

MARÍA C. CASTILLO PANIAGUA

857721



CHAPINGO, ESTADO DE MÉXICO A 20 DE ENERO DE 1998

APLICACIÓN DE LA TEORIA DE CADENAS DE MARKOV
EN UNA PLANTACION DE ÁRBOLES DE NAVIDAD

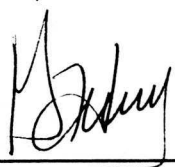
Tesis realizada por **María C. Castillo Paniagua** bajo la dirección del Comité
Asesor indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para
obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIAS FORESTALES

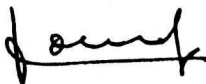
DIRECTOR:


M.C. Gabriel A. Rodríguez Yam

ASESOR:


Dr. Gerardo H. Terrazas González

ASESOR:


Dr. José Luis Romo Lozano

APLICACIÓN DE LA TEORIA DE CADENAS DE MARKOV
EN UNA PLANTACION DE ÁRBOLES DE NAVIDAD

El jurado que revisó y aprobó el examen de grado de **María C. Castillo Paniagua** autor de la presente tesis de Maestría en Ciencias en Ciencias Forestales estuvo constituido por:

PRESIDENTE:



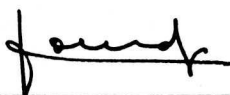
M.C. Gabriel A. Rodríguez Yam

ASESOR:



Dr. Gerardo H. Terrazas González

ASESOR:



Dr. José Luis Romo Lozano

DEDICATORIA

A mis padres

**RICARDO
MARÍA GLORIA**

Él, por su gran amor hacia nosotros, su familia y su espíritu de lucha en la vida; ella, por su amor, ternura y comprensión. A ambos, que con su amor, hicieron posible mi existencia.

A mi esposo

GABRIEL

El compañero de mi vida, por brindarme su amor, amistad, compañía, apoyo y confianza, y por todas sus enseñanzas hacía mi.

A mis hermanos

**JOSÉ ANTONIO
MARTÍN
ARACELI
ANGÉLICA MAGALI
DIANA ELIZABETH**

Por el cariño, apoyo y comprensión que existe entre nosotros y que impulsa para conseguir muchas metas en la vida.

A mi sobrino

JOSÉ RICARDO

Por su sonrisa y cariño.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Autónoma Chapingo (UACH), que a través del Programa de Postgrado de la División de Ciencias Forestales, encontré las mejores condiciones académicas para mi formación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por proporcionar los recursos financieros para realizar mis estudios de maestría.

Al **M.C. Gabriel A. Rodríguez Yam**, que por su dirección fue posible la realización del presente trabajo.

Al **Dr. Gerardo Terrazas** y **Dr. José Luis Romo Lozano** por la revisión y sugerencias hechas al presente trabajo.

Al **Dr. Felix V. González Cossío**, por sus invaluable comentarios sobre el presente trabajo.

Al **Dr. J. Francisco Zamudio Sánchez** y **M.C. Carlos Cántora González** por las sugerencias y comentarios al presente trabajo.

Al **Profesor Ernesto S. Maurer Barbier**, Director General de la Empresa el "**Bosque de los árboles de Navidad**", por permitir que la aplicación del presente trabajo se realizara con datos de las plantaciones de esta Empresa; así como al **Ing. Taide Mendoza Nava**, Director General de Producción, por todas las facilidades brindadas durante el desarrollo de la aplicación.

Al **Sr. Juan R. Fernández** y al **Dr. Fabián Islas Gutiérrez** por las atenciones dadas al presente trabajo.

CONTENIDO

	Página
DEDICATORIA	iv
AGRADECIMIENTOS	v
CONTENIDO	vi
RESUMEN	ix
ABSTRACT	x
 CAPITULO I	
 INTRODUCCIÓN	 1
 CAPITULO II	
 REVISIÓN DE LITERATURA	 4
2.1 Relación y clases de equivalencia	4
2.2 Divisibilidad	5
2.3 Sucesiones y series	7
2.4 Conceptos básicos de una Cadena de Markov	10
2.5 Clasificación de estados	13
2.6 Recurrencia	15
2.7 Conjuntos cerrados	18
2.8 Tiempos de recurrencia y transición	19
2.9 Absorción	21

2.10 Propiedades a largo plazo	23
2.11 Espacio de estados finito	25
2.12 Importancia de la descomposición canónica del espacio de estados de una Cadena de Markov.	29

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS	30
3.1 Descripción del área de estudio	30
3.1.1 Nombre del predio	30
3.1.2 Ubicación y Colindancias	30
3.1.3 Ubicación en la cuenca hidrográfica	30
3.1.4 Región hidrológica	31
3.1.5 Área forestal	31
3.1.6 Superficie forestal	31
3.1.7 Vegetación	31
3.1.8 Fauna silvestre	31
3.1.9 Clima	32
3.1.10 Hidrografía	32
3.1.11 Geología	32
3.1.12 Vías de comunicación	32
3.2 Metodología de estudio	33
3.1.1 Revisión bibliográfica	33
3.1.2 Aplicación de las metodologías propuestas	33

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN	35
4.1 Aplicación de la teoría de las cadenas de Markov	35
4.2 Objetivos del análisis	38
4.3 Definición de variables	38
4.4 Obtención de la descomposición canónica del espacio de estados	39
4.5 Probabilidades de absorción	40
4.6 Determinación de los tiempos medios de absorción	43
4.7 Determinación de la existencia a largo plazo de árboles por categoría	48
4.8 Modificación del plan actual de reemplazo	51

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES	56
--------------	----

CAPÍTULO VI

BIBLIOGRAFÍA	57
ANEXOS	60

RESUMEN

Aplicación de la Teoría de Cadenas de Markov en una plantación de árboles de Navidad

María C. Castillo Paniagua
Maestría en Ciencias Forestales
Universidad Autónoma Chapingo

El objetivo del presente trabajo es establecer un concentrado de información básica sobre las cadenas de Markov de parámetro discreto que facilite su aplicación a problemas reales de una manera fácil y completa. Se enfatiza la importancia de la descomposición canónica del espacio de estados del fenómeno en estudio para realizar los análisis.

Se aplica parte de la información proporcionada para describir la operación de una plantación forestal dedicada a la producción y venta de árboles navideños.

PALABRAS-CLAVE: Matriz de transición, propiedades de clase, recurrencia, descomposición canónica, estado absorbente, probabilidad de absorción.

ABSTRACT

MARÍA C. CASTILLO PANIAGUA

Aplicación de la Teoría de Cadenas de Markov en una plantación de árboles de Navidad

(20 de Enero de 1998)

(Under the direction of M.C. Gabriel A. Rodríguez Yam)

To examine the future behaviour of many physical situations where the probabilistic structure of the future does not depend on the whole history but only on the present, a basic bibliographic research, about Markov Chain with discrete parameter, was done.

An application of this methodology was done, using information from a forestry plantation dealt with the production and marketing of Christmas Trees.

KEY WORDS: Markov Chain, transition matrix, n-step transition probabilities, class property, recurrence, canonical decomposition, absorption probabilities, steady state.

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas que presentan variabilidad a través del tiempo pueden ser estudiados por medio de los procesos estocásticos. Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias observadas a través del tiempo con cierta estructura probabilística. Las cadenas de Markov son modelos estocásticos que se pueden usar para modelar un fenómeno con base en lo sucedido en el pasado. También se pueden usar para estudiar el comportamiento del mismo, a corto o a largo plazo. Las cadenas de Markov determinan en forma secuencial las probabilidades de que ocurran o no ciertos eventos de interés con el funcionamiento del sistema o que afectan al fenómeno en estudio.

En tiempos recientes las cadenas de Markov han cobrado mucha importancia en las ciencias biológicas por su versatilidad en usos. En ocasiones, mediante las predicciones a corto y largo plazo del comportamiento de un sistema, se puede tener una buena planeación y administración de los recursos con los que se cuenta.

Existe un gran número de referencias sobre la teoría de cadenas de Markov, pero en general los conceptos son manejados o presentados de manera abstracta. Esto limita a personas no familiarizadas con este tipo de material, de forma tal que la aplicación de estos modelos no es muy frecuente. Por el contrario, hay obras en donde el estudio es más bien superficial y limitado, por lo que su aplicación quedaría restringida a ciertos casos poco reales.

La recopilación de información sobre cadenas de Markov en este trabajo fue motivada por la inquietud de aplicar la teoría de las cadenas de Markov a un sistema forestal.

Las cadenas de Markov pueden ser de parámetro discreto o continuo. En el presente trabajo solo se consideran los conceptos básicos de cadenas de Markov de parámetro discreto.

Por esto, los objetivos que se plantearon en el presente trabajo son los siguientes:

- a) Realizar un concentrado de información sobre las cadenas de Markov de parámetro discreto en forma breve y clara de tal manera que:
 - * Contenga la información necesaria para realizar diferentes aplicaciones.
 - * Proporcione las herramientas básicas para realizar predicciones de ciertos eventos de importancia, y que permita tener un conocimiento más amplio del comportamiento del sistema.
 - * Permita tomar la mejor decisión, con base en los resultados obtenidos del análisis de Markov.
- b) Mostrar una aplicación de esta teoría en las Ciencias Forestales.

El estudio de la teoría de Cadenas de Markov hace necesario contar con conceptos previos, por lo que en las Secciones 1, 2 y 3 del capítulo de Revisión de Literatura se incluyen conceptos importantes de matemáticas que serán de utilidad en este estudio; en las Secciones de la 4 a la 10 se hace una revisión de antecedentes y conceptos básicos de las cadenas de Markov de parámetro discreto; en la Sección 11 se presenta una revisión amplia del caso

cuando el espacio de estados es finito y en la Sección 12 se recalca la importancia de obtener la descomposición canónica antes de iniciar los análisis en un problema de aplicación de esta teoría.

Con el fin de mostrar una aplicación de esta teoría, se incluye en el trabajo un ejemplo en el cual se usan varios de los conceptos proporcionados para un análisis de Markov para obtener predicciones a largo plazo y analizar el plan actual de reemplazo de los árboles que se venden. Estos análisis se llevan en una Empresa forestal denominada "Bosque de los árboles de Navidad" dedicada a la producción y venta de árboles navideños, ubicado en Amecameca, Estado de México.

Capítulo II

REVISIÓN DE LITERATURA

2.1 Relación y clases de equivalencia.

En esta Sección se revisa la definición de una relación de equivalencia, se definen las clases de una relación tal y se enuncia una propiedad importante que cumplen estas clases.

Sea A un conjunto y $a, b \in A$. Si b está relacionado (asociado) con a , se escribirá $a \sim b$; al símbolo " $\sim$ " se le denomina *relación binaria* sobre A . Se dice que una relación binaria " $\sim$ " sobre A es una *relación de equivalencia* sobre A si para a , b y c cualesquiera en A se cumple que:

- i) $a \sim a$ para todo $a \in A$
- ii) $a \sim b$ implica $b \sim a$
- iii) $a \sim b$, $b \sim c$ implica $a \sim c$. $\square$

Las propiedades de (i) a (iii) son conocidas como propiedad *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*, respectivamente, de la relación de equivalencia.

En muchos problemas de aplicación resulta necesario clasificar los elementos de un conjunto S en distintos subconjuntos $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$, donde I es un conjunto de índices. Un caso de especial interés es cuando estos subconjuntos satisfacen las condiciones siguientes:

- (i) $A_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in I$

(ii) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ para todo $\alpha \in I, \beta \in I$ tal que $\alpha \neq \beta$

(iii) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = S$

Cuando se cumplen estas tres condiciones se dice que la familia $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ constituye una *partición* para S .

Si en un conjunto A se tiene definida una relación de equivalencia " $\sim$ ", para un elemento cualquiera $a \in A$ se define su *clase de equivalencia*, denotada por $Cl(a)$, como la colección de los elementos que están relacionados con A . Es decir,

$$Cl(a) \equiv \{x \in A \mid a \sim x\}$$

Una propiedad importante que cumplen las clases de equivalencia es la siguiente (Cárdenas, et al., 1973)

2.1.2 Proposición. Las distintas clases de equivalencia de una relación de equivalencia sobre A constituyen una partición para A . $\square$

2.2 Divisibilidad

En esta Sección se revisa brevemente la divisibilidad entre números enteros.

Se dirá que el entero $b \neq 0$ es un *divisor* del entero a y se denota como $b \mid a$, si y sólo si $a = bc$ para algún entero c . Algunas propiedades de esta operación son las siguientes:

- i) Si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces $a \mid c$.
- ii) Si $a \mid 1$ entonces $a = 1$ ó $a = -1$
- iii) Si $a \mid b$ y $b \mid a$ entonces $a = b$ ó $a = -b$

iv) Si $a|b$ y $a|c$ entonces, $a|(ma+nb)$ para cualesquiera enteros m y n . En particular $a|(b+c)$ y $a|(b-c)$.

Dos aplicaciones muy importantes de la divisibilidad entre los enteros es el máximo común divisor (mcd) y la congruencia módulo n , las cuales se describen a continuación:

Cuando se tiene una colección de números enteros $a_1, a_2, \dots, a_n$, un número muy importante que resulta de estos es el *máximo común divisor*, que se define como el entero c , denotado por $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, que cumple las propiedades siguientes

1) $c|a_1, c|a_2, \dots, c|a_n$

2) cualquier divisor de $a_1, a_2, \dots, a_n$ es un divisor de c .

Una propiedad importante del mcd es que en una colección de números enteros que no todos sean cero existe y es único (Herstein, 1990).

Por otra parte, para el entero n , si $n|(b-a)$, se dirá que " a es congruente con b módulo n " y se escribirá " $a \equiv b \pmod{n}$ ". A esta relación se le llama *congruencia módulo n* . La congruencia módulo n entre los enteros es una relación de equivalencia (Herstein, 1990). Si a es un entero, a su clase de equivalencia se le denotará como $[a]$. Como se verá, las clases de equivalencia de esta relación resultan de mucha utilidad en un análisis de cadenas de Markov. La Proposición siguiente muestra una propiedad de la congruencia módulo n (Herstein, 1990).

2.2.1 Proposición. La congruencia módulo n define n distintas clases de equivalencia en el conjunto de los números enteros. Y son las clases $[0], [1], \dots, [n-1]$. $\square$

2.3 Sucesiones y series

En el estudio de cadenas de Markov, aparecen con frecuencia sucesiones y series de números reales. En esta Sección se revisa la terminología básica de sucesiones y series, con el fin de lograr una mejor comprensión de algunas propiedades de las cadenas de Markov.

2.3.1 Definición. Una *sucesión* de números reales es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos e imagen un subconjunto de los números reales. A la imagen de n se le denota con letras minúsculas con n como subíndice. Por ejemplo a_n es la imagen del entero n . A la sucesión se le denota como $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ y a a_n se le denominará el *n -ésimo término* de la sucesión. $\square$

Se dice que una sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ tiene *límite* igual a L si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe un entero positivo $N > 0$ tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo entero $n > N$. Se dirá que la sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ es *convergente* si tiene límite.

Para denotar que la sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ tiene límite L se escribirá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

También, se dice que la sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ *diverge a $+\infty$* , y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

si y sólo si para toda $M > 0$ existe $N > 0$ tal que $n \geq N$ entonces $a_n > M$.

El límite de una sucesión convergente, es único (Takeuchi, 1983). La Proposición siguiente enumera otras propiedades de sucesiones convergentes (Takeuchi, 1983; Leithold, 1992).

2.3.2 Proposición. Si $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ y $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ son dos sucesiones convergentes y $k \in \mathbb{R}$ es una constante, entonces

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} k = k$$

$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$iv) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$v) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0. \quad \square$$

Los incisos (iii) y (iv) de la Proposición 2.3.2 se pueden extender para más de dos sucesiones.

Un caso particular de una sucesión es una serie infinita, la cual se define como sigue: Sea $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión, entonces la sucesión $\{s_n, n \in \mathbb{N}\}$ cuyo n -ésimo término está definido por $s_n \equiv u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $n=1, 2, 3, \dots$ se conoce como *serie infinita* y se denota como $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Los términos u_n de la sucesión $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ se denominan *términos de la serie*. A s_n se le denomina la *n-ésima suma parcial* de la serie. Si la sucesión de sumas parciales $\{s_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge al número s , se dice que la serie tiene suma s y que la serie es *convergente*. Además, si la serie tiene suma s , se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ no existe, entonces la serie *no es convergente* y no tiene suma. Y si

la sucesión $\{s_n, n \in \mathbb{N}\}$ diverge a $+\infty$ se escribirá

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$$

Además de las sucesiones de números reales, en el presente trabajo se usan sucesiones de diversos tipos de elementos, como por ejemplo, de vectores,

funciones, subconjuntos de un conjunto, etc. En estos casos, la notación para el n -ésimo término consistirá de un elemento típico, con n como subíndice. Por ejemplo $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ denota una sucesión de vectores, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ una de funciones, etc.

El álgebra matricial resulta una herramienta importante para el análisis de una cadena de Markov. A continuación se estudia varios puntos sobre álgebra matricial y el límite de una sucesión de matrices.

Si se denota por $\mathcal{P}_{p \times q}$ la colección de matrices de orden $p \times q$ de números reales, la norma de $A \in \mathcal{P}_{p \times q}$ se define como

$$\|A\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{ij}^2}$$

Algunas propiedades de la norma matricial en $\mathcal{P}_{p \times q}$ son (Haaser, et. al., 1990)

- i) Si $A \in \mathcal{P}_{p \times q}$, entonces $\|A\| \geq 0$. Además, $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$.
- ii) $\|A^t\| = \|A\|$, $A \in \mathcal{P}_{p \times q}$
- iii) Si $A, B \in \mathcal{P}_{p \times q}$ entonces $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

La sucesión $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ de matrices en $\mathcal{P}_{p \times q}$ converge a la matriz A y se escribirá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces

$$\|A_n - A\| < \varepsilon$$

La Proposición siguiente muestra una forma útil para calcular el límite de una sucesión de matrices.

2.3.3 Proposición. Sea $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de matrices en $\mathcal{P}_{p \times q}$. Asociado a esta sucesión hay $p \times q$ sucesiones $\{a_{ij,n}, n \in \mathbb{N}\}$ de números reales, donde $a_{ij,n}$ denota la componente en el renglón i y columna j de la matriz A_n . Entonces, la matriz $A = \{a_{ij}\}_{p \times q}$ es el límite de la sucesión $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ si y sólo si las sucesiones $\{a_{ij,n}, n \in \mathbb{N}\}$ tienen límite a_{ij} . $\square$

Algunas propiedades de una sucesión de matrices que permiten estudiar algunas propiedades de las cadenas finitas de Markov se dan en la Proposición siguiente:

2.3.4 Proposición. Sean $B \in \mathcal{P}_{p \times q}$, $C \in \mathcal{P}_{r \times s}$ y $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de matrices en $\mathcal{P}_{q \times r}$. Entonces,

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^t = (\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)^t$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (BA_n) = B \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n C) = (\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) C. \quad \square$

2.4 Conceptos básicos de cadenas de Markov

En esta Sección se presentan conceptos básicos de una cadena de Markov de parámetro discreto. Se empieza definiendo un proceso estocástico, su espacio de estados y después una cadena homogénea de Markov. Se definen seguidamente las probabilidades de transición en uno y varios pasos; se definen también la distribución inicial de la cadena y la distribución de probabilidades en un tiempo $n \neq 0$.

Se define un *proceso estocástico* de parámetro discreto como una sucesión de variables aleatorias discretas $\{X_n, n \geq 0\}$ definidas en un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si $R_{X_n}, n=0,1,2,\dots$ son los recorridos de las variables aleatorias que definen el proceso estocástico $\{X_n, n \geq 0\}$, el *espacio de estados* I de este proceso se define como

$$I \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty} R_{X_n}. \quad (2.4.1)$$

A los elementos de I se les denomina *estados*.

Una cadena de Markov de parámetro discreto es un proceso estocástico $\{X_n, n \geq 0\}$ que tiene la propiedad siguiente: Para todo n y para todos los estados $i_0, \dots, i_n, i, j$, se cumple que

$$P\{X_{n+1} = j | X_0=i_0, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n=i\} \quad (2.4.2)$$

La condición (2.4.2), conocida como *propiedad Markoviana*, establece que los valores futuros del proceso cuando se conoce su estado actual, no se ven alterados por el conocimiento del comportamiento en el pasado del proceso.

Si la cadena de Markov $\{X_n\}$ de estado discreto cumple que para cualquier tiempo $t > 0$ y para toda pareja de estados i_t y i_{t-1} , $P\{X_t = i_t | X_{t-1}=i_{t-1}\}$ es independiente de t , entonces es denominada *cadena homogénea de Markov* y en este caso, a la cadena se le agregará la frase "es una C.M."

Si $\{X_n\}$ es una C.M. con espacio de estados I , la *probabilidad de transición* (en un paso) del estado i al estado j , se define como

$$p_{ij} \equiv P\{X_n = j | X_{n-1}=i\} \quad (2.4.3)$$

Las probabilidades en (2.4.3) cumplen que (Ross, 1972)

$$\forall i, j \in I: p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j \in I} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2.4.4)$$

Si $\{X_n\}$ es una C.M. con espacio de estados I , a la distribución de probabilidades $\{p_i; i \in I\}$ tal que

$$p_i \equiv P\{X_0=i\}, i \in I \quad (2.4.5)$$

se le denomina *distribución inicial* de la cadena. Esta distribución cumple que (Ross, 1972)

$$p_i \geq 0, \quad \forall i \in I \quad \text{y} \quad \sum_{i \in I} p_i = 1 \quad (2.4.6)$$

De aquí en adelante, cuando se nombre un estado, se entenderá que se tiene una C.M. y que I es su espacio de estados.

Por otra parte, si se denota como $p_{ij}^{(n)}$ la probabilidad condicional $P\{X_{n+v}=j | X_v=i\}$ de ir del estado i al estado j en n pasos, $n \geq 1$, se cumple que
(Chung, 1967)

$$p_{ij}^{(0)} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.4.7)$$

$$p_{ij}^{(1)} \equiv p_{ij} \quad (2.4.8)$$

$$p_{ij}^{(n)} \equiv \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \quad n \geq 2 \quad (2.4.9)$$

Para $i, j \in I$, a $p_{ij}^{(n)}$ se le denomina como *la probabilidad de transición de i a j en n pasos*.

Una aplicación de estas probabilidades es la determinación de la probabilidad no-condicional de que la cadena, en el tiempo n , se encuentre en el estado $i \in I$; es decir, $P\{X_n=i\}$. Esta probabilidad, que se denota por $p_i^{(n)}$, se obtiene como
(Ross, 1972)

$$p_i^{(n)} = \sum_{j \in I} p_j p_{ji}^{(n)}, \quad i \in I \quad (2.4.10)$$

Para $n > 0$, la colección $\{p_i^{(n)}; i \in I\}$ de estas probabilidades se denomina la *distribución de probabilidades de la cadena en el tiempo n* .

Otra aplicación de las probabilidades de transición en n pasos muestra que para $i \in I$ y para el entero no negativo n se cumple que

$$\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \forall i \in I$$

Una relación entre las probabilidades de transición de un estado i a un estado j , es la siguiente (Chung, 1967)

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \quad n, m \geq 0 \quad (2.4.11)$$

A (2.4.11) se le conoce como *ecuaciones de Chapman-Kolmogorov*

2.5 Clasificación de estados

Un aspecto importante cuando se analiza una C.M. es el agrupar sus estados en clases de equivalencia, usando la *relación de comunicación*. Esta relación se discute en esta Sección y además se describen las propiedades de esencialidad y periodicidad de los estados. Como se verá en esta Sección, cada estado i en una clase "comunica" estas propiedades a todos los estados de su clase.

Sean i, j dos estados en I , se dice que *el estado i accesa a j* , denotado como $i \rightsquigarrow j$, si y sólo si existe un entero positivo m tal que $p_{ij}^{(m)} > 0$. Se dice que los estados *se comunican* si y sólo si $i \rightsquigarrow j$ y $j \rightsquigarrow i$. Si dos estados i y j se comunican, se denota $i \rightsquigarrow j$. Una propiedad importante de la relación " $\rightsquigarrow$ " es que es transitiva; es decir, si $i \rightsquigarrow j$ y $j \rightsquigarrow k$ entonces $i \rightsquigarrow k$. (Chung, 1967; Resnick, 1992). Más aún, para el conjunto $I_1 \equiv \{i \in I : i \rightsquigarrow j, \text{ para algún } j \in I\}$, la relación " $\rightsquigarrow$ " en I_1 es una relación de equivalencia (Chung, 1967, Resnick, 1992). Con esta relación de equivalencia, para $i \in I_1$, su clase de equivalencia se denota como $C(i)$. Es decir,

$$C(i) \equiv \{j \in I_1 : i \rightsquigarrow j\} \quad (2.5.1)$$

De acuerdo con la Proposición 2.1.2, las distintas clases de equivalencia determinan una partición para I_1 . Obsérvese que si algún estado $i \in I$ no se comunica con otro estado j entonces, las distintas clases de equivalencia

definidas en I_1 no particionarán el espacio de estados I , pero definiendo clases "artificiales" para cada elemento $i \in I - I_1$ como

$$C(i) \equiv \{i\}$$

dejando claro que para estos conjuntos, no se cumple que $i \sim i$ entonces, se obtiene una partición de I , que consiste de las clases de equivalencia de I_1 junto con las clases "artificiales".

Por otra parte, para el estado i tal que $i \sim i$, se define su *periodo* d_i como el máximo común divisor del conjunto de números positivos n tal que $p_{ii}^{(n)} \neq 0$. Si $i \not\sim i$ no se define su periodo.

Otra propiedad importante de un estado en una Cadena de Markov es cuando posee la propiedad de comunicarse con todos los estados que accesa. Al estado i con esta propiedad se le denomina *estado esencial*. Si un estado no es esencial, se le denomina *estado inesencial*.

Como se vera más adelante estas propiedades son importantes en la conducción de los análisis de un problema de aplicación. Así por ejemplo, en algún punto del análisis habrá que conocer los periodos de cada estado. Una vez que se determina el periodo de un estado, todos los integrantes de su clase tendrán el mismo periodo. En general, cuando una propiedad se cumple para todos los elementos de una clase, a dicha propiedad se le denomina *propiedad de clase*. Además de la periodicidad, en la Proposición siguiente se tienen otras propiedades de clase (Chung, 1967).

2.5.1 Proposición. Las propiedades siguientes son propiedades de clase

(a) La propiedad de ser esencial (o inesencial).

(b) La propiedad de tener periodo d. $\square$

Después de encontrar las distintas clases de equivalencia del espacio de estados I, en algunos problemas será necesario subdividir las clases que resultan. Para lograrlo, considérese primero la Proposición siguiente (Chung, 1967):

2.5.2 Proposición. A cada $j \in C(i)$ le corresponde un único residuo de clase r_j módulo d_i de tal manera que si $p_{ij}^{(n)} > 0$ entonces $n \in [r_j]$. Más aún, existe un entero $N(j)$ tal que $\forall n \geq N(j)$ entonces $p_{ij}^{(nd_i + r_j)} > 0$. $\square$

Para clasificar los estados de la clase $C(i)$, supóngase que d es el periodo de $C(i)$. Si r es un entero no negativo menor que d , se define la *subclase* $C_r(i)$ como la colección de los estados en $C(i)$ cuyos residuos de clases es $[r]$. Simbólicamente, se tiene

$$C_r(i) \equiv \{j \in C(i) : \text{el residuo de clase que le corresponde a } j \text{ es } [r]\} \quad (2.5.2)$$

2.6 Recurrencia

En la Sección 2.5 se mencionó que los análisis que se realizan en una cadena de Markov depende, en gran medida, de las propiedades que poseen las clases. La propiedad de recurrencia, que se estudia en esta Sección, es una de las más importantes.

Sean $i, j \in I$. La probabilidad de llegar por primera vez al estado j en n pasos, dado que se empezó en el estado i se denota como $f_{ij}^{(n)}$. Algebraicamente

$$f_{ij}^{(n)} \equiv P(X_{m+1} \neq j, X_{m+2} \neq j, \dots, X_{m+n-1} \neq j; X_{m+n} = j | X_m = i) \quad (2.6.1)$$

Cuando $P(X_m = i) = 0$, la probabilidad en (2.6.1) no está definida. Chung (1967) muestra que el valor de esta probabilidad no depende de m , de aquí que propone esta otra expresión

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_v \neq j, 0 < v < n; X_n = j | X_0 = i) \quad (2.6.2)$$

Para $i \in I$ este autor denota como f_{ii}^* a la probabilidad de que la cadena regrese (alguna vez) al estado i después de salir de este. El estado i se denomina *estado recurrente* si $f_{ii}^* = 1$; si $f_{ii}^* < 1$ el estado i se denomina *no recurrente*. Chung (1967), define como g_{ii} , f_{ij}^* , y g_{ij} para $i, j \in I$ a las probabilidades siguientes:

g_{ii} : Probabilidad de que la cadena regrese infinitas veces al estado i después de salir de i .

f_{ij}^* : Probabilidad de que la cadena llegue (alguna vez) al estado j cuando abandona el estado i .

g_{ij} : Probabilidad de que la cadena llegue infinitas veces al estado j cuando abandona el estado i .

Algunos resultados importantes que relacionan a estas probabilidades entre si y con la propiedad de recurrencia de un estado, se discuten en esta Sección. La Proposición siguiente es una de ellas (Chung, 1967; Resnick, 1992)

2.6.1 Proposición. Sea I el espacio de estados de una C.M

i) Para todo $i, j \in I$ se cumple que

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad (2.6.3)$$

$$f_{ij}^* \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \quad (2.6.4)$$

ii) $g_{ii}=1$ si y sólo si el estado i es recurrente y $g_{ii}=0$ si y solo si el estado i es no recurrente.

iii) Un estado inesencial no puede ser recurrente.

iv) Si el estado i es recurrente y $i \sim j$, se cumplen las propiedades siguientes

(a) el estado j es recurrente

(b) $f_{ij}^* = 1$ y $f_{ji}^* = 1$

(c) $g_{ij} = 1$ y $g_{ji} = 1$

v) La propiedad de ser recurrente (o no recurrente) es una propiedad de clase.

vi) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

es divergente si y solo si el estado i es recurrente, y es convergente si y solo si el estado i es no recurrente. En el último caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}^*}$$

vii) Si j es no recurrente entonces, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \quad (2.6.5)$$

converge para todo i . Si j es recurrente entonces (2.6.5) es divergente si $i \sim j$ y es igual a cero si $i \not\sim j$ □

En la parte (iv) de la Proposición 2.6.1 se determina el valor f_{ij}^* si i es recurrente y $i \sim j$. La Proposición siguiente muestra como proceder en otros casos.

2.6.2 Proposición¹. Si I es un espacio de estados finito, para $i \in I$ se cumple el sistema de ecuaciones siguiente

$$f_{ij}^* = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^*, \quad j \in I \quad \square$$

2.6.3 Comentario. El número esperado de visitas que la cadena realiza al estado j cuando abandona el estado i es el valor de la serie (Ross, 1972; Resnick, 1992)

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$$

Entonces, por (vii) en la Proposición 2.6.1 si j es no recurrente, el número esperado de visitas que la cadena realiza al estado j después de abandonar el estado i , es finito. Pero si j es recurrente, entonces el número esperado de visitas que la cadena realiza al estado j después de abandonar el estado i , es infinito. $\square$

2.7 Conjuntos cerrados

El concepto de conjunto cerrado que se estudia en esta Sección es muy útil en el análisis de una C.M.

Un *conjunto cerrado* es un subconjunto no vacío de estados A que cumple la propiedad siguiente

$$\sum_{j \in A} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in A \quad (2.7.1)$$

La ecuación (2.4.4) muestra que todo espacio de estados es cerrado.

¹ Comunicación personal. Rodríguez, G. A., 1997.

Por otra parte, si A es un conjunto cerrado y $i \in A$, $j \in A^c$ entonces se cumple que (Feller, 1957)

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall n \quad (2.7.2)$$

En palabras, si el conjunto A es cerrado entonces, para todo $j \notin A$, ningún estado i en A puede acceder a j .

Un conjunto cerrado que tiene la propiedad de no contener ningún subconjunto propio cerrado, se le denomina conjunto *cerrado minimal*. En especial, si un espacio de estados es cerrado minimal, se dirá que es *irreducible*.

Hay una estrecha relación entre clases recurrentes, clases esenciales y conjuntos cerrados. Una de estas se enuncia en la Proposición siguiente (Chung, 1967).

2.7.1 Proposición. Una clase es esencial si y sólo si es un conjunto cerrado minimal. $\square$

Nótese que si C es una clase recurrente, (iii) de la Proposición 2.6.1 implica que C es una clase esencial, y por tanto un conjunto cerrado. Además, si $i \in C$ y $j \notin C$ por (2.7.2) $p_{ij}^{(n)} = 0$ para todo entero n . Entonces, por (2.6.4) se obtiene que $f_{ij}^* = 0$. Estos resultados se resumen en la Proposición siguiente:

2.7.2 Proposición Sea C una clase recurrente, entonces (a) C es un conjunto cerrado (minimal). (b) $f_{ij}^* = 0$ si $i \in C$ y $j \notin C$. $\square$

2.8 Tiempos de recurrencia y transición

Una vez que se han identificado todas las clases recurrentes y no recurrentes de un espacio de estados de una C.M, de acuerdo con la Sección 2.6, se tiene que

si la cadena se encuentra en un estado i de una clase recurrente, la probabilidad de que regrese a este estado i es 1. Además, si el estado j se encuentra en la misma clase que i , de acuerdo a (iv) de la Proposición 2.6.1, la probabilidad de que la cadena llegue a j es igual a 1. Es decir, la cadena es seguro que llegue a j . En este caso, la pregunta importante es el tiempo que le toma a la cadena llegar al estado j (a partir del estado i) y el tiempo para regresar al estado i . En términos algebraicos, sea $i \in I$ un estado recurrente e $i \sim j$, a la variable aleatoria $\tau_{ij}: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

τ_{ij} : tiempo que transcurre para que la cadena pase por primera vez al estado j dado que la cadena se encuentra inicialmente en el estado i .

se le denomina *tiempo de transición* del estado i al estado j . Su valor medio $\mu_{\tau_{ij}}$ se denomina *tiempo medio de primera transición* del estado i al estado j y se cumple que (Chung, 1979)

$$\mu_{\tau_{ij}} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

En el caso particular que $j=i$, a τ_{ii} se le denomina *tiempo de recurrencia* del estado i y a su valor medio $\mu_{\tau_{ii}}$ *tiempo medio de recurrencia* del estado i .

Si el espacio de estados es finito, para calcular estos valores medios, Hillier y Lieberman, (1982) y Davis y McKeown, (1986) resuelven el sistema de ecuaciones siguiente

$$\mu_{\tau_{ij}} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{\tau_{kj}} \quad (2.8.1)$$

Davis y McKeown aplican esta fórmula en un espacio irreducible (en cuyo caso, como se verá en la Sección 2.11, el espacio de estados consiste de una clase).

Si i es un estado recurrente y $i \sim j$, debido a que la clase $C(i)$ es recurrente, por (a) de la Proposición 2.7.2, $C(i)$ es cerrado (minimal) y se sigue que $p_{ik} = 0$ si $k \notin C(i)$. De aquí que (2.8.1) reduce a

$$\mu_{\tau_{ij}} = 1 + \sum_{k \in C(i); k \neq j} p_{ik} \mu_{\tau_{kj}} \quad (2.8.2)$$

2.9 Absorción

Cuando un estado es recurrente, la cadena no solamente regresa a éste después de abandonarlo, sino que, de acuerdo con (ii) de la Proposición 2.6.1, la probabilidad de que la cadena regresa a este estado un número infinito de veces es 1. En cambio, cuando un estado no es recurrente, por el Comentario 2.6.3, la cadena regresa a éste solo un número finito de veces. Así, cuando el espacio de estados contiene un número finito de estados no recurrentes, ocurre un fenómeno muy peculiar: Si la cadena empieza en un estado no recurrente, a largo plazo, la cadena no podrá estar en ninguno de los estados no recurrentes, pues visitará a cada uno de estos, a lo más, un número finito de veces. De aquí que la cadena, en algún momento, llegará a un estado recurrente. De acuerdo con (a) de la Proposición 2.7.2, la clase de este estado es un conjunto cerrado y en consecuencia, la cadena quedará "atrapada" en esta clase. Si el espacio de estados contiene solamente una clase recurrente y la cadena inicia en un estado no recurrente, la probabilidad de que la cadena sea "atrapada" por esta clase recurrente es 1. Pero si la cadena contiene más de una clase recurrente, la probabilidad de llegar a esta clase se discute en esta Sección. También se discute el caso particular de tener un sólo estado recurrente. En este caso cuando la cadena empieza en un estado no recurrente, no hay ninguna duda de que

llegará al estado recurrente. La incertidumbre en todo caso, es el tiempo en que esto ocurrirá. Este tiempo también se calcula en esta Sección.

Por lo expuesto anteriormente, cuando se tienen distintas clases no recurrentes, se ve que no es de mucha utilidad conocer la clase no recurrente donde la cadena inicia; sino la clase recurrente a la que llega. En consecuencia, es de utilidad agrupar las clases no recurrentes en un solo conjunto, que si se le denota como N , se obtiene la siguiente partición de I

$$I = N \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \quad (2.9.1)$$

donde N consiste de estados no recurrentes; y $C_1, C_2, \dots$ son clases recurrentes. A esta partición se le conoce como la *descomposición canónica* (d.c.) de I [N no necesariamente es una clase].

Supóngase que el conjunto N tiene un número finito de elementos, entonces para $i \in N$ y $j \in N^c$ denótese por u_{ij}^* a la probabilidad de que la cadena abandone N a través de j , dado que se encuentra en i . Entonces, a $\sum_{k \in C_\alpha} u_{ik}^*$ se le conoce como probabilidad de absorción del estado $i \in N$ por la clase recurrente C_α .

En el caso particular que I sea finito, sea q el número de estados no recurrentes y r el número de estados recurrentes. Para calcular las probabilidades u_{ij}^* , sean Q, R y U las matrices siguientes

$$Q_{q \times q} \equiv \{q_{ij} \equiv p_{ij}; i, j \in N\} \quad (2.9.2)$$

$$R_{q \times r} \equiv \{r_{kl} \equiv p_{kl}; k \in N; l \in N^c\} \quad (2.9.3)$$

$$U_{q \times r} \equiv \{u_{ij}^*; i \in N; j \in N^c\} \quad (2.9.4)$$

Si la inversa de la matriz $I-Q$ existe, se cumple que (Resnick, 1992)

$$U = (I-Q)^{-1}R \quad (2.9.5)$$

Si en la d.c. de I en (2.9.1) alguna clase recurrente consiste de sólo un estado, a este se le denomina *estado absorbente*. Un criterio muy útil para los estados absorbentes es el siguiente.

2.9.1 Proposición. El estado i es absorbente si y sólo si $p_{ii} = 1$.

Demostración. Para el caso finito véase Kemeny y Snell, (1976). $\square$

Como consecuencia de la Proposición 2.9.1, si el estado i es absorbente, por (2.8.2) se obtiene que

$$\mu_{\tau_{ii}} = 1 \quad (2.9.6)$$

Por otra parte, supóngase que la d.c. del espacio de estados de la C.M. $\{X_n\}$ es $I = N \cup \{j\}$ donde j es un estado absorbente y N contiene q estados. Si la cadena se encuentra en un estado $i \in N$, defínase la variable aleatoria $\tau_i: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue

τ_i : Número de periodos que la cadena demora en salir del conjunto N

A τ_i se le conoce como *tiempo de absorción* del estado i por el estado j y su valor esperado se denota como μ_i . Entonces, si $\underline{\mu} \equiv [\mu_1 \ \mu_2 \dots \mu_q]^t$ y Q es como en (2.9.2) y tiene inversa, se cumple que

$$\underline{\mu} = (I - Q)^{-1} \underline{1} \quad (2.9.7)$$

donde $\underline{1} \equiv [1 \ 1 \ \dots \ 1]^t$ es de orden q (Resnick, 1992 analiza un caso más general).

2.10 Propiedades a largo plazo

En esta Sección, se dan resultados para estudiar el comportamiento de las probabilidades de transición a largo plazo. El primer resultado a este respecto es el siguiente.

2.10.1 Proposición. Si i es un estado recurrente cuyo periodo es d , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{\tau_{ii}}}$$

Demostración. (Véase Chung, 1967).

Para estudiar el comportamiento de la transición entre los estados $i, j \in I$ donde j tiene periodo d , Chung, (1967) denota como $f_{ij}^*(r)$ el valor de la serie siguiente

$$f_{ij}^*(r) = \sum_{n=1, n \in [r]}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \quad (2.10.1)$$

donde r es un número entero, $[r]$ es la clase de r bajo la congruencia módulo d ; y establece la relación siguiente entre los valores $f_{ij}^*(r)$, $r=1,2,\dots,d$

$$\sum_{r=1}^d f_{ij}^*(r) = f_{ij}^* \quad (2.10.2)$$

Después de esto, el autor enuncia la Proposición siguiente, a excepción que en este trabajo se adaptó a la d.c. del espacio de estados.

2.10.2 Proposición. Sea $N \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$ la descomposición canónica de I . Si $i, j \in I$ y

(I) $j \in N$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, para todo i .

(II) si $j \in C_{\alpha}$, para algún α , y tiene periodo d_{α} . Entonces

(a) $p_{ij}^{(n)} = 0$ para todo n si $i \in C_{\beta}$, con $\alpha \neq \beta$.

(b) si $i \in C_{\alpha}$ y $j \in C_r(i)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd_j+r)} = \frac{d_{\alpha}}{\mu_{\tau_{jj}}}$$

También, $p_{ij}^{(n)} = 0$ si $n \notin [r]$.

(c) Si $i \in N$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd_j+r)} = f_{ij}^*(r) \frac{d_{\alpha}}{\mu_{\tau_{jj}}}$$

□

2.11 Espacio de estados finito

La literatura para el caso cuando el espacio de estados I es un conjunto finito es muy amplia. La discusión de este tema se puede encontrar en referencias de álgebra matricial (Searle, 1966; Bellman, 1970), probabilidad (Feller, 1957; Ross, 1972; Neuts, 1973; Ross, 1976; etc.). Algunos libros están dedicados solamente a este caso (Kemeny, et al., 1976).

Algunos libros sobre Procesos Estocásticos, donde se estudian en general las cadenas de Markov, el caso finito es solo un caso particular (Doob, 1953; Parzen, 1962; Taylor y Karlin, 1984; Coleman, 1986; Resnick, 1992). También se pueden hacer referencias a este tema en áreas donde las C.M. se aplican con regularidad como por ejemplo en Investigación de Operaciones (Hiellier y Lieberman, 1982; Taha, 1995; Anderson, et. al., 1993).

En esta Sección se presentan conceptos y resultados útiles cuando el espacio de estados I es finito. En lo que resta de este trabajo, el entero K denotará el número de estados de una C.M. finita.

A la matriz P que tiene en sus entradas las probabilidades de transición (en un paso), es decir $P \equiv \{p_{ij}\}$ se le denomina *matriz de transición (de probabilidades)* de la cadena. El vector $\underline{P}_0$ que contiene en sus entradas las probabilidades iniciales de la cadena, es decir, $\underline{P}_0 \equiv [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_K]^t$, donde $p_1, p_2, \dots, p_K$ están dados en (2.4.5) se denomina *vector inicial (de probabilidades)* de la cadena. Además, el vector $\underline{P}_n$ que tiene en sus entradas la distribución de probabilidades de la variable aleatoria X_n de la cadena, es decir, $\underline{P}_n \equiv [p_1^{(n)} \ p_2^{(n)} \ \dots \ p_K^{(n)}]$ donde $p_i^{(n)}$ está dado en (2.4.10), se llama el *vector de proporciones en el tiempo n* .

Los siguientes conceptos serán de utilidad en esta Sección: Un *vector fijo* de la matriz A es un vector $\underline{X}$ que cumple $A\underline{X} = \underline{X}$ (Obsérvese que un vector fijo es un vector característico de A que corresponde a un valor característico 1). Un *vector probabilístico* es aquel cuyas entradas son no negativas y la suma de estas es 1. Una *matriz de Markov* es aquella cuyos renglones son vectores probabilísticos. Se dirá que una matriz de Markov es regular si alguna potencia tiene todos sus términos positivos; es decir, la matriz de Markov M es regular si y solo si existe un entero $s > 0$ tal que M^s tiene todas sus entradas positivas.

Por (2.4.6), el vector inicial de probabilidades es un vector probabilístico. Lo mismo puede decirse de los vectores de proporciones en los tiempos $1, 2, 3, \dots$. También, las ecuaciones en (2.4.4) muestran que los renglones de la matriz de transición son vectores probabilísticos y por lo tanto, la matriz de transición es una matriz de Markov. Chung, 1967, relaciona las matrices de Markov con las cadenas de Markov. La propiedad que establece, adaptada a la notación empleada en esta Sección, es la siguiente:

2.11.1 Proposición. Sean I un conjunto finito, $\underline{P}_0$ un vector probabilístico y M una matriz de Markov. Entonces, existe una C.M. cuyo espacio de estados es I , su matriz de transición es M y $\underline{P}_0$ es su vector inicial. $\square$

Regresando otra vez con la matriz de transición; para $n=2$, (2.4.9) muestra que

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in I} P_{ik}^{(1)} P_{kj} = \sum_{k \in I} P_{ik} P_{kj}$$

es decir, la probabilidad de transición del estado i al estado j en dos pasos es

el producto vectorial del renglón i de la matriz de transición P con su columna j . Por lo tanto, $p_{ij}^{(2)}$ se puede consultar en el renglón i y columna j de $P^2=PP$. En general, la probabilidad de transición $p_{ij}^{(n)}$ es la entrada de la matriz P^n que se encuentra en el i -ésimo renglón y j -ésima columna. De manera similar, por (2.4.10) se concluye que el vector de proporciones en el tiempo n satisface

$$\tilde{P}_n^t = \tilde{P}_0^t P^n$$

Si la sucesión $\{\tilde{P}_n\}$ es convergente, a su límite se le conoce como *vector estacionario (de probabilidades)*. Este límite se denota como $\tilde{b}$; es decir,

$$\tilde{b} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{P}_n \quad (2.11.1)$$

Cuando el vector estacionario existe, por la Proposición 2.3.3, su i -ésima componente (b_i) es la probabilidad de que en el largo plazo, la cadena se encuentre en el estado i . Además, por la Proposición 2.3.2 se cumple que

$$b_i = p_1 \lim_{n \rightarrow \infty} P_{1i}^{(n)} + p_2 \lim_{n \rightarrow \infty} P_{2i}^{(n)} + \dots + p_K \lim_{n \rightarrow \infty} P_{Ki}^{(n)} \quad (2.11.2)$$

Por esta razón, si el estado i es no recurrente, por (I) de la Proposición 2.10.2 se obtiene que la probabilidad a largo plazo de que la cadena se encuentre en este estado es cero. Simbólicamente,

$$b_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n=i\} = 0 \quad (2.11.3)$$

Por otra parte, si la sucesión $\{P^n\}$ es convergente, su límite se denotará como Π , en símbolos

$$\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n \quad (2.11.4)$$

En la Proposición siguiente se enumeran propiedades muy importantes en un espacio de estados finito.

2.11.2 Proposición. En un espacio de estados finito se cumple que

(a) no todos los estados pueden ser no recurrentes.

(b) una clase esencial es recurrente.

(c) si Π existe, entonces es una matriz de Markov; $\underline{b}$ existe y es un vector probabilístico, es también un punto fijo de P^t y se cumple que

$$\underline{b} = \Pi^t \underline{x}_0 \quad (2.11.5)$$

(d) I es irreducible si y sólo si la d.c. de I consiste de una sola clase.

(e) Si I es irreducible, todos los estados son recurrentes. $\square$

Las C.M. que han sido más estudiadas son aquellas que tienen matriz de transición regular. La Proposición 2.11.3 siguiente permite conocer si se tiene una C.M. de estas y en la Proposición 2.11.4 se dan propiedades de estas C.M.

2.11.3 Proposición. La matriz de transición P de una C.M. es regular, entonces si el espacio de estados es irreducible y existe al menos un estado i tal que $p_{ii} > 0$. $\square$

2.11.4 Proposición. Si la matriz de transición de la C.M. es regular

a) el espacio de estados es irreducible.

b) todos los estados tienen periodo 1.

c) la clase $C(i)$ contiene una sola subclase.

d) la matriz límite Π existe y además tiene todos sus renglones iguales.

e) el vector estacionario de probabilidades existe y es independiente del vector inicial.

f) si c_j es el "costo" en que se incurre por visitar el estado j , a largo plazo, el costo promedio por unidad de tiempo asociado al proceso es

$$\sum_{j \in I} b_j c_j$$

Si la matriz de transición de una C.M. no es regular, además de las propiedades que se tienen en la Proposición 2.11.2, se cuentan también con las de la Proposición siguiente:

2.11.5. Si la matriz de transición de una C.M. finita no es regular entonces,

c) si el vector estacionario existe, no necesariamente es independiente del vector inicial.

b) la clase $C(i)$ tiene sólo una subclase si su periodo es 1.

2.12 Importancia de la d.c. del espacio de estados de una C.M.

Se ha visto en la Sección 2.11 que el vector estacionario puede no existir. Pero si existe, es un punto fijo de P^t , aunque puede no ser independiente del vector inicial P_0 . En un problema donde se desee encontrar el vector estacionario, puede resultar un error encontrarlo como un vector fijo de la matriz P^t sin saber que es independiente del vector inicial. ¿Cómo se puede verificar?. La respuesta lo da la d.c. de I . Si consiste de una sola clase y la matriz de transición es regular, la Proposición 2.11.4 resuelve el problema.

El comentario anterior; donde se observa que en un análisis de Markov, las conclusiones dependen de la d.c. del espacio de estados, muestra la importancia de encontrar esta descomposición al inicio del análisis.

C a p í t u l o I I I

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Descripción del área de estudio

3.1.1 Nombre del predio

" Bosque de los árboles de Navidad "

3.1.2 Ubicación y Colindancias

Ubicado geográficamente a 19° 05' 09" de Longitud Oeste y 98° 45' 32" Latitud Norte.

El predio se encuentra situado a 3 Km. al sur del Km. 53.5 de la carretera México-Cuautla, municipio de Amecameca, Estado de México. Teniendo las siguientes colindancias:

N: Ernesto C. Maurer	SW: Cañada Poxtla
NE: Cañada Zentlalpan	W: Ejido de Tlalmanalco, Méx.
E: Cañada Zentlalpan	NW: Ejido de Tlalmanalco, Méx.
SE: Cañada Zentlalpan	S: Cañada Poxtla.

3.1.3 Ubicación en la cuenca hidrográfica

El predio está ubicado al sureste de la cuenca del valle de México en las estribaciones del volcán Iztaccíhuatl, a una altura sobre el nivel del mar que va de los 2500 a los 2760 m con altura media de 2600 m.

3.1.4 Región hidrológica

RH26 en el municipio de Amecameca. Cuenca D; Subcuenca p (Carta hidrológica del INEGI).

3.1.5 Área forestal

De acuerdo al estudio de manejo integral presentado por la UIEF de San Rafael en Marzo de 1991, el predio se encuentra en la zona forestal I, con jurisdicción oficial del Distrito de Desarrollo Rural No. 3, Texcoco, Méx.

3.1.6 Superficie forestal

Cuenta con una superficie total de 380 ha de las cuales 230 son de vegetación forestal y 150 fueron establecidas como plantación de árboles de Navidad.

3.1.7 Vegetación

La vegetación forestal está representada principalmente por latifoliadas del género *Quercus*, también existen coníferas como *Pinus leiophylla*, *P. suedostrobis*; la presencia de *Alnus acuminata* en la zona forestal del predio es mínima. El *Arbutus sp* tiene escasa presencia en el estrato arbustivo al igual que el género *Buddleia sp*.

En el estrato herbáceo se presentan principalmente el Zacatón rastrero (*Hilaria cernchroides*) y el Zacatón de raíz (*Epicampis macroura*).

3.1.8 Fauna silvestre

Dentro del predio y en sus alrededores, existen especies con importancia ecológica, sobre todo para el equilibrio del ecosistema; entre ellas se encuentran: Conejos (*Sylvilagus sp*), armadillos (*Dasipus novemcinctus*),

lagartijas (*sceloporus sp*), zopilotes (*Coragyps atratus*), Tórtolas (*Streptopelia sp*), víboras de cascabel (*Crotalus triseriatus*) y ardillas (*Sciurus sp*).

3.1.9 Clima

Cwbg de acuerdo al sistema de clasificación de Koppen modificado por E. García. La temperatura media del mes más cálido es superior a 22° C, con una precipitación total de 800 mm anuales.

3.1.10 Hidrografía

Corrientes superficiales de temporal a través de cañadas profundas de hasta 15 m, permaneciendo secas en temporada de estiaje, que aforan a corrientes subterránea. El predio tiene sistemas de captación de agua de lluvia para riego.

3.1.11 Geología

Zona de actividad volcánica, existen rocas ígneas extrusivas e intrusivas ferromagnesianas y rocas sedimentarias areniscas. Rocas ígneas basálticas y andesíticas, suelos originados de rocas y cenizas volcánicas.

3.1.12 Vías de comunicación

En el interior de la propiedad existe un 8% de la superficie total dedicado a caminos y avenidas (de primer orden) cubriendo una red de 30 Km., representando una densidad de 0.075 Km./Ha; cubiertas con grava y pasto y bordos de canalización del agua de los escurrimientos superficiales.

3.2 Metodología de estudio

Para alcanzar los objetivos del presente trabajo, se empleó la metodología siguiente :

3.2.1 *Revisión bibliográfica*

Se consultaron fuentes de información bibliográfica referente a las cadenas de Markov de parámetro discreto, para proporcionar los conceptos, definiciones y propiedades útiles para realizar diferentes aplicaciones que contribuyan a obtener un amplio conocimiento del comportamiento del sistema en estudio. Entre los conceptos y metodologías registrados se encuentran las probabilidades de transición, la matriz de transición, el espacio de estados, la descomposición canónica del espacio de estados, las probabilidades de absorción, los tiempos medios de absorción y el vector estacionario; así como los antecedentes más relevantes.

3.2.2 *Aplicación de las metodologías propuestas*

Parte de la información básica obtenida en la revisión bibliográfica se aplicó en la plantación forestal descrita en 3.2.1, considerando las existencias de los árboles navideños en este lugar como un modelo de cadenas de Markov.

Se identificaron los estados apropiados para la aplicación de las cadenas de Markov. La obtención de las probabilidades de transición se obtuvieron con la información de pérdidas y ventas proporcionada por el Director General de Producción de esta empresa. Esta información hizo posible proponer una matriz de

transición para modelar el crecimiento y la demanda de los árboles navideños que crecen en los plantíos de esta empresa.

Como apoyo para los análisis se utilizó una computadora personal, con procesador 386 DX y el software siguiente:

- QSB⁺ Versión 3.0 (Chang, 1993).
- Matlab

C a p í t u l o IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Aplicación de la teoría de las cadenas de Markov

La Empresa denominada "Bosque de los árboles de Navidad" dedicada a la producción y venta de árboles de Navidad, cuenta con 14 plantíos, en su mayoría de Pino Vikingo® (*Pinus ayacahuite* x *Pinus strobiformis*), Douglas Fir o llamado también Vikingo Canadiense (*Pseudotsuga menziessi*) y *Pinus monticola*, en menor cantidad las especies *P. radiata*, *P. pinea* y *P. patula*.

Cada año la empresa permite a sus clientes que seleccionen y corten el árbol de su preferencia; la empresa permite cortar hasta cinco árboles por familia y tiene también ventas al mayoreo. La empresa protege los árboles de menos de 6 años de edad de manera que se les permite crecer y estar disponibles para su venta en años futuros. Tanto el Vikingo como el Douglas Fir tardan entre 9 y 10 años para alcanzar la altura deseada (2 m).

Sin embargo, aun cuando exista un árbol con altura para corte en un año determinado, es posible que no se le seleccione para corte sino hasta unos años después. Los árboles que no se cortan en un año determinado siguen en pie hasta el año siguiente.

La empresa cuenta con un vivero forestal, en el cual se realiza la producción de plantas que reemplazarán a los árboles que se venden que se pierden. Sin embargo, un árbol vendido puede ser reemplazado también por el brote dejado del tocón del pino cortado (ver Figura 1 en el anexo), pues las raíces del mismo permanecen vivas y producen otro pino cada ocho años (*regeneración de tronco*).

La empresa sigue la política de reemplazar el 70% de los árboles cortados y vendidos por plantas producidas en el vivero y el 30% por los brotes.

Al considerar la operación de árboles navideños de la empresa como un proceso de cadenas de Markov con periodos anuales, se proponen los estados siguientes:

- 1: Árbol de un año de edad producido en vivero.
- 2: Árbol (obtenido en el vivero) de dos años de edad.
- 3: Árbol (obtenido en el vivero) de tres años de edad.
- 4: Árbol (obtenido en el vivero) de cuatro años de edad.
- 5: Árbol (obtenido en el vivero) de cinco años de edad.
- 6: Árbol (obtenido en el vivero) de seis años de edad.
- 7: Árbol (obtenido en el vivero) de siete años de edad.
- 8: Árbol (obtenido en el vivero) de ocho años de edad.
- 9: Árbol (obtenido en el vivero) de nueve años de edad.
- 10: Árbol (obtenido en el vivero) de diez o más años de edad.
- 11: Brote.
- 12: Árbol (obtenido de un brote) de un año de edad.
- 13: Árbol (obtenido de un brote) de dos años de edad.
- 14: Árbol (obtenido de un brote) de tres años de edad.
- 15: Árbol (obtenido de un brote) de cuatro años de edad.
- 16: Árbol (obtenido de un brote) de cinco años de edad.
- 17: Árbol (obtenido de un brote) de seis años de edad.
- 18: Árbol (obtenido de un brote) de siete años de edad.
- 19: Árbol (obtenido de un brote) de ocho o más años de edad.
- 20: Perdido
- 21: Cortado y Vendido

De acuerdo a la información sobre producción, ventas y pérdidas observadas en diferentes años, conjuntamente con el Director general de producción, se determinó que la matriz de transición siguiente resulta apropiada

4.2 Objetivos del análisis

Los objetivos que se desean en esta aplicación de cadenas de Markov son los siguientes

- * Para el inventario actual de la Empresa dar un seguimiento de las pérdidas y ventas de los árboles comprendidos entre los estados 1 a 19. Por ejemplo; del inventario actual, determinar el porcentaje de los árboles de un año (producidos en el vivero) que se venderán en fecha posterior, así como el porcentaje de los que se perderán. En este caso, se le da seguimiento a los árboles que corresponden al estado 1.
- * Para el inventario actual, determinar el tiempo esperado que permanecerá un árbol en los plantíos hasta que se vende o pierde, de acuerdo al estado que pertenece. Por ejemplo, se determinará el número de años que permanece un árbol de 2 años (producido en el vivero) hasta que se pierde o se vende.
- * Sabiendo que la empresa desea manejar un inventario (anual) constante, averiguar si a largo plazo, la existencia de cada estado se mantendrá constante año tras año.
- * Se propondrá un plan diferente de reemplazo de los árboles que se venden. El plan que se propone consiste en reemplazar 50% de los árboles que se venden con la regeneración de los troncos de los árboles vendidos y 50% con los árboles producidos en el vivero de la Empresa; asimismo, comentar las diferencias que se obtengan en relación al plan actual.

4.3 Definición de variables

Supóngase que el escenario en que se encuentra la Empresa es como sigue:

- i) La época navideña recién ha concluido, por lo que la Empresa está iniciando un ciclo nuevo de operaciones.
- ii) Un árbol de la empresa pertenece a una y sólo una de las 21 categorías ya descritas anteriormente.
- iii) Se toma (al azar) uno de los árboles que actualmente tiene la empresa y considérense las variables siguientes:

X_0 : Categoría a la que este árbol pertenece.

X_1 : Categoría a la que pertenecerá este árbol el próximo año.

X_2 : Categoría a la que pertenecerá este árbol dentro de dos años.

$\vdots$

X_n : Categoría a la que pertenecerá este árbol dentro de n años.

$\vdots$

Bajo el escenario anterior, se tiene una sucesión $\{X_n\}$ de variables aleatorias discretas. Obsérvese que para $n > 0$, el recorrido R_{X_n} de la variable aleatoria X_n es el conjunto $\{1, 2, \dots, 21\}$ (o un subconjunto de este). En tanto que $R_{X_0} = \{1, 2, \dots, 19\}$. Por lo tanto, de acuerdo con (2.4.1), el espacio de estados es:

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_{X_n} = \{1, 2, \dots, 21\}$$

Obsérvese que I es un espacio de estados finito. Para continuar con los análisis se supone que el proceso estocástico ya definido es una cadena homogénea de Markov.

4.4 Obtención de la descomposición canónica del espacio de estados

Como se ha comentado anteriormente en la Sección 2.12, la obtención de la descomposición canónica del espacio de estados de una C.M. es un paso importante en un análisis de Markov.

Se obtendrá a continuación la d.c. del espacio de estados I del presente problema.

Obsérvese que por la Proposición 2.9.1, los estados 20 y 21 son absorbentes; de aquí que sus clases sean $C(20)=\{20\}$ y $C(21) = \{21\}$, respectivamente. Obsérvese que cada clase es un conjunto cerrado minimal. Entonces, por la Proposición 2.7.1 son clases esenciales y por (b) de la Proposición 2.11.2, clases recurrentes.

Además, el estado 1 es inesencial, pues aunque accesa el estado 20, no se comunica con este estado, ya que no existe ninguna posibilidad de que el estado 20 accese el estado 1. De manera similar se obtiene que los estados 2 al 19 son inesenciales. Por (iii) de la Proposición 2.6.1 se obtiene que los estados 1 al 19 son no recurrentes. De aquí que $N = \{1,2,\dots,19\}$ y que la d.c. de I es la siguiente

$$I = \underbrace{\{1, 2, \dots, 19\}}_N \cup \underbrace{\{20\} \cup \{21\}}_{\text{clases recurrentes}} \quad (4.4.1)$$

4.5 Probabilidades de absorción

La d.c. de I en (4.4.1) contiene dos estados absorbentes, esto permite determinar la probabilidad de que un árbol (obtenido en vivero) de un año de edad (estado 1) se pierda por enfermedad (estado 20). Así como también la probabilidad de que un árbol (obtenido de un brote) de 6 años de edad (estado 17) se venda. En el lenguaje de las cadenas de Markov, las probabilidades deseadas son las entradas $u_{1,20}^{\bullet}$ y $u_{17,21}^{\bullet}$ de la matriz U en (2.9.4), que se calcula como en (2.9.5); es decir $U = (I - Q)^{-1}R$, donde Q y R están definidas en

(2.9.2) y (2.9.3) respectivamente. Para la matriz en (4.1.1) las matrices Q y R se muestran a continuación

$$Q \equiv \{q_{ij} \equiv p_{ij}; i \in N, j \in N\} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.995 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.959 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.985 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.995 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.959 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$R = \{r_{kl} \equiv p_{kl}; k \in N, l \in N^c\} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.10 & 0 \\ 0.06 & 0 \\ 0.03 & 0 \\ 0.015 & 0 \\ 0.005 & 0 \\ 0.001 & 0.04 \\ 0 & 0.10 \\ 0 & 0.20 \\ 0 & 0.35 \\ 0 & 0.90 \\ 0.10 & 0 \\ 0.06 & 0 \\ 0.03 & 0 \\ 0.015 & 0 \\ 0.005 & 0 \\ 0.001 & 0.04 \\ 0 & 0.20 \\ 0 & 0.35 \\ 0 & 0.90 \end{bmatrix}$$

Al realizar las operaciones indicadas, se obtiene que

$$U = \begin{bmatrix} 0.1965 & 0.8035 \\ 0.1073 & 0.8927 \\ 0.0503 & 0.9497 \\ 0.0209 & 0.9791 \\ 0.0060 & 0.9940 \\ 0.0010 & 0.9990 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0.1963 & 0.8035 \\ 0.1073 & 0.8927 \\ 0.0503 & 0.9497 \\ 0.0209 & 0.9791 \\ 0.0060 & 0.9940 \\ 0.0010 & 0.9990 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.1)$$

Recuérdese que el primer objetivo planteado consiste en darle un seguimiento a las pérdidas de las existencias actuales. Esta información se puede consultar en la primera columna de la matriz U en (4.5.1). Así, de la existencia actual de los árboles de un año, obtenidos en el vivero, se perderá 19.65% (u_{11}^*), en tanto que de los árboles de un año, obtenidos mediante brotes, se perderá solamente 10.73%. Obsérvese que las pérdidas de los árboles de un año son muy bajas. Esto se puede explicar por la adaptabilidad de las especies que se cultivan en este bosque.

Obsérvese que a medida que un árbol crece, la probabilidad de que se pierda se hace cada vez menor. Esto es válido tanto para un árbol obtenido en el vivero como de un brote. Obsérvese también que a igualdad de edades, la sobrevivencia de un árbol obtenido por brote es mayor que el de un árbol que se obtiene en el vivero.

Por otra parte, en la segunda columna de la matriz U se tienen las probabilidades de ventas. Por ejemplo, la probabilidad de que un árbol de 3 años

producido en el vivero sea vendido en un año posterior es de 0.9497 (u_{32}^*), mientras que esta probabilidad para un árbol obtenido de un brote es de 0.9791 ($u_{14,2}^*$), ligeramente superior que la del producido en vivero.

4.6 Determinación de tiempos medios de absorción

Otro objetivo planteado en este análisis es la determinación de los tiempos que permanecen los árboles en los plantíos. En la Sección 2.9, cuando la d.c. de un espacio de estados es de la forma

$$N\cup\{j\} \quad (4.6.1)$$

donde j es un estado absorbente, para $i \in N$, es posible determinar el tiempo medio que transcurre para que el estado i llegue al estado absorbente j .

En este problema, la descomposición canónica de I en (4.4.1) no permite manejar tales tiempos, pues su d.c. no es como en (4.6.1). Sin embargo, es posible "comprimir" los estados de I , de tal manera que se obtenga una d.c. nueva como en (4.6.1). Para lograrlo, para un árbol en el vivero, defínanse los estados siguientes:

- A: Árbol de un año de edad producido en vivero.
- B: Árbol (obtenido en el vivero) de dos años de edad.
- C: Árbol (obtenido en el vivero) de tres años de edad.
- D: Árbol (obtenido en el vivero) de cuatro años de edad.
- E: Árbol (obtenido en el vivero) de cinco años de edad.
- F: Árbol (obtenido en el vivero) de seis años de edad.
- G: Árbol (obtenido en el vivero) de siete años de edad.
- H: Árbol (obtenido en el vivero) de ocho años de edad.
- I: Árbol (obtenido en el vivero) de nueve años de edad.
- J: Árbol (obtenido en el vivero) de diez o más años de edad.
- K: Brote.
- L: Árbol (obtenido de un brote) de un año de edad.

M: Árbol (obtenido de un brote) de dos años de edad.
M: Árbol (obtenido de un brote) de tres años de edad.
O: Árbol (obtenido de un brote) de cuatro años de edad.
P: Árbol (obtenido de un brote) de cinco años de edad.
Q: Árbol (obtenido de un brote) de seis años de edad.
R: Árbol (obtenido de un brote) de siete años de edad.
S: Árbol (obtenido de un brote) de ocho o más años de edad.
T: Dado de baja en los inventarios (por venta o por enfermedad)

Obsérvese que con estos estados nuevos, el espacio de estados I resulta particionado como

$$I = \{\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{19\} \cup \{20, 21\}\} \quad (4.6.2)$$

En general, sea $\{X_n\}$ una C.M. con espacio de estados I y $\{A_1, A_2, \dots, A_L\}$ una partición de I (esta partición no tiene que ser la de la d.c. de I). Defínanse p_{iA_k} y I_C como $p_{iA_k} \equiv \sum_{j \in A_k} p_{ij}$ y $I_C \equiv \{1, 2, \dots, L\}$, respectivamente. Ahora, considérense las variables aleatorias $Y_n: \Omega \rightarrow R$ como sigue: Si $j \in I_C$, $Y_n(\omega) = j$ si y sólo si $X_n(\omega) \in A_j$. Sea $\tilde{X}_0$ el vector inicial de la C.M. $\{X_n\}$. Entonces, la sucesión de variables aleatorias $\{Y_n\}$ es una C.M. con espacio de estados I_C si y sólo si para cada pareja de subconjuntos A_i y A_j en $\{A_1, A_2, \dots, A_L\}$, se cumple que p_{kA_j} tienen el mismo valor para cada $k \in A_i$. Cuando este es el caso, se dirá que la cadena es *comprimible* (lumpable) con respecto a la partición $\{A_1, A_2, \dots, A_L\}$ de I . Además, si la cadena es comprimible, la distribución inicial y las probabilidades de transición de esta C.M. nueva, están dados por

$$P\{Y_0 = i\} = P\{X_0 \in A_i\}, \quad i \in I_C \quad y$$

$$P\{Y_n = i | Y_{n-1} = j\} = P\{X_n \in A_i | X_{n-1} \in A_j\}, \quad i, j \in I_C$$

respectivamente (Véase Kemeny y Snell, 1976).

Como se puede demostrar, la cadena $\{X_n\}$ de este problema es comprimible con respecto a la partición en (4.6.2). Es claro que el espacio de estados que

resulta es $I_C = \{1, 2, \dots, 20\}$, donde los estados se repiten a continuación, pero "re-etiquetados"

- 1: Árbol de un año de edad producido en vivero.
- 2: Árbol (obtenido en el vivero) de dos años de edad.
- 3: Árbol (obtenido en el vivero) de tres años de edad.
- 4: Árbol (obtenido en el vivero) de cuatro años de edad.
- 5: Árbol (obtenido en el vivero) de cinco años de edad.
- 6: Árbol (obtenido en el vivero) de seis años de edad.
- 7: Árbol (obtenido en el vivero) de siete años de edad.
- 8: Árbol (obtenido en el vivero) de ocho años de edad.
- 9: Árbol (obtenido en el vivero) de nueve años de edad.
- 10: Árbol (obtenido en el vivero) de diez o más años de edad.
- 11: Brote.
- 12: Árbol (obtenido de un brote) de un año de edad.
- 13: Árbol (obtenido de un brote) de dos años de edad.
- 14: Árbol (obtenido de un brote) de tres años de edad.
- 15: Árbol (obtenido de un brote) de cuatro años de edad.
- 16: Árbol (obtenido de un brote) de cinco años de edad.
- 17: Árbol (obtenido de un brote) de seis años de edad.
- 18: Árbol (obtenido de un brote) de siete años de edad.
- 19: Árbol (obtenido de un brote) de ocho o más años de edad.
- 20: Dado de baja en los inventarios (por venta o por enfermedad)

La matriz de transición P_C de la cadena nueva que se obtiene se proporciona en (4.6.3). Más aún, como se puede verificar, la d.c. de I_C es como sigue

$$I_C = \underbrace{\{1, 2, \dots, 19\}}_N \cup \underbrace{\{20\}}_{\text{clase recurrente}}$$

En esta cadena comprimida, los tiempos medios de absorción $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{19}$ localizados en el vector (2.9.7) son los tiempos que se buscan determinar en esta Sección, pues se interpretan del modo siguiente

μ_1 : Tiempo medio que permanece un árbol (obtenido en el vivero) de un año hasta que se vende o se pierde.

μ_2 : Tiempo medio que permanece un árbol (obtenido en el vivero) de dos años de edad en los plantíos hasta que se vende o se pierde.

$\vdots$

μ_{19} : Tiempo medio que permanece un árbol (obtenido de un brote) de ocho o más años de edad en los plantíos hasta que se vende o se pierde.

Al obtener estos valores mediante la ecuación (2.9.7) se obtiene que

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{19} \end{bmatrix} = (I - Q)^{-1} \underline{1} = \begin{bmatrix} 7.6011 \\ 7.3345 \\ 6.7388 \\ 5.9163 \\ 4.9912 \\ 4.0113 \\ 4.1400 \\ 2.3778 \\ 1.7222 \\ 1.1111 \\ 7.0132 \\ 6.6813 \\ 6.0439 \\ 5.1999 \\ 4.2639 \\ 3.2803 \\ 2.3778 \\ 1.7222 \\ 1.1111 \end{bmatrix}$$

Cabe señalar que para obtener el vector μ anterior, la matriz Q que se emplea debe obtenerse de la matriz P_C dada en (4.6.3) y no de la matriz P en (4.1.1). Sin embargo, las matrices que se obtienen en ambos casos son iguales.

Se obtiene entonces que el tiempo esperado de permanencia en los plantíos de un árbol (obtenido en el vivero) de 2 años de edad es $\mu_2 = 7.3345$ años, mientras que para un árbol de la misma edad, pero obtenido de un brote, este tiempo es de tan sólo 6.0439 años (μ_{13}). La diferencia en estos tiempos está de acuerdo con

lo declarado por el Director General de producción de que el crecimiento de los árboles que se obtienen de brotes es superior al de los árboles que se obtienen en el vivero.

4.7 Determinación de la existencia a largo plazo de árboles por categoría

En la Sección 4.5 se dio seguimiento a los árboles que actualmente se tienen en los plantíos. En esta Sección, bajo el supuesto de que la empresa busca mantener un inventario anual constante; de estas existencias, se determinará el porcentaje que corresponde a los árboles de un año, a los árboles de dos años, y así sucesivamente.

Con los mismos estados definidos en la Sección 4.1, en la matriz de transición que se usa en esta Sección se reponen a las existencias del plantío los árboles que se venden o que se pierden. De acuerdo con la política seguida por la Empresa de reemplazar el 70% de los árboles vendidos con árboles del vivero y el 30% con los brotes de los árboles cortados, una matriz de transición apropiada está dada en (4.7.1).

La matriz en (4.7.1) es regular, pues como se puede verificar, todas las componentes de la potencia 17 son diferentes de cero. En consecuencia, por (e) de la Proposición 2.11.4 el vector estacionario es independiente del vector inicial; y de acuerdo con (c) de la Proposición 2.11.2, este vector se puede obtener como un vector fijo de la transpuesta de P en (4.7.1). Se usó el programa de computación QSB+ versión 3.0 incluido en Chang, 1993, para calcular este vector. El resultado, redondeado a 4 decimales está dado por el vector en (4.7.2).

[illegible]

(4.7.1)

El vector estacionario esta dado por:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0.0897 \\ 0.0807 \\ 0.0759 \\ 0.0736 \\ 0.0725 \\ 0.0722 \\ 0.0692 \\ 0.0623 \\ 0.0498 \\ 0.0360 \\ 0.0285 \\ 0.0256 \\ 0.0241 \\ 0.0234 \\ 0.0230 \\ 0.0229 \\ 0.0220 \\ 0.0176 \\ 0.0127 \\ 0.0232 \\ 0.0950 \end{bmatrix} \quad (4.7.2)$$

La primera componente $b_1=0.0897$ del vector $\underline{b}$ en (4.7.2) se interpreta como la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente un árbol, este sea un árbol (obtenido en el vivero) de un año de edad. Se concluye entonces que a largo plazo, la proporción de árboles (obtenidos en el vivero) de un año de edad en los plantíos, será de 8.97%. De manera análoga se concluye que a largo plazo, la proporción de árboles (obtenidos de brotes) de un año de edad que existirán en los plantíos será de 2.56% (se obtiene de b_{12}). Comentarios análogos se pueden hacer con las existencias de los árboles de dos años de edad, de 3 años de edad, etc. Un dato muy interesante es observar como se comporta la proporción de árboles obtenidos de brotes. Por ejemplo, del total de árboles de un año, el 22.20% corresponderá a los obtenidos por brotes. En cambio, este porcentaje

aumentará a 22.99% en el caso de los árboles de 2 años y para los árboles de 6 años, este porcentaje será de 23.35%. Obviamente, la justificación de esto es por la mayor sobrevivencia de los árboles obtenidos de la regeneración de troncos.

Otra información importante que se puede obtener del vector estacionario $\underline{b}$ en (4.7.2) es la proporción de árboles que se perderán y que se venderán. Al consultar el vector $\underline{b}$, se observa que a largo plazo se espera que las ventas anuales sean el 9.5% de la producción total anual mientras que de esta producción anualmente se perderá 2.32%.

4.8 Modificación del plan actual de reemplazo

Una aplicación importante del análisis de Markov consiste en modificar "estratégicamente" la matriz de transición de un problema dado y analizar la Cadena de Markov nueva, de manera que si los resultados nuevos son favorables, se tenga la opción de "alcanzar" o seguir la estrategia planteada.

Como ejemplo de lo anterior, se analizará el impacto de reemplazar los árboles vendidos con menos árboles del vivero. La estrategia que se propone consiste en reemplazar los árboles vendidos con 50% de árboles del vivero y el otro 50% con los brotes de los árboles vendidos.

Con la política nueva de reemplazo, la matriz de transición P_N se puede obtener modificando el último renglón de la matriz en (4.7.1). La entrada en el renglón 21 y columna 1 debe modificarse a 0.5, lo mismo debe hacerse con la columna 11 de este mismo renglón, la matriz que resulta se muestra a continuación:

De manera similar que en la Sección 4.7, la matriz P_N es regular y así, el vector estacionario de probabilidades $\underline{b}_N$ es independiente del vector inicial. El vector que resulta se muestra a continuación

$$\underline{b}_N = \begin{bmatrix} 0.0715 \\ 0.0644 \\ 0.0605 \\ 0.0587 \\ 0.0578 \\ 0.0575 \\ 0.0552 \\ 0.0496 \\ 0.0397 \\ 0.0287 \\ 0.0480 \\ 0.0432 \\ 0.0406 \\ 0.0394 \\ 0.0388 \\ 0.0386 \\ 0.0370 \\ 0.0296 \\ 0.0214 \\ 0.0235 \\ 0.0961 \end{bmatrix} \quad (4.8.2)$$

Al comparar los vectores en (4.7.2) y (4.8.2), se observa que a largo plazo, la proporción de árboles que se pierden son similares, lo mismo se puede comentar sobre la proporción de árboles que se venden. Para cada plan, en las Tablas 1 y 2 se resumen la existencias a largo plazo de los árboles por categoría; por ejemplo, de los árboles de un año, la proporción esperada se obtiene como la suma de la proporción esperada de los árboles de un año (de vivero) con la

proporción esperada de los árboles de un año, pero obtenidos de brotes. Para el plan actual, esta proporción se obtiene sumando 0.0897 con 0.0285, obteniéndose que a largo plazo, 11.53% de la producción anual serán árboles de un año de edad. En cada categoría de edad, también se da en esta tabla la proporción que ocupan los árboles obtenidos de brotes; por ejemplo, los árboles de un año de edad, obtenidos de brotes, ocupan el 22.20% de todos los árboles de un año.

Tabla 1: Existencias totales por categoría a largo plazo (s_i) y proporción de árboles de regeneración del total de cada categoría (r_i), para el plan actual de reemplazo.

Edad	s_i	r_i
1 año	11.53%	22.20%
2 "	10.48	23.00
3 "	9.93	23.57
4 "	9.66	23.81
5 "	9.54	24.00
6 "	9.42	23.36
7 "	8.68	20.28
8 "	7.5	16.93

Tabla 2: Existencias totales por categoría a largo plazo (s_i) y proporción de árboles de regeneración del total de cada categoría (r_i), para el plan de reemplazo propuesto.

Edad	s_i	r_i
1 año	11.47%	37.66%
2 "	10.50	38.67
3 "	9.99	39.44
4 "	9.75	39.80
5 "	9.64	40.04
6 "	9.45	39.15
7 "	8.48	34.91
8 "	6.36	22.01

Se observa que en ambos casos, a largo plazo, las existencias de árboles pequeños se mantienen, no así con los árboles de 7 años en adelante, donde las

existencias son menores con el plan propuesto que en el actual.

Para evaluar la conveniencia de adoptar el plan propuesto, entre otras cosas, es recomendable considerar los gastos/utilidades anuales en cada estado del sistema y comparar las utilidades promedio (por árbol) en cada plan de reemplazo. Para obtener las utilidades (promedio) a comparar se puede utilizar el inciso (f) de la Proposición 2.11.4.

Capítulo V

CONCLUSIONES

El análisis de las Cadenas de Markov, una herramienta útil en la toma de decisiones, permite analizar a corto y largo plazo la operación de una gama amplia de fenómenos de la naturaleza.

Para la realización de un análisis de Markov, es imperativo contar con información del pasado que permita determinar la matriz de transición de probabilidades de la cadena de Markov que modela el fenómeno bajo estudio.

La descomposición canónica del espacio de estados de una cadena de Markov es un paso importante en un análisis de Markov, pues la dirección que seguirá el análisis depende de esta descomposición.

Como se vio en el ejemplo de aplicación, en un análisis de Markov, después de un estudio profundo del funcionamiento actual del fenómeno bajo estudio, es posible proponer una estrategia nueva a seguir y analizar el impacto que esta tendrá sobre el fenómeno que se estudia.

Capítulo VI

BIBLIOGRAFÍA

- Anderson, D., R. *et al.* 1993. Introducción a los Modelos Cuantitativos para Administración. Trad. por Alfredo Díaz Mata. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D.F. pp. 773-793.
- Cárdenas, H., E. Lluís, F. Raggi, y F. Tomás. 1973. Álgebra superior. Ed. Trillas. México, D.F. 323p.
- Chang, Y. L.. 1993. QSB + 3.0 (Quantitative Systems for Business Plus, Versión 3.0), Ed. Prentice Hall. New Jersey. pp. 1-20, 294-301.
- Chung, K. L. 1967. Markov Chains With Stationary Transition Probabilities. Second edition. Ed. Springer-Verlag. New York. 298p.
- 1979. Elementary Probability Theory with Stochastic Processes. Third Edition. Ed. Springer-Verlag. New York. 305p.
- Coleman, R. 1986. Procesos estocásticos. Selección de problemas resueltos. Vol. 14. Trad. por José H. Pérez C. Ed. LIMUSA. México, D.F. 131p.
- Davis, R. K. y P. McKeown, G. 1986. Modelos cuantitativos para administración. Trad. por Alfredo Díaz M. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica. México, D.F. pp. 665-682.
- Doob, L. J. 1953. Stochastic Process. Ed. John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 626p.
- Feller, W. 1957. An Introduction to Probability Theory and Its Applications,

Second Edition, Vol. I. Ed. John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. 461p.

Haaser B., N., J. La Salle P. y J. Sullivan A. 1990. Análisis matemático -curso intermedio- Vol. 2. Ed. Trillas. 786p.

Herstein, I. N. 1990. Álgebra moderna: grupos, anillos, campos, Teoría de Galois. 2a. Edición. Trad. por Federico Velasco C. Ed. Trillas. México, D.F. 392p.

Hillier, F. y G. Lieberman, J. 1982. Introducción a la investigación de operaciones 3a. Edición. Trad. por Carlos Prado C. Ed. McGraw-Hill. México, D.F. pp. 545-586.

Kemeny, G. J. y J. Snell L. 1976. Finite Markov Chains. Ed. Springer-Verlag. U.S.A. 461p.

Lamperti, J. 1977. Stochastic Processes. A survey of the mathematical Theory. Ed. Springer-Verlag, New York, U.S.A. pp.106-113.

Leithold, L. 1992. El cálculo con geometría analítica. 6a.edición. Trad. por Antonio Eroles G. Ed. HARLA. México, D.F. pp. 74-181, 886-949.

Neuts, F. M. 1973. Probability. Ed. Allyn and Bacon, Inc. Boston. 555p.

Parzen, E. 1962. Stochastic Processes. Ed. Holden-Day, Inc. U.S.A. 324P.

Resnick, I.S. 1992. Adventures in stochastic processes. Ed. Birkhauser Boston. U.S.A. 626p.

Ross, S. M. 1972. Introduction to Probability Models. Ed. ACADEMIC PRESS, New York, 227p.

----- 1979. Probability. Ed. Macmillan Publishing Co, Inc. U.S.A. 305p.

- Searle, S. R.** 1982. Matrix Algebra Useful for Statistics. Ed. John Wiley & Sons. New York. 438p.
- Stark, M.H.** 1979. An introduction to Number Theory. Ed. Mavkham Publishing Company. USA 347p.
- Taha, A. H.** 1995. Investigación de Operaciones. 5ta. Edición. Trad. por José De la Cera Alonso. Ed. Alfaomega. México, D.F. 960p.
- Takeuchi, Y.** 1983. Sucesiones y series, tomo I. Ed. LIMUSA. México, D.F. 220p.
- Taylor, H. M. y S. Karlin,** 1984. An introduction to Stochastic Modeling. Ed. Academic Press. U.S.A. 399p.
- The Math works, Inc.,** 1992 The student edition of MATLAB[®]. Ed. Prentice Hall. U.S.A. 494p.

ANEXO

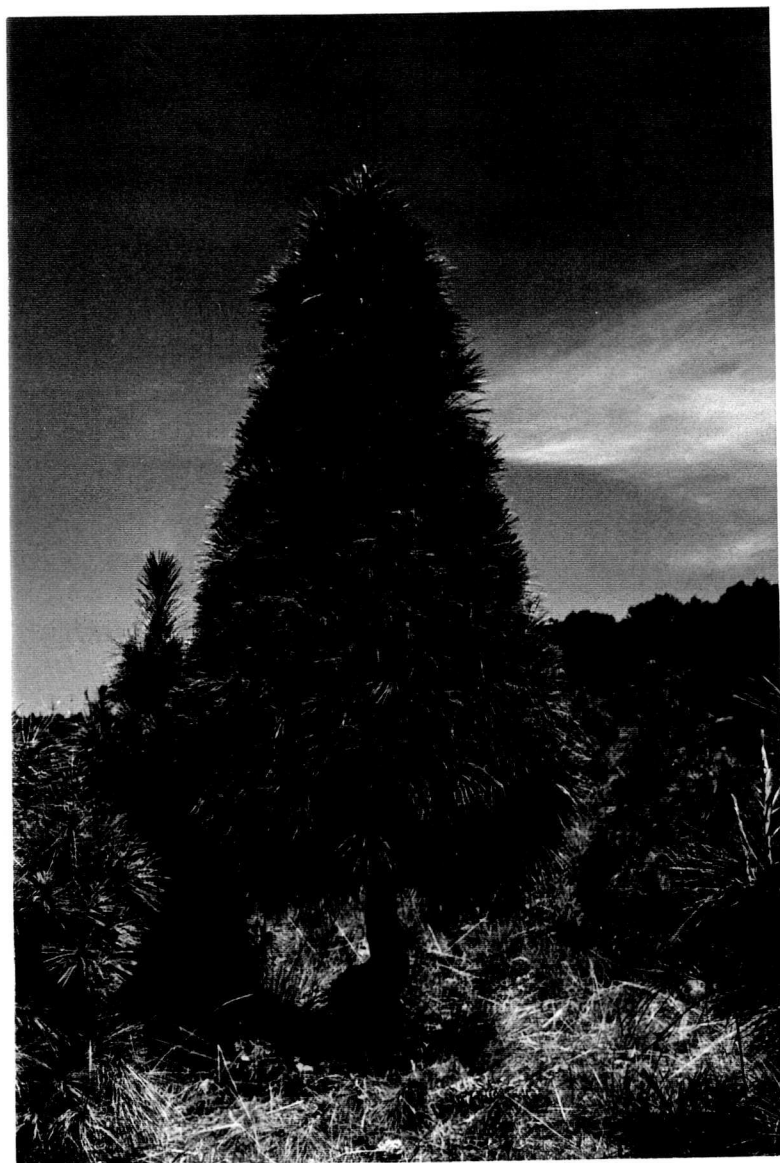


Figura 1. Árbol Vikingo® (*Pinus ayacahuite* x *Pinus strobiformis*), derivado de regeneración de troncos en los plantíos de la Empresa "Bosque de los árboles de Navidad" (Cortesía del Ing. Taide Mendoza).

