



UNIVERSIDAD AUTONOMA CHAPINGO

***DIVISION DE CIENCIAS FORESTALES
COORDINACION DE POSTGRADO***

**ANALISIS DE CURVAS DE CRECIMIENTO DE ARBOLES Y
MASAS FORESTALES**

TESIS

**PRESENTADA COMO REQUISITO
PARCIAL
PARA OBTENER EL GRADO DE**

MAESTRO EN CIENCIAS

POR

DEMETRIO AYERDE LOZADA



DIRECCION ACADEMICA
DEPTO. DE SERVICIOS ESCOLARES
OFICINA DE EXAMENES PROFESIONALES

CHAPINGO, MEXICO 1996.



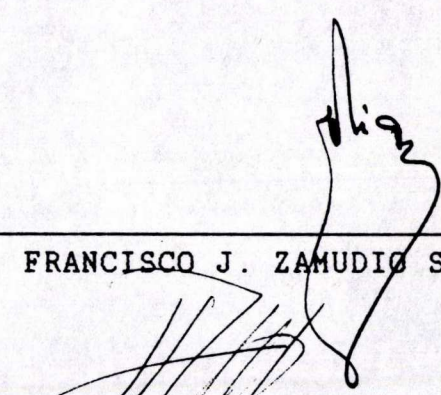
DX85231
-151299

✓

Esta tesis fue realizada bajo la dirección del Comité Asesor indicado, ha sido aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener el grado de:

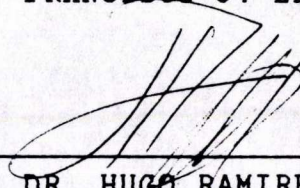
MAESTRO EN CIENCIAS EN CIENCIAS FORESTALES

DIRECTOR



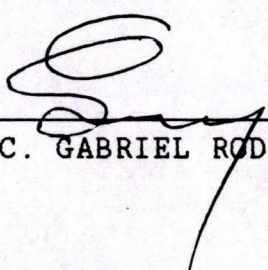
DR. FRANCISCO J. ZAMUDIO SANCHEZ

ASESOR



DR. HUGO RAMIREZ MALDONADO

ASESOR



M.C. GABRIEL RODRIGUEZ YAM

A-29210

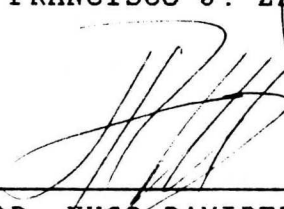
Chapingo, Méx., abril de 1996

El Jurado del Examen de Grado de Maestría en Ciencias en Ciencias Forestales estuvo constituido por:

PRESIDENTE


DR. FRANCISCO J. ZAMUDIO SANCHEZ

ASESOR


DR. HUGO RAMIREZ MALDONADO

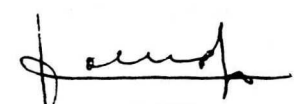
ASESOR


M.C. GABRIEL RODRIGUEZ YAM

REPRESENTANTE DE LA COORDINACION
DE ESTUDIOS DE POSTGRADO DE LA
DIVISION DE CIENCIAS FORESTALES


M.C. JORGE A. TORRES PEREZ

REPRESENTANTE DE LA COORDINACION
DE ESTUDIOS DE POSTGRADO DE LA
UACH


M.C. JOSE LUIS ROMO LOZANO

Cada uno de los cuales revisó y aprobó la tesis presentada.

Chapingo, Méx., abril de 1996

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (**CONACYT**), por haber financiado mis estudios de maestría.

Al Instituto Nacional de Investigaciones Forestales y Agropecuarias (**INIFAP**), por brindarme el apoyo económico y la oportunidad de superarme académica y profesionalmente.

A la Universidad Autónoma Chapingo (**UACH**) a través del Programa de Postgrado de la División de Ciencias Forestales, por encontrar en ella las mejores condiciones académicas para mi formación.

Al Dr. Francisco J. Zamudio Sánchez por su orientación, consejos profesionales y dirección y asesoría en el presente proyecto de investigación. Y porque como buen maestro, siempre me enseñó a pensar.

A los CC. Dr. Hugo Ramírez Maldonado, M.C. Gabriel Rodríguez Yam, M.C. Jorge A. Torres Pérez y al M.C. José Luis Romo Lozano, por su asesoría y participación en la revisión del trabajo y sugerencias al mismo.

A los CC. Dr. Carlos Rodríguez Franco, Dr. Aurelio M. Fierros González y M.C. Francisco Leyva Gómez, quienes siempre me han motivado y ayudado en mi superación profesional.

DEDICATORIA

A mis padres -M^a Antonia Lozada Morelos y Florentino Ayerde Luna- por darme lo mejor, la vida; **a mis hijos** -Ana Laura y Juan Carlos- por ser la razón y motivo de ella; **y a mi esposa** -Eva- porque con su comprensión y apoyo, me permite justificarla.

CONTENIDO

	Página
AGRADECIMIENTOS	iv
DEDICATORIA	v
CONTENIDO	vi
INDICE DE FIGURAS	ix
INDICE DE CUADROS	xi
RESUMEN	xii
SUMMARY	xiii
 1. INTRODUCCION	 1
2. REVISION DE LITERATURA.....	4
2.1 Conceptos generales.....	4
2.1.1 El concepto de modelo	4
2.1.2 Importancia de los modelos.....	7
2.1.3 Proceso biológico del crecimiento	13
2.1.4 Factores que afectan el crecimiento	24
2.2 Características de las curvas de crecimiento e incremento	28
2.2.1 Crecimiento e incremento de árboles	37
2.2.1.1 Crecimiento e incremento del árbol en altura	41
2.2.1.2 Crecimiento e incremento del árbol en diámetro	43
2.2.1.3 Crecimiento e incremento del árbol en volumen	47
2.2.2 Crecimiento e incremento de las masas forestales	50
2.2.2.1 Crecimiento e incremento en altura de masas puras coetáneas	52
2.2.2.2 Crecimiento e incremento en diámetro de masas puras coetáneas	53
2.2.2.3 Crecimiento e incremento en volumen de masas puras coetáneas	54
2.2.3 Incremento de bosques de selección	55
2.2.3.1 Incremento en diámetro en bosques de selección	57

2.2.3.2 Incremento en altura en bosques de selección	57
2.2.3.3 Incremento en volumen en bosques de selección	58
2.3 Metodología para la construcción y uso de modelos ..	59
2.3.1 Definición del problema	62
2.3.2 Construcción del modelo	66
2.3.2.1 Toma de datos	68
2.3.2.2 Análisis preliminar de información ..	77
2.3.2.3 Construcción del modelo	79
2.3.3 Validación del modelo	85
2.3.4 Utilización del modelo	97
2.4 Conversión de modelos	102
2.5 Tipos de modelos	107
2.5.1 Modelos icónicos	107
2.5.2 Modelos analógicos	107
2.5.3 Modelos simbólicos	108
2.6 Clasificación de modelos matemáticos	108
2.6.1 Clasificación en base a objetivos	109
2.6.1.1 Compiladores	109
2.6.1.2 Tácticos	109
2.6.1.3 Estratégicos	110
2.6.1.4 Simuladores	110
2.6.1.5 Predictores	112
2.6.1.6 Optimizadores	112
2.6.1.7 Puntuales	113
2.6.1.8 Dinámicos	114
2.6.2 Clasificación en base a los medios de construcción	115

2.6.2.1 Modelos mecanicistas	115
2.6.2.2 Modelos empíricos	116
2.6.2.3 Modelos de procesos	124
2.6.3 Clasificación en base a los parámetros del modelo	124
2.6.3.1 Modelo estadístico	124
2.6.3.2 Modelo determinístico	126
2.6.4 Otras clasificaciones diversos enfoques	126
2.7 Antecedentes del modelaje matemático	128
2.7.1 Antecedentes generales a nivel mundial	129
2.7.2 Antecedentes generales a nivel nacional ...	131
2.7.3 Tendencias del modelaje matemático	135
3. MATERIALES Y METODOS	138
4. RESULTADOS	140
4.1 La función alométrica	141
4.2 Modelo de Von Bertalanffy	147
4.3 Modelo de Chapman-Richards	156
4.4 Modelo monomolecular	162
4.5 Modelo logístico	169
4.6 Modelo de Gompertz	177
4.7 Modelo de Schumacher	186
4.8 Función de Weibull	194
4.9 Modelo de Levakovic I	204
4.10 Modelo de Korf	206
4.11 Modelo de Sloboda	208
5. CONCLUSIONES	212
6. BIBLIOGRAFIA CITADA	221
7. APENDICE	227

INDICE DE FIGURAS

	Página
1. Curva de crecimiento (1); Curva de incremento corriente (2); Curva de incremento medio (3)	31
2. Patrones teóricos de crecimiento que presentan a tres diferentes genotipos o el efecto de tres tipos o niveles distintos de tratamiento [Daniel, Helms y Baker, 1982]	34
3. Crecimiento e incremento en altura, diámetro y volumen de <u>Pinus strobus</u> (1) y <u>Quercus sessiliflora</u> (2) [Klepac, 1983]	38
4. Cambios en el volumen por acre y por árbol con el aumento del número de árboles por unidad de superficie (Curva de Langsaeter) [Daniel, Helms y Baker, 1982]	40
5. Crecimiento e incremento en altura de cuatro especies forestales [Adaptado de Klepac, 1983]	42
6. Crecimiento e incremento en altura de <u>Alnus sp</u> proveniente de semilla (1) y de brotes de cepa (2) [Adaptado de Glavac, V., 1960; citado por Klepac, 1983]	44
7. Crecimiento e incremento en diámetro de tres especies forestales [Adaptado de Klepac, 1983]	46
8. Crecimiento e incremento en volumen de tres especies forestales [Adaptado de Klepac, 1983]	48
9. Distribución del número de árboles por categorías diamétricas en un bosque de selección (Curva de Liocourt) [Klepac, 1983]	56
10. Alternativas generales para la elaboración de modelos matemáticos [Mendoza, 1983]	61
11. Sistemas y subsistemas: un modelo posible de explicación	121
12. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo monomolecular [Adaptado de Draper y Smith, 1980]	166
13. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo logístico [Adaptado de Draper y Smith, 1980]	174

14. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo logístico [Adaptado de Draper y Smith, 1980]174
15. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo de Gompertz [Adaptado de Draper y Smith, 1980]183

INDICE DE CUADROS

	Página
1. Ejemplo de la jerarquía de sistemas y subsistemas	120
2. Modelos de crecimiento y componentes de sustracción y división	210
3. Modelos de crecimiento y puntos de culminación de los incrementos corriente y medio	211

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es establecer un concentrado de información sobre el modelaje matemático, así como de los supuestos y propiedades de los principales modelos de crecimiento usados en la actividad forestal; y con esta última información realizar el análisis de las componentes de crecimiento y de las formas de las curvas.

Se destaca la información referente a la importancia de los modelos de crecimiento; el proceso biológico del mismo ejemplificándose con algunos ejercicios de organismos hipotéticos los que refuerzan la hipótesis de Von Bertalanffy, de que el crecimiento es igual al resultado de los procesos anabólicos menos el resultado de los procesos catabólicos; se registran las principales características de las curvas de crecimiento e incremento de las principales variables dasométricas de algunas especies forestales; se señalan los tipos y las clasificaciones de los modelos matemáticos; se describe el proceso de conversión de modelos de incremento a modelos de crecimiento y viceversa; y se anotan los antecedentes más relevantes y la tendencia de aplicación de los modelos matemáticos en la actividad forestal. También, se revisan los supuestos y las propiedades de los modelos de Von Bertalanffy, Chapman-Richards, monomolecular, logístico, Gompertz, Schumacher, Levakovic I, Korf, Sloboda y las funciones alométrica y Weibull.

SUMMARY

It was done bibliographical research about the mathematical modeling and its clasifications, particularly, about growth models. It was studied the biological growing process and the characteristics of both the growth and increment curves. Furthermore, it was registered the supositions and the propierties of the following models: Von Bertalanffy, Chapman-Richards, Monomolecular, Logístico, Gompertz, Schumacher, Levakovic I, Korf, Sloboda and Weibull. Finally, it was obtained the current and average increment curves and the culmination points for those curves.

1. INTRODUCCION

La posibilidad de realizar el manejo forestal como un proceso administrativo se soporta en la existencia de una función de producción por medio de la cual se obtienen pronósticos de rendimiento, crecimiento y cambio de estructura de un rodal cuando es sometido a ciertas prácticas de cultivo. Bajo los supuestos del manejo forestal tradicional que presupone una abundancia de factores para la producción y a los elementos financieros, los consideran como criterios auxiliares de decisión, o bien se les ignora, es natural que las funciones de producción estén diseñadas para predecir crecimiento y rendimiento en volumen casi de manera exclusiva (Mendoza, 1993)

La aplicación de ecuaciones y modelos matemáticos en la investigación del crecimiento se ha cuestionado. Algunos autores señalan que un proceso tan complejo como el crecimiento, difícilmente puede ser expresado por medio de una función matemática. Sin embargo, desde el punto de vista de manejo silvícola los resultados de estos estudios son de extremo valor (Amo y Nieto, 1983). Las ecuaciones matemáticas que a veces parecen muy complejas, son de mayor accesibilidad al entendimiento humano que los fenómenos biológicos (Mendoza, 1983).

A pesar de la gran variedad de modelos y más aún con la existencia de herramientas estadísticas, matemáticas y de cómputo que han permitido que los modelos sean más precisos, exactos y completos, se carece del conocimiento de cuales son las

relaciones funcionales que gobiernan los patrones generales del crecimiento, comportamiento en la dinámica de la formación, desarrollo y rendimiento de masas forestales.

El uso de los modelos matemáticos ha ocasionado una mayor apreciación de sus cualidades pero también ciertos abusos y malos entendidos, en lo general, derivados de la fácil manipulación computacional y también porque la información acerca de los detalles internos de los mismos, ha sido mucho menos difundida que la información e instrucciones de empleo (Mendoza, 1983).

Para Islas y Mendoza (1992) los modelos que se usan actualmente son aquellos que sobrevivieron al análisis crítico y que mostraron capacidad tanto explicatoria como predictiva, lo cual les dio la posibilidad de ser aplicados en la planeación de operaciones de manejo forestal.

La construcción de estas herramientas debe continuarse en el país, bajo la concepción actual de un modelo de estimación del incremento y rendimiento de rodales, es decir, como una familia de funciones a partir de las cuales con un computador es posible compilar en forma rápida y segura la representación gráfico-tabulares del comportamiento probable de los rodales a través del tiempo, según ciertas políticas de manejo, presuntas para condiciones ecológicas de interés (Zepeda, 1990).

Este panorama y tendencias del modelado matemático del crecimiento y rendimiento de árboles y masas forestales así como la gran variedad de modelos, han ocasionado que se planteen las siguientes preguntas: ¿Existen algunas relaciones entre las ecuaciones? y ¿Han sido aplicados correctamente los modelos a los diversos estudios del crecimiento?.

Por lo anterior, en el presente trabajo se plantean los siguientes objetivos generales:

1. Realizar un concentrado de información sobre modelado matemático con énfasis en el crecimiento de árboles y masas forestales.

2. Analizar los supuestos de los modelos más usados en la investigación de crecimiento de árboles y masas forestales, con los siguientes objetivos específicos:

- 2.1. Determinar las componentes de crecimiento.

- 2.2. Determinar las formas generales de crecimiento.

- 2.3. Comparar curvas de crecimiento.

2. REVISION DE LITERATURA.

2.1 Conceptos generales.

2.1.1 El concepto de modelo.

Un modelo es una representación, versión simplificada y parcial, idealización, abstracción o replica de un objeto, proceso o sistema real que se desea describir o cuyos patrones de conducta se desean analizar, mediante la integración de la información empírica y de los procesos lógicos de ese sistema (France y Thornley, 1984; Dym e Ivey, 1980; Mendoza, 1983; Shapiro y Gross, 1981; Taha, 1986; Méndez, 1976; Hughell, 1991; Dykstra, 1984; Edwards y Hamson, 1992).

Los modelos como abstracciones representativas de un sistema pueden adoptar diferentes formas: íconos, gráficas o pictóricos, reproducciones a escala, verbales y matemáticas. Estas últimas son, generalmente, las que motivan interés y tienen utilidad en la simulación del crecimiento (Ramírez, 1994).

En ocasiones se confunden los modelos y particularmente los modelos matemáticos, con los físicos o con la realidad del problema que pretenden simular. Esto es, cuando las matemáticas hacen conexión con un problema, con frecuencia se olvida que se está tratando con una abstracción del problema que se tiene únicamente una relación indirecta con el mismo y que solo

representan un conjunto de supuestos que simplifican la realidad. Para algunos críticos que son incapaces de aceptar el grado de simplificación de la realidad, generalmente, afirman que un modelo o es muy complejo o es sobresimplificado.

Cuando la expresión de la situación real se establece en términos simbólicos, el mundo real llega a ser un modelo matemático en el cual las cantidades reales y los procesos son reemplazados por símbolos y operaciones matemáticas (Maki y Thompson, 1973).

Los modelos matemáticos por su naturaleza tienen supuestas aproximaciones en su construcción y por lo tanto tienen rangos de validez restringidos. Estos rangos pueden ser amplios si los modelos son cuidadosa y razonablemente contruidos (Dym e Ivey, 1980) y no deben aplicarse fuera de estos rangos (Edwards y Hamson, 1992).

En la conceptualización de lo que es un modelo, se ha registrado el concepto sistema del que también resulta conveniente su definición.

Un sistema es un agregado o conjunto de elementos reunidos en alguna interacción o interdependencia regular; es el objeto o fenómeno bajo estudio, representa la unidad más grande a ser considerada. Un sistema puede referirse a una corporación, proceso químico, dispositivo mecánico, mecanismo biológico, una

sociedad, una economía, o cualquier otro objeto concebible que esté bajo estudio. La respuesta de un sistema puede medirse cuantitativamente o enumerarse; por ejemplo: la ganancia de una corporación, el rendimiento de un proceso químico, la fuerza rotatoria de un motor, duración de vida de un organismo y la tasa de inflación de una economía, entre otros.

Con mucha frecuencia diversos autores emplean de manera indistinta los conceptos modelo, ecuación y función para referirse a lo mismo, lo que obedece quizá a una cuestión de semántica. Sin embargo, otros como France y Thornley (1984) distinguen lo siguiente: un modelo matemático representa únicamente un conjunto de supuestos del sistema, sean estos biológicos o no; la ecuación matemática es la traslación exacta de ideas del sistema en lenguaje matemático, lo cual requiere de fluidez matemática y un sólido conocimiento de las ideas del sistema a ser trasladadas; y una función (por ejemplo, de crecimiento) es generalmente usada para denotar una función analítica que puede ser escrita en una ecuación simple. Una función se compone de dos conjuntos y una regla de asociación, la regla asigna a cada elemento del primer conjunto (dominio) uno y solo un elemento del segundo conjunto (ámbito); la regla de asociación es una ecuación matemática; la ecuación refleja la esencia de los datos numéricos. Pienaar (1965; citado por Acosta, 1991) define a un modelo matemático como una expresión matemática de una relación entre variables, las cuales pueden ser predichas (o explicadas) lógicamente, mientras que un modelo matemático de

crecimiento biológico es una expresión adicional de una hipótesis lógica concerniente a los procesos de crecimiento biológico.

2.1.2 Importancia de los modelos.

En la Silvicultura así como en la Biología, Sociología y Economía, se han hecho un gran número de intentos para expresar el crecimiento como una fórmula matemática. Una razón que motiva lo anterior es la adecuada planeación a largo plazo que la Silvicultura requiere con información confiable acerca del rendimiento y crecimiento de los rodales (Prodan, 1968).

Algunos autores cuestionan la aplicación de las ecuaciones y modelos matemáticos en la investigación del crecimiento, señalando que el fenómeno del crecimiento difícilmente puede ser expresado por medio de una función matemática. Sin embargo, Mendoza (1983) señala que las ecuaciones matemáticas que a veces parecen muy complejas, son de mayor accesibilidad al entendimiento humano que los fenómenos biológicos.

El incremento de árboles y masas forestales es afectado por una gran cantidad de factores, muchos de los cuales son difíciles de medir y más complejo aún, determinar e interpretar su influencia sobre el crecimiento (Ramírez, 1983). Sin embargo, se recurre al método científico y al uso de modelos a fin de reducir la posibilidad de error, como el rechazar un postulado cierto o aceptar un postulado falso (Mendoza, 1983).

Los modelos matemáticos constituyen las herramientas analíticas más utilizadas en la actualidad para la generación de conocimientos en el área del crecimiento y producción de masas forestales, ya que de esta forma, a través de fórmulas matemáticas que deben considerar un determinado horizonte de planeación en el que ocurren procesos aleatorios, se representan los procesos biológicos que ocurren a nivel de árbol individual o del rodal completo.

La importancia de los modelos puede establecerse en base a la contribución y utilización de éstos.

Para Mendoza (1983) y France y Thornley (1984) la contribución y utilización generalizada de los modelos está dada en:

1. Captar, organizar y presentar de manera cómoda y sencilla información de fenómenos naturales complejos.

- Las hipótesis expresadas en términos matemáticos pueden proporcionar una descripción cuantitativa y un conocimiento de los problemas biológicos.

- La necesidad de un modelo de perfección matemática puede proporcionar una estructura conceptual que puede ayudar a localizar con toda precisión áreas donde falta conocimiento, y puede estimular nuevas ideas y enfoques

experimentales.

- Un modelo matemático puede ser una buena manera para proporcionar una fórmula mediante la cual el conocimiento investigado se hace confiable en una forma fácil.

2. Detectar y analizar relaciones.

- Un modelo puede proveer un medio poderoso para resumir datos, y también un método para interpolar o para una cuidadosa extrapolación.

- Los datos son más precisos, pero también más caros para obtenerlos; un modelo puede algunas veces hacer más completo el uso de los datos.

3. Integrar y analizar un conjunto de investigaciones separadas sobre un tema común.

- En un sistema con muchos componentes, un modelo provee una forma de originar a la vez conocimiento acerca de las partes, para dar un panorama coherente de la conducta del sistema completo.

- El modelado puede ayudar a proveer de estrategias y

soportes tácticos para un programa de investigación motivando a los científicos y fomentando la colaboración.

4. Tomar decisiones sobre manejo de recursos naturales.

- Los modelos estimulan la adopción de métodos mejorados de producción.
- Los modelos facilitan el diseño de experimentos para responder a preguntas particulares, o para discriminar entre mecanismos alternativos.
- El poder predictivo de un modelo exitoso puede ser usado tanto en la investigación y desarrollo como en el manejo y planeación.

Los estudios de crecimiento a través de funciones de producción tienen la intención de suministrar una base confiable para permitir que el manejo forestal se realice como un proceso administrativo.

Por lo que, los principales propósitos de los modelos de crecimiento y rendimiento son (Alder, 1980; Adlard, 1983; Hughell, 1991; Zepeda, 1990; Mendoza, 1993):

1. Pronosticar rendimiento y crecimiento a través de la

descripción de las tasas de crecimiento de los recursos forestales para las especies y sitios más importantes en la unidad de manejo.

2. Establecer las opciones técnicamente viables de producción que contemple, entre otras:

- regímenes silvícolas que procuren estructuras diamétricas residuales de características deseables,
- los tipos, intensidad y frecuencia de aclareos más convenientes,
- la distribución de productos más provechosa,
- los criterios de madurez y su fijación en el tiempo,
- la repercusión de prácticas actuales de manejo,
- las densidades iniciales de plantación más adecuadas,
- la cuantificación de la contribución de las actividades involucradas y la estimación de los factores productivos que se requieren para la eficiente ejecución de éstas. Además de cubrir los aspectos de tecnología de cultivo, incluir también elementos de valoración de las actividades de producción (análisis

económico-financiero). Sin embargo, los supuestos del manejo forestal tradicional presuponen una abundancia de factores para la producción y los elementos financieros se consideran criterios auxiliares de decisión, o bien se les ignora, es natural entonces que las funciones de producción estén diseñadas para predecir crecimiento y rendimiento en volumen casi de manera exclusiva.

4. Simular prácticas silviculturales.

5. Comparar alternativas de manejo.

- Incorporar la experiencia acumulada sobre efectos de tratamientos silvícolas en masas forestales para prever las tasas de producción bajo sistemas alternativos de manejo.

2.1.3 Proceso biológico del crecimiento.

Todos los seres vivos son, en varias etapas de su historia de vida, capaces de crecer; en condiciones adecuadas estos pueden cambiar principalmente en tamaño, forma y/o número (Hunt, 1990). Sin embargo, el crecimiento se refiere comúnmente a un aspecto de los cambios de un sistema orgánico que presenta en sí mismo, como un aumento en tamaño que puede ser medido en longitud, diámetro o peso (Bertalanffy, 1951; citado por Prodan, 1968). De acuerdo al tipo de variable, el crecimiento puede ser unidireccional (altura, diámetro), bidireccional (área basal) y/o tridimensional (volumen).

Cuando analizamos aspectos del desarrollo de las plantas es difícil definir si ellas han crecido o no. Por ejemplo, cuando una semilla se desarrolla en una plántula, o cuando una planta alcanza la etapa reproductiva y comienza a producir flores y frutos se pierde biomasa; algo similar sucedería si una planta produce varios vástagos y muere y la suma de la biomasa de todos ellos es menor que la biomasa de la planta madre (Franco, 1983).

Por otro lado, puede haber casos de incremento en volumen, dados, por ejemplo, por una mayor absorción de agua durante la época de lluvias, el cual puede ser reversible una vez que es utilizada durante la época de sequía. En este caso, no sería conveniente considerar que la planta ha crecido (Franco, 1983).

En alguna literatura en idioma inglés, sobre el crecimiento de plantas, el verbo crecer es usado para cualquier proceso de cambio gradual en el estado de existencia de un objeto. De ahí que puede haber crecimiento no solamente en el sentido de aumento de tamaño y número, sino también en sentido negativo. Por lo que resulta conveniente definir al crecimiento como un proceso de cambio irreversible en tamaño, forma o número; es un proceso unidireccional, bidimensional y/o tridimensional, la mayor parte de las veces continuo. Los cambios en forma son acompañados casi siempre por cambios en tamaño de una manera cuya relación funcional no es siempre fácil de definir (Franco, 1983).

Prodan (1968), señala que el crecimiento y desarrollo de los organismos vivos puede consistir de bastantes ciclos de crecimiento, por ejemplo, en el tiempo de vida de un árbol, usualmente ocurren tres ciclos de crecimiento:

1. El desarrollo desde la semilla hasta la planta de un año de edad (ciclo ovular).
2. El ciclo que es determinado por las raíces y las primeras hojas.
3. El ciclo de crecimiento básico a través de las principales fases de la vida de un árbol.

En la mayoría de los casos, los primeros dos ciclos son indistinguibles en comparación con el tercero. En árboles, usualmente tampoco es claro la diferencia entre el segundo y el tercero. Las fluctuaciones del incremento en lapsos de tiempo muy pequeños no son considerados o al menos tienen poco o nulo interés.

Algunas especies tropicales crecen durante todo el año, contrario a lo que sucede en especies de clima frío, cuyo crecimiento se limita solamente a dos meses y aun menos. Por lo tanto, se habla de período de crecimiento o época de crecimiento. Durante la época de crecimiento, el incremento no es simultáneo para todas las partes del árbol; el crecimiento en altura generalmente se presenta antes que el crecimiento en diámetro, mientras que el crecimiento de las raíces se lleva a cabo en un período mucho más largo que el de las partes aéreas. En climas cálidos el crecimiento de la raíz se presenta también en el período de invierno (Klepac, 1983).

Durante el período de crecimiento el aumento es continuo con interrupciones, por lo que se habla del período diurno del incremento. En una forma general, la porción más grande del incremento en altura se presenta en la noche. El incremento en diámetro también presenta una periodicidad diurna; las variaciones diurnas del incremento en diámetro se deben al hecho de que la planta experimenta por transpiración una gran pérdida del agua que absorbe del suelo, lo que da lugar a una disminución

del incremento en volumen; mientras que la absorción del agua durante la noche da lugar a un incremento en el diámetro del árbol. La disminución del incremento y la absorción dependen de la especie, la transpiración, temperatura, humedad en el suelo, etc. (Klepac, 1983).

Las variaciones diarias en el diámetro, debidas a los cambios en la cantidad de agua se manifiestan en el incremento, las cuales se producen por una diferencia entre las dilataciones nocturnas y las contracciones diurnas. Es posible que también durante las contracciones diurnas el crecimiento continúe en la zona del cambium, debido a que las zonas de crecimiento son frecuentemente capaces de obtener agua en detrimento de aquellas zonas que no crecen (Klepac, 1983).

De todo esto se puede ver que el crecimiento de los árboles es continuo con interrupciones. Esto se manifiesta especialmente en la zona templada donde los períodos de desarrollo se alternan con los períodos de reposo. Si por ejemplo, consideramos la altura de un árbol en función de su edad, esta función será continua con interrupciones (Klepac, 1983).

El crecimiento ocurre en el árbol total, en ramas, fustes y raíces, aunque únicamente el fuste y algunas ramas principales son usadas comúnmente. El crecimiento de un rodal es un proceso variable y dinámico incluyendo no únicamente el funcionamiento de árboles individuales sino la mortalidad y otros resultados de

interacciones complejas de los árboles (Davis, 1966).

Dentro del tallo o tronco, existen tres zonas de crecimiento: los meristemos terminales, el cambium primario y el secundario. El crecimiento se manifiesta en varias fases: división, crecimiento, diferenciación y maduración de las células. El incremento que se manifiesta en el meristemo terminal usualmente se le clasifica como crecimiento primario y las células formadas se les llama células primarias. El crecimiento de los meristemos laterales se manifiesta en el incremento del diámetro; se le llama crecimiento secundario (Klepac, 1983).

El crecimiento biológico es resultado de numerosos y enormes procesos complejos que parecen notablemente simples, particularmente para árboles. Si combinamos más y más árboles similares, el incremento en su tamaño sigue siempre una curva sigmoideal suave. Al principio la curva es cóncava hacia arriba, mientras que después comienza a ser convexa. Aunque el crecimiento depende de la tendencia y fluctuaciones del medio, este patrón a largo plazo permanece de modo sorprendente estable (Zeide, 1993).

La tasa de crecimiento de las plantas resulta de la interacción de dos fuerzas opuestas. El componente positivo, el más extenso manifestado en la expansión de un organismo, representa la innata tendencia hacia una multiplicación exponencial; este componente está asociado con el potencial

biótico, actividad fotosintética, absorción de nutrientes, metabolismo constructivo, anabolismo, etc. El componente opuesto representa las restricciones impuestas por factores externos (competencia, recursos limitados, respiración, y fatiga) e internos (mecanismos regulatorios de sí mismo, y envejecimiento); estos factores que afectan adversamente al crecimiento han sido referidos a una resistencia del medio, metabolismo destructivo, catabolismo, respiración y así sucesivamente (Zeide, 1993). Generalmente, a estas dos fuerzas se les conoce como los procesos anabólicos y catabólicos, respectivamente.

La expansión de crecimiento es proporcional al tamaño actual del árbol; la declinación del crecimiento de árboles individuales parece ser más variable y puede estar dado con igual exactitud pero con una variedad de expresiones. Esto puede reflejar que un gran número de factores impiden el crecimiento: escasez de recursos, competencia, reproducción, enfermedades, plagas, disturbios, etc. (Zeide, 1993).

Convenientemente, las leyes o postulados del crecimiento son con frecuencia formulados en pares que reflejan tanto los componentes multiplicativos como los limitantes. Dos postulados de Hutchinson (1978) citado por Zeide (1993) del crecimiento de la población son:

1. Todo organismo vivo dentro de cada especie surge de al menos un padre (postulado de paternidad).

2. En un espacio finito hay un límite superior para el número de seres finitos que pueden ocupar o utilizar ese espacio (postulado de un límite superior).

Señala Zeide (1993) que en 1941, Medawar formuló cinco leyes del crecimiento biológico, y que, cuando él regresó al mismo problema cuatro décadas después, condensó éstas cinco en dos leyes básicas (Medawar y Medawar 1983; citados por Zeide, 1993). Estas son similares a los postulados de Hutchinson:

1. Fundamentalmente, el crecimiento es multiplicativo. Resulta de que el crecimiento biológico es por si mismo, típicamente, capaz de crecer.

2. La tasa relativa de crecimiento es siempre decreciente (ley de Minot).

Los procesos anabólicos tienen una relación con el tamaño de la copa y la extensión de las raíces o, en general, el área foliar del árbol. Esto es porque el árbol crece mediante el proceso de fotosíntesis. Para que esto sea posible el árbol requiere energía solar, carbono, nutrientes y agua.

El proceso de fotosíntesis utiliza la luz solar y el dióxido de carbono para generar la energía bioquímica y asimilar carbono. Esto ocurre en las hojas del árbol. Los nutrientes y el agua entran al árbol mediante las membranas de las hojas y por las

raíces (Hugghell, 1991).

El proceso catabólico es la respiración. El organismo tiene que respirar para liberar energía bioquímica para sus actividades fisiológicas normales. Este proceso catabólico tiene una relación directa con la biomasa viva del organismo.

Para ejemplificar lo anterior a continuación se sugieren ejercicios con organismos hipotéticos; los procesos anabólicos son proporcionales a su superficie, y los procesos catabólicos, son proporcionales a su volumen:

$$\text{Tasa de crecimiento} = a * (\text{superficie}) - b * (\text{volumen})$$

a). Ejemplo con el organismo hipotético del cubo.

Se sabe que:

$$V=L^3$$

Donde:

V: volumen del cubo

L: largo del lado del cubo

Por lo tanto:

$$L=V^{\frac{1}{3}}$$

La superficie se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$S=6L^2$$

Donde, S: superficie

Sustituyendo

L por $V^{\frac{1}{3}}$ resulta:

$$S=6\left[V^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

$$=6V^{\frac{2}{3}}$$

Finalmente, se puede sustituir esto último y **V** por la superficie y volumen, respectivamente, en la ecuación original de la tasa de crecimiento [Tasa de crecimiento = $a * (\text{superficie}) - b * (\text{volumen})$], para obtener la ecuación específica.

$$IC=6V^{\frac{2}{3}}-V$$

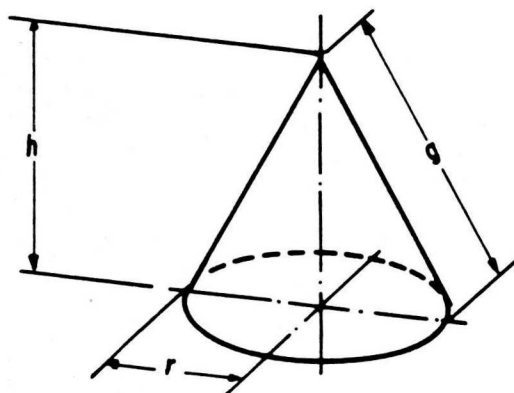
Donde, IC: tasa de crecimiento (incremento corriente en volumen)

Esta es la ecuación de Von Bertalanffy que se presenta regularmente en la forma:

$$IC=aV^m-bV$$

Como se puede apreciar, en el caso del cubo **a=6**, **b=1** y **m=2/3**.

b). Ejemplo con el organismo hipotético del cono. A continuación se sugiere el ejercicio con el organismo hipotético del cono (figura plausible para la copa de un pino), considerando una superficie lateral mínima:



El volumen del cono se calcula con la ecuación:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad (1)$$

Donde:

V: volumen

r: radio

h: altura

Para un volumen constante, el cono que tiene la superficie lateral mínima es aquel donde $h = (2)^{1/2} r$. Haciendo $h = (2)^{1/2} r$, ahora la ecuación (1) es:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi r^3 = k r^3 \quad (2)$$

De la ecuación (2), podemos expresar el radio (r) en términos del volumen (V), como sigue:

$$r = k^{-1} V^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

La superficie lateral se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$S = \pi r g \quad (4)$$

Donde:

S: superficie

r: radio

g: largo del cono

Se sabe también que:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(\sqrt{2}r)^2 + r^2}$$

$$g = \sqrt{3}r \quad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la (4), se tiene:

$$S = \pi r \sqrt{3}r = \sqrt{3}\pi r^2 \quad (6)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la (6), se tiene:

$$S = \sqrt{3}\pi k^{-2} V^{\frac{2}{3}} = q V^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

Al explicar "Tasa de crecimiento = $a \cdot (\text{superficie}) - b \cdot (\text{volumen})$ ", y sustituyendo la ecuación (7), se tiene:

$$\text{Tasa de crecimiento} = aqV^{\frac{2}{3}} - bV = \alpha V^{\frac{2}{3}} - \beta V$$

Esta es la ecuación de Von Bertalanffy que se presenta regularmente en la forma:

$$IC = aV^{\frac{2}{3}} - bV$$

Para el caso del cilindro, cuerpo geométrico plausible de la copa de una latifoliada, ver López (1995).

2.1.4 Factores que afectan el crecimiento

El crecimiento de los árboles y de las masas forestales está determinado por los factores genotipo, ambiente e interacción genotipo-ambiente. A continuación se desglosan los elementos de estos factores (Orantes, 1980; Rodríguez, 1982; Cano, 1988; Benavides, 1987; Bojorges, 1990; Avery, 1975; Clutter et al, 1983; Daniel, Helms y Baker, 1982; Bruce y Schumacher, 1950).

1. Factor Ambiente.

a). Clima. Se considera a la precipitación pluvial y distribución en el año de la misma, temperatura, humedad del aire, intensidad de la radiación, velocidad

del viento, etc.

b). Suelo. Se constituye por el drenaje, textura, Ph, profundidad, contenido de arcilla y arena, humedad del suelo, capacidad de campo, contenido de fósforo, nitrógeno, potasio y materia orgánica, contenido bacteriano, etc.

c). Fisiografía. Se contempla a la latitud, altitud, exposición, pendiente, etc.

2. Factor Genotipo. Se considera a la especie y los efectos elásticos de la misma.

3. Factor Interacción Genotipo-Ambiente.

a). Competencia. Se consideran a las malezas, especies indeseables y la densidad del arbolado mismo.

b). Enfermedades. Pueden ser enfermedades de las hojas, fuste o de la raíz.

c). Siniestros. Los incendios constituyen el principal.

d). Aplicación de trataminetos culturales. Destacan los aclareos, podas, fertilización y control de la competencia.

Los factores ambientales influyen en las características de un proceso biológico observado; el alto número y variación frecuente de estos factores pueden ser vistos como razones del porqué las características de los procesos observados están entremezclados con el conjunto externo en un sistema complejo interno, por lo que los valores observados están probablemente cambiando continuamente (Bán, 1988).

Resolver un problema de correlaciones múltiples entre el crecimiento y tantas variables independientes como las indicadas, implica investigaciones de larga duración que habrán de incluir labor en el campo y en el laboratorio acerca de las características del suelo, el análisis de los factores climáticos y, después, la selección de un mínimo de todas estas variables que no solo den correlaciones suficientemente altas sino que también se pueda aplicar rápidamente en la práctica para la estimación de la calidad del sitio (Bruce y Schumacher, 1950). Todos los factores son interdependientes, por lo que los principios del crecimiento generalmente se tienen que determinar mediante la observación de las interacciones entre los factores.

Teóricamente sería posible estimar la productividad de un lugar analizando los diversos y variados elementos de sitio. Sin embargo, tales estimaciones pueden, en un momento dado, carecer de valor inmediato para el dasónomo práctico (Avery, 1975).

En México son pocos los trabajos de esta naturaleza que se han desarrollado, por lo que no se cuenta con suficiente información para conocer qué factor o qué elemento es el indicador más adecuado de la calidad de sitio para la variedad de especies existentes. Entendiéndose como calidad de sitio a la suma de factores que afectan la capacidad productiva del bosque u otros tipos de vegetación (Spurr y Barnes, 1982).

Los diversos análisis generales indican que el crecimiento en altura refleja mayormente las condiciones de sitio, mientras que el crecimiento en diámetro refleja las condiciones de la densidad local o competencia. Por ejemplo, una característica interesante es que la culminación del crecimiento en la altura se logra antes que la culminación del crecimiento en el diámetro. Esto se aprecia en el coeficiente mórfico del árbol el cual sigue una trayectoria también sigmoide aunque inversamente proporcional al diámetro del árbol (Cano, 1988). La altura que alcanzará un árbol cuando crece en un cierto sitio y hasta una edad determinada es, supuestamente dependiente del suelo y del clima excepto cuando lo afecta la densidad del rodal ya que el crecimiento en altura de los árboles se ve afectado negativamente tanto por la presencia de rodales muy abiertos como por la de rodales muy densos (Daniel, Helms y Baker, 1982).

2.2 Características de las curvas de crecimiento e incremento.

Para analizar las características de las curvas de crecimiento e incremento de árboles y de las masas forestales, es necesario revisar las siguientes definiciones:

El **incremento** es el aumento en el tamaño en un cierto intervalo de tiempo.

El **incremento corriente anual (ICA)**, es el aumento en tamaño alcanzado en un año.

El **incremento periódico** es el aumento en tamaño en un número de años, o dentro de un período de tiempo definido.

El **incremento total**, es el crecimiento de un árbol o una masa durante toda su vida.

El **incremento periódico anual**, es el promedio anual del incremento periódico.

El **incremento medio anual (IMA)**, es el promedio anual del incremento total; se obtiene dividiendo las dimensiones de un árbol o una masa entre su edad.

Al **incremento periódico anual** comúnmente se le llama **incremento corriente** y al **IMA** **incremento medio**.

Una curva de crecimiento es una representación gráfica de tamaños logrados y una curva de incremento muestra incremento periódico o anual.

La ordenada de la curva de crecimiento representa la suma de todos los incrementos anuales sobre el tiempo de observación, por lo tanto la **curva de crecimiento es la curva acumulativa de todos los incrementos** (Prodan, 1968).

Las formas como puede expresarse el crecimiento son:

- a). Rendimiento total a lo largo de un turno, incluyendo volúmenes retirados en las cortas intermedias.
- b). El incremento medio anual (incremento medio).
- c). El incremento periódico anual (incremento corriente).
- d). El crecimiento bruto.
- e). El crecimiento neto.

Por otra parte, se deben distinguir los términos incremento, producción y rendimiento. Cuando se habla del incremento del árbol o de la masa, se dice que su volumen aumenta, pero cuando se habla de un área definida se dice que produce; la producción es entonces la cantidad de madera producida en un sitio. Por lo anterior, se debe tratar separadamente la producción de una parcela definida (estrato o rodal) y el incremento que experimenta la masa.

El rendimiento es la cantidad total efectiva de producto útil susceptible de ser obtenida de un sitio dado (posible de ser cortada o ya cortada). Mientras que la producción representa toda la madera inventariable producida por un sitio (sea bruta o neta), el rendimiento es la porción de ella de producto útil obtenida. Por lo tanto, el rendimiento de un rodal puede ser menor o igual que su producción.

Una curva de crecimiento, en la mayoría de los casos, toma una forma sigmoide, similar a una curva de suma de frecuencias. Empieza en el origen o en un punto fijo, sube lentamente al principio y luego con mayor velocidad. Después, hay un cambio del gradiente (punto de inflexión) de la curva, es decir, el incremento disminuye, y luego, se mueve asintóticamente hacia adelante a algún valor final determinado por la naturaleza genética del organismo y sus limitaciones ambientales (Figura 1) (Yang, Kozak y Smith, 1978; Daniel, Helms y Baker, 1982; Prodan, 1968).

La curva de incremento inicia con el valor cero, aumenta al principio lentamente y después fuertemente, después de un máximo, el incremento disminuye y entonces asintóticamente se acerca a cero.

La curva de incremento medio es unimodal -semejante a la curva de incremento corriente- pero sube más lentamente y del mismo modo decrece (Prodan, 1968).

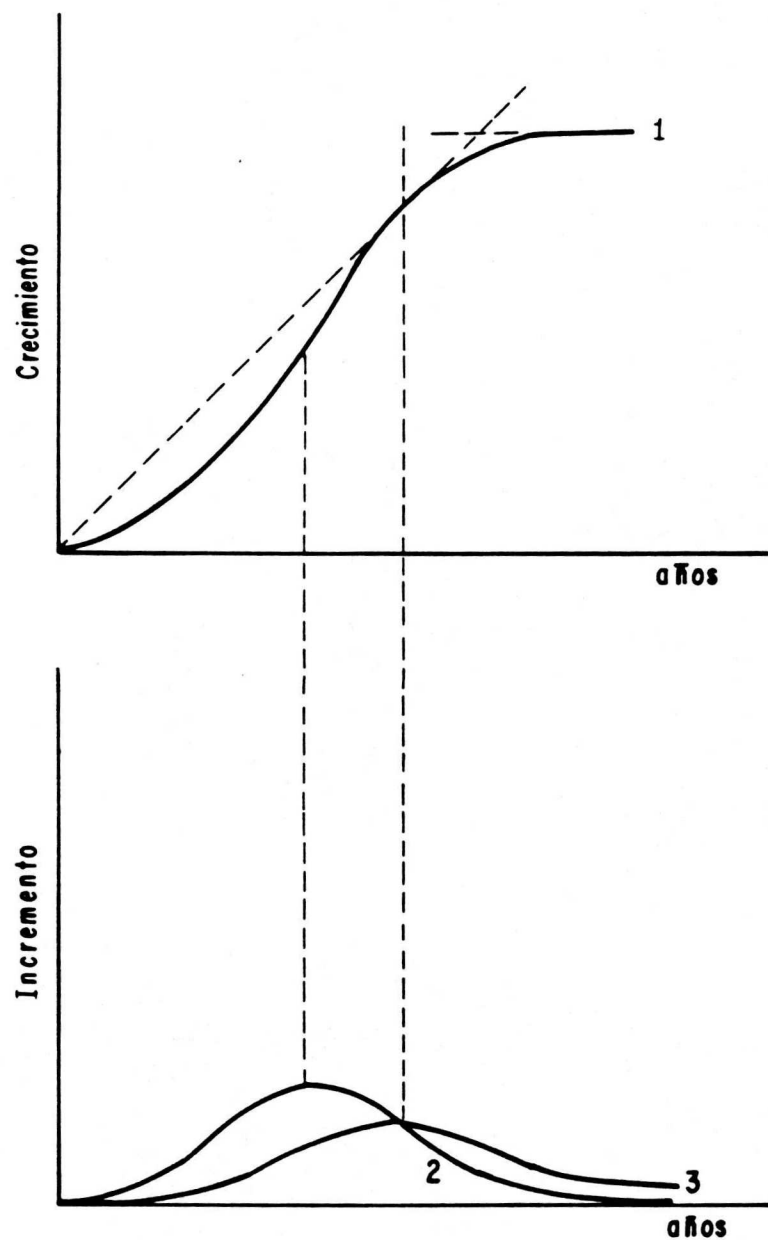


Figura 1. (1) Curva de crecimiento
 (2) Curva de incremento corriente
 (3) Curva de incremento medio.

La culminación del incremento corriente coincide con el punto de inflexión de la curva de crecimiento, mientras que la culminación del incremento medio ocurre siempre después y corresponde al punto donde la tangente del ángulo máximo trazada desde el origen de los ejes de coordenadas, toca por arriba a la curva de crecimiento. Por otra parte, el incremento corriente es igual al incremento medio, cuando éste último culmina (Klepac, 1983); si ambas curvas se presentan en la misma gráfica, estas se cruzan una con otra en el punto de culminación del incremento medio, es decir, el máximo del incremento promedio se tiende en un punto donde las dos curvas se cruzan una con otra (Prodan, 1968).

Peschel (1939) citado por Prodan (1968), registró cuatro características de una curva de incremento:

1. Cuando el valor del tiempo es cero el incremento es cero.
2. Cuando el valor del tiempo tiende al infinito el incremento tiende a cero.
3. Tiene dos puntos de inflexión.
4. Tiene un máximo.

Las curvas de crecimiento e incremento típicas se parecen a una densidad de probabilidad (distribución de frecuencias) y a una distribución de probabilidad (distribución de frecuencias acumuladas), respectivamente. Fundamentalmente, se parecen a una curva de incremento unimodal o de densidad de probabilidad

asimétrica. Así como una función de distribución es matemáticamente una integración de su función de densidad, la función de crecimiento de un organismo es el valor acumulativo de su crecimiento (Yang, Kozak y Smith, 1978); mediante la integración de la curva de incremento se obtiene la curva de crecimiento, hay una relación matemática cerrada entre estas curvas (Prodan, 1968). Una distribución de probabilidad tiene valores entre 0 y 1, por lo que es necesario agregar un factor de escala (multiplicador) a la función para describir el crecimiento verdadero de un organismo en los estudios de rendimiento y crecimiento. Comúnmente, el factor de escala es el valor superior asintótico que alcanza un organismo en la característica estudiada y determinado por la naturaleza genética y los factores ambientales que la naturaleza le imponen (Yang, Kozak y Smith, 1978).

Las curvas de crecimiento pueden representar (Figura 2) (Daniel, Helms y Baker, 1982):

1. Hábitos de crecimiento de especies.
2. Hábitos de crecimiento de genotipos de una especie.
3. Manifestación de un genotipo bajo diferentes clases de tratamiento silvícola.

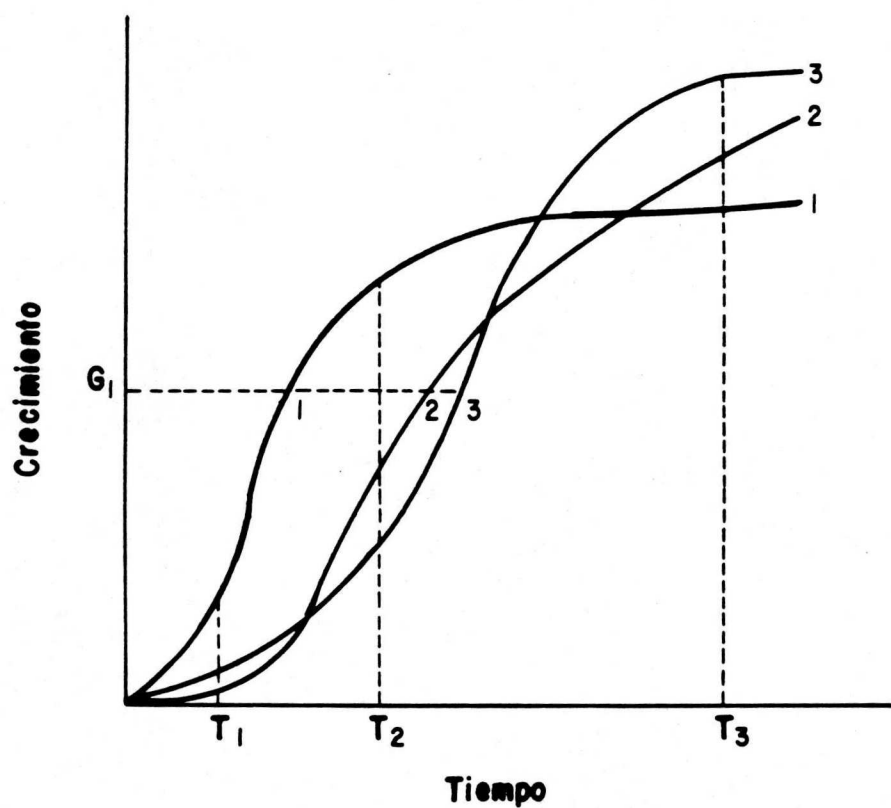


Figura 2. Patrones teóricos de crecimiento que presentan a tres diferentes genotipos o el efecto de tres tipos o niveles distintos de tratamiento (Daniel, Helms y Baker, 1982).

Por otro lado, el silvicultor necesita predecir en términos conceptuales amplios:

1. La extensión probable del período de crecimiento juvenil.
2. La tasa de crecimiento (pendiente de la curva).
3. El momento en que la tasa de crecimiento declina.
4. Hasta dónde estas características están bajo el control de factores genéticos y ambientales.

La duración del período de crecimiento juvenil lento es importante en aquellas situaciones en las que las plántulas deben superar la competencia de los pastos o los daños por enfermedades.

La tasa de crecimiento durante el gran período de desarrollo tiene mucho que ver con el tiempo que el árbol necesita para alcanzar un diámetro determinado del tronco.

La tasa de crecimiento puede aumentar mediante:

1. La selección de especies
2. La selección genética
3. El espaciamiento
4. La fertilización
5. La irrigación, si ésta es posible

Los efectos de las mayores tasas de crecimiento influyen por lo general en:

1. Una disminución en la longitud de las traqueidas y las fibras,
2. Una disminución en el porcentaje de celulosa y,
3. Una disminución, tal vez, en el porcentaje de madera tardía y la gravedad específica; pueden producirse aumentos del porcentaje de lignina, del espesor de los anillos, del volumen y tal vez, del porcentaje de madera temprana, lo que tiene como consecuencia una menor gravedad específica.

Las anteriores son tan solo tendencias, puede suceder lo contrario o simplemente no haber modificación alguna.

La mayor producción de volumen debida al incremento de la tasa de crecimiento, por lo regular sobrepasa con creces a cualquier cambio indeseable que pudiera ocurrir en las características determinantes de la calidad de madera (Daniel, Helms y Baker, 1982).

2.2.1 Crecimiento e incremento de árboles.

La mayoría de la información que a continuación se registra tiene como fuente principal a Klepac (1983), cuando no es así, se ha optado por citar al autor.

Los incrementos son resultado del desarrollo del árbol. Si se considera el crecimiento en altura, en diámetro normal, o en volumen, como una función de la edad del árbol se verá que estas magnitudes muestran un crecimiento similar a una curva sigmoide (Figura 3).

La tendencia de expansión prevalece al principio de vida de un árbol, mientras que la declinación del crecimiento llega a ser prominente al final. La característica es que la expansión de crecimiento es proporcional al tamaño actual del árbol. La declinación del crecimiento de árboles individuales parece ser, más variable y puede estar dado con igual exactitud pero con una variedad de expresiones.

Lo anterior, puede reflejar que un gran número de factores impiden el crecimiento: escasez de recursos, competencia, reproducción, enfermedades, plagas, disturbios, etc. Consecuentemente, la ruta de crecimiento es inherentemente imprecisa y puede ser vista como un valle amplio mas bien que una línea sencilla (Zeide, 1993).

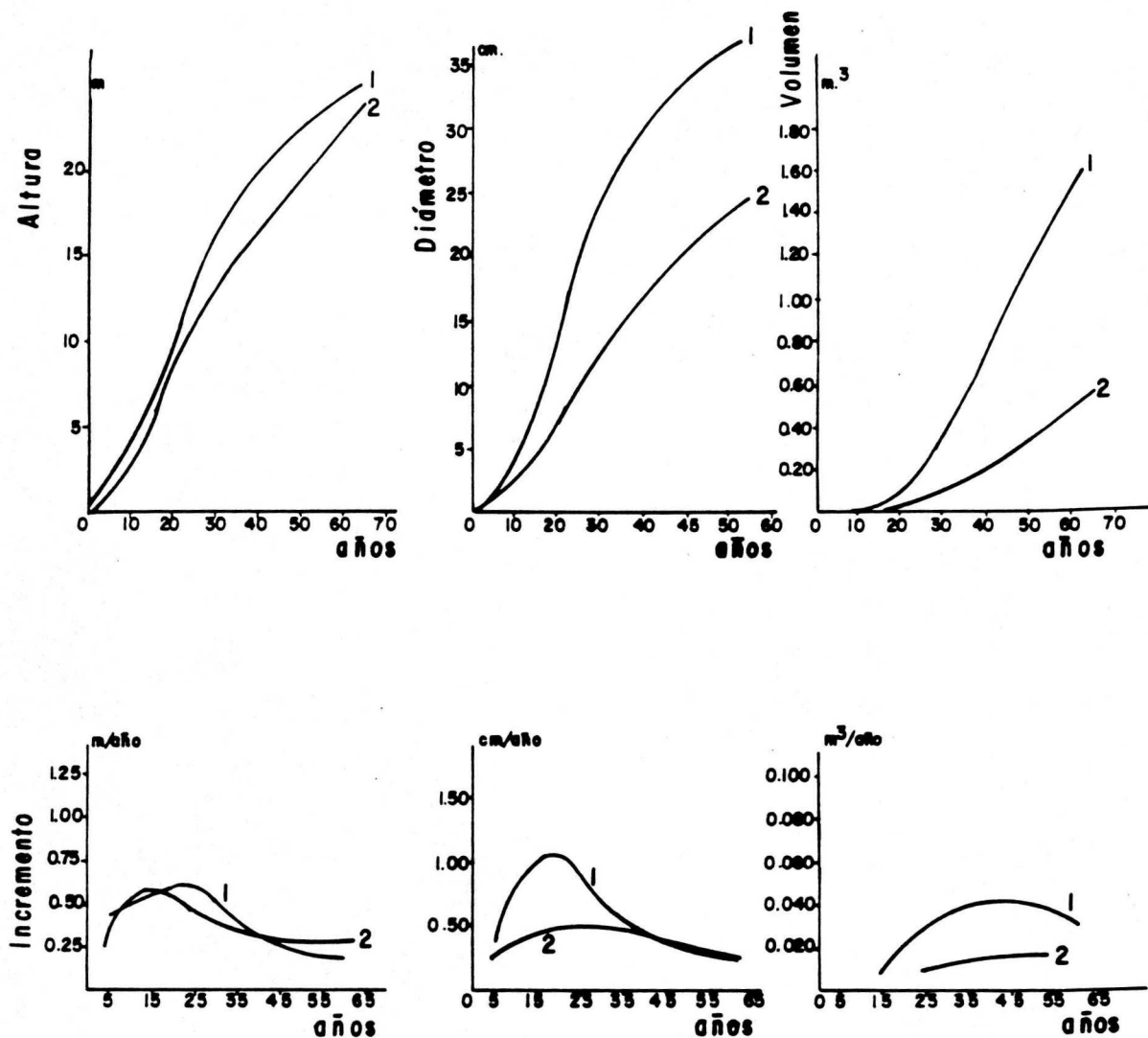


Figura 3. Crecimiento e incremento en altura, diámetro y volumen de *Pinus strobus* (1) y *Quercus sessiliflora* (2) [Klepac, 1983].

La historia del crecimiento de los árboles en rodales, o masas de la misma edad es muy distinta del crecimiento en masas de muchas o de todas las edades. En masas con la misma edad, los árboles vecinos competidores ejercen poca influencia en el ritmo de crecimiento del árbol dominante durante las primeras décadas de su vida; mientras que, en los rodales o masas de todas las edades, todos los árboles jóvenes se ven gravemente perjudicados por sus vecinos más viejos y más grandes. Por consiguiente, los árboles de rodales de la misma edad crecen a un ritmo más rápido mientras son jóvenes. Por lo tanto, los estudios de crecimiento se dividen, naturalmente, en esas dos categorías (Bruce y Schumacher, 1950).

El crecimiento en altura y en diámetro de los árboles individuales es diferente al crecimiento de las mismas características a nivel masa. Esto se debe tanto a la incorporación de una categoría a la siguiente como a la desaparición (mortalidad natural, cortas) (Cano, 1988).

Los estudios de Langsaeter notan que existe un amplio rango de densidad que produce sensiblemente el mismo incremento (Figura 4). Si la densidad se expresa en número de árboles o área basimétrica por hectárea, esto significa que al aumentar la densidad no necesariamente se aumenta la producción de la masa, sino que solamente se redistribuye el incremento en volumen posible en un mayor número de árboles (Cano, 1988).

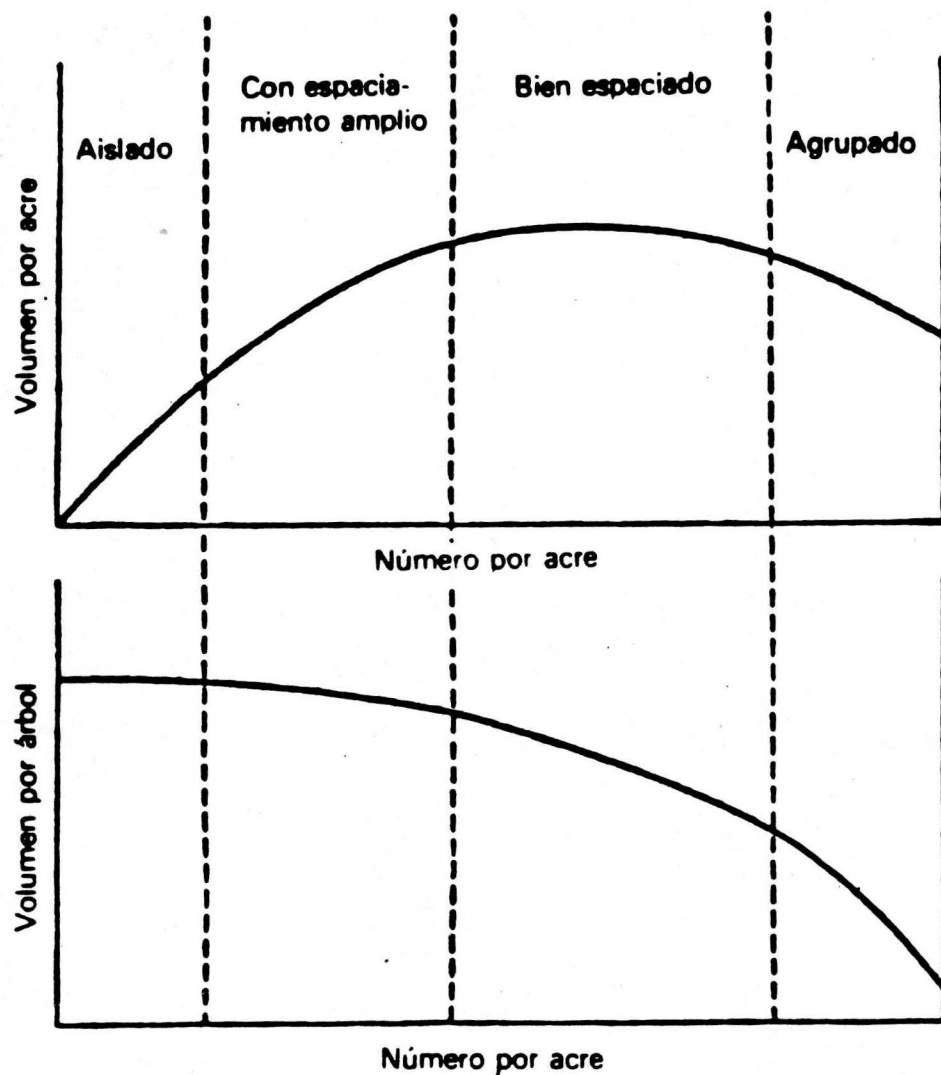


Figura 4. Cambios en el volumen por acre y por árbol con el aumento del número de árboles por unidad de superficie (Curva de Langsaeter) [Daniel, Helms y Baker, 1982].

2.2.1.1 Crecimiento e incremento del árbol en altura.

La variación en el incremento de altura en árboles individuales se debe probablemente a su diferente reacción al fotoperiodo. En especies agrícolas se ha investigado la influencia del fotoperiodo; los resultados han dado lugar a la diferenciación de plantas de fotoperiodo largo (necesitan una iluminación prolongada para florear) y de fotoperiodo corto (no florecen si la luz del día excede un límite definido). Entre las primeras y las segundas se encuentran plantas indiferentes al fotoperiodo. Las investigaciones sobre los árboles forestales han sido muy pocas y nunca han dado una idea clara de estos problemas.

Se debe enfatizar que el tiempo de la culminación del incremento en altura y el valor total del mismo en ese tiempo depende de un gran número de factores. En otras condiciones las especies forestales pueden exhibir otro ritmo de incremento, ya que su crecimiento en altura depende, entre otros factores importantes, del genotipo y de la calidad de estación (Figura 5).

Se puede decir que el incremento en altura bajo condiciones semejantes, culmina más temprano en las especies heliófilas como los pinos y un poco más tarde en las especies tolerantes como el abeto; más rápido en mejores calidades de estación y en árboles dominantes que en calidades malas y árboles oprimidos.

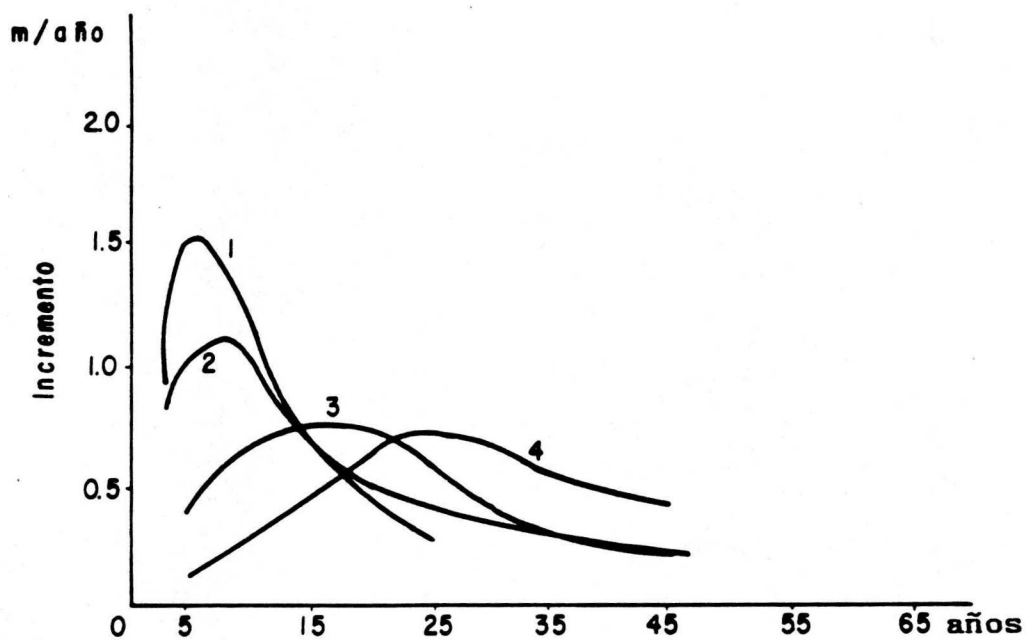
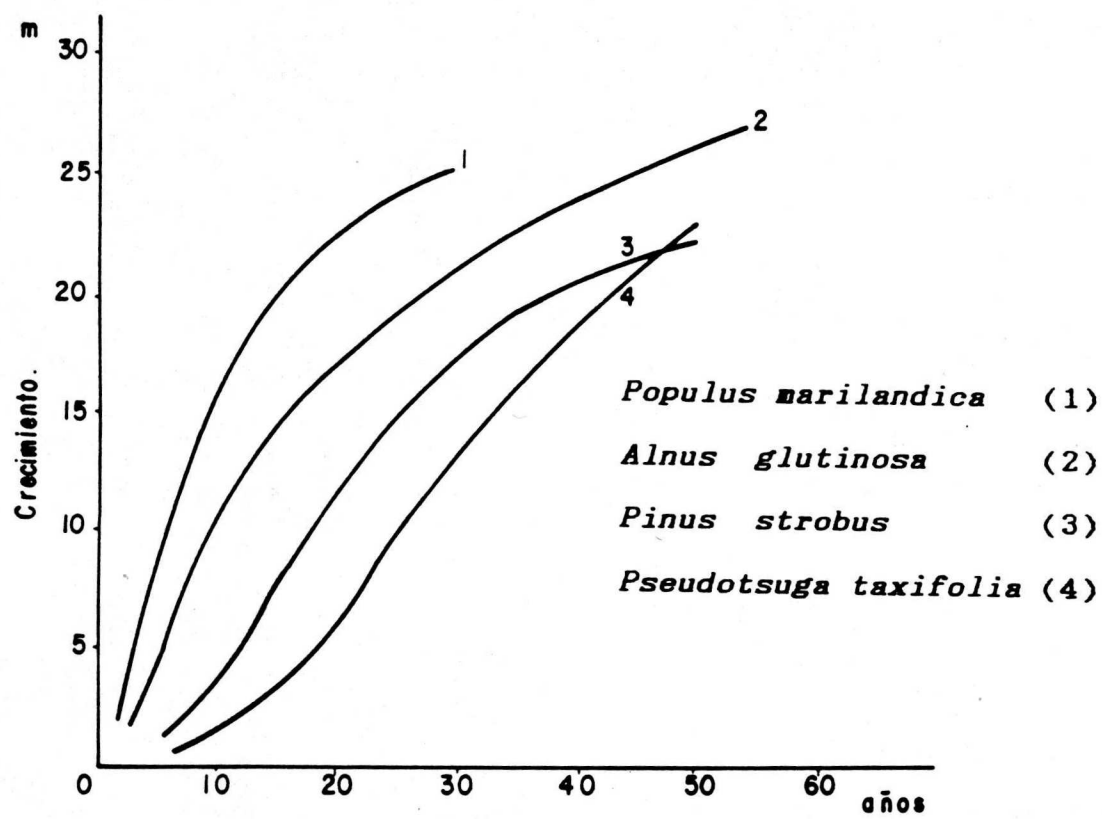


Figura 5. Crecimiento e incremento en altura de cuatro especies forestales [Adaptado de Klepac, 1983].

Es característico que el crecimiento e incremento en altura de los árboles esté menos influenciado que el diámetro por el medio ambiente.

Para el incremento en altura es de gran importancia la cantidad de reservas materiales que acumula el árbol durante el año, de ahí que sea comprensible que las raíces exhiben al principio un gran desarrollo. La culminación del incremento en altura ocurre más pronto en brotes de cepa que en individuos producidos por semilla. Sin embargo, el ritmo de incremento en brotes de cepa comienza a decrecer más pronto y disminuye de manera más rápida que el que sufren los provenientes de semilla (Figura 6).

Es interesante mencionar que el incremento en altura es menor en los años de producción de frutos, ya que se emplea una parte de las sustancias de reserva en la fructificación.

2.2.1.2 Crecimiento e incremento del árbol en diámetro.

Los mismos factores que influyen en el crecimiento e incremento del árbol en altura, actúan también en el diámetro. El incremento anual en diámetro se puede decir que depende también de la cantidad de reservas de materiales acumulados por el árbol durante el año.

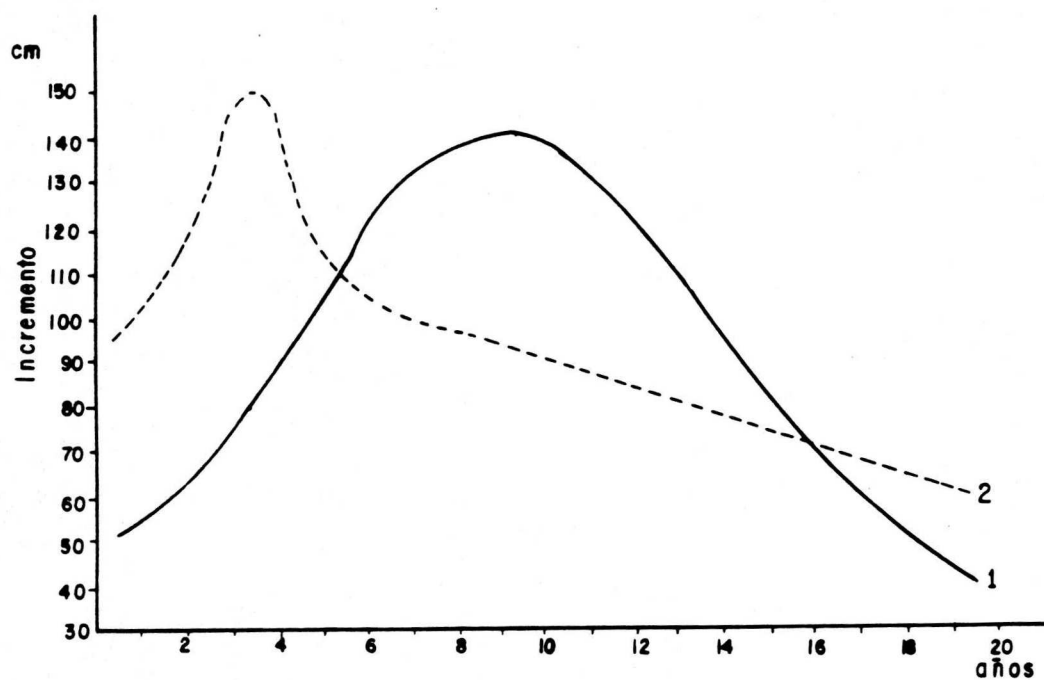
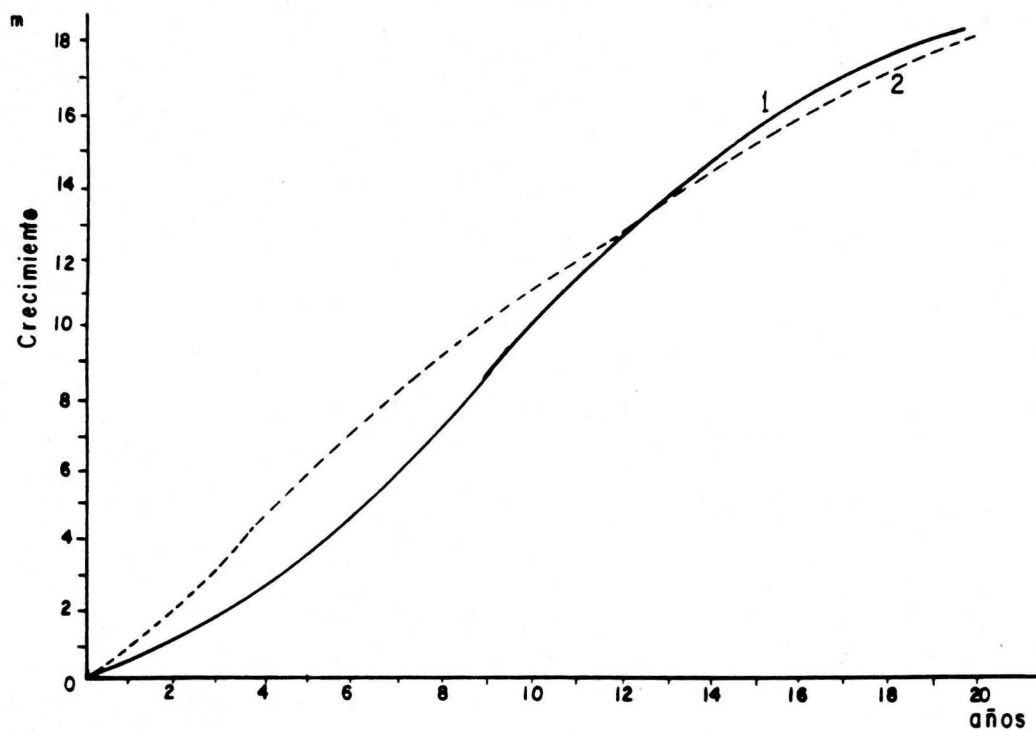


Figura 6. Crecimiento e incremento en altura de *Alnus sp.* proveniente de semilla (1) y de brotes de cepa (2) [Adaptado de Glavac, V., 1960; citado por Klepac, 1983]

Sin embargo, el crecimiento e incremento en diámetro del árbol depende más de la densidad que el crecimiento e incremento en altura; dentro de ciertos límites el incremento en diámetro es mayor cuando hay más espacio.

El incremento anual en diámetro del árbol se manifiesta en los anillos de crecimiento. El ancho de los anillos no es igual a lo largo de todo el fuste. Los anillos de crecimiento son más anchos en la parte superior del fuste inmediatamente abajo de las primeras ramas; más abajo el ancho de los anillos decrece y en la base del árbol se ensancha otra vez, lo que ocasiona a la porción inferior una forma especial.

Bajo condiciones normales el incremento en diámetro es pequeño al principio, después aumenta hasta alcanzar una fase de alta actividad y disminuye gradualmente, llegando a ser muy reducido en lo árboles viejos. La curva representativa del crecimiento en diámetro del fuste es también sigmoide como la curva del crecimiento en altura, con la única diferencia de que la curva del crecimiento en diámetro es más plana y toma la forma de línea recta en su origen (Figura 7).

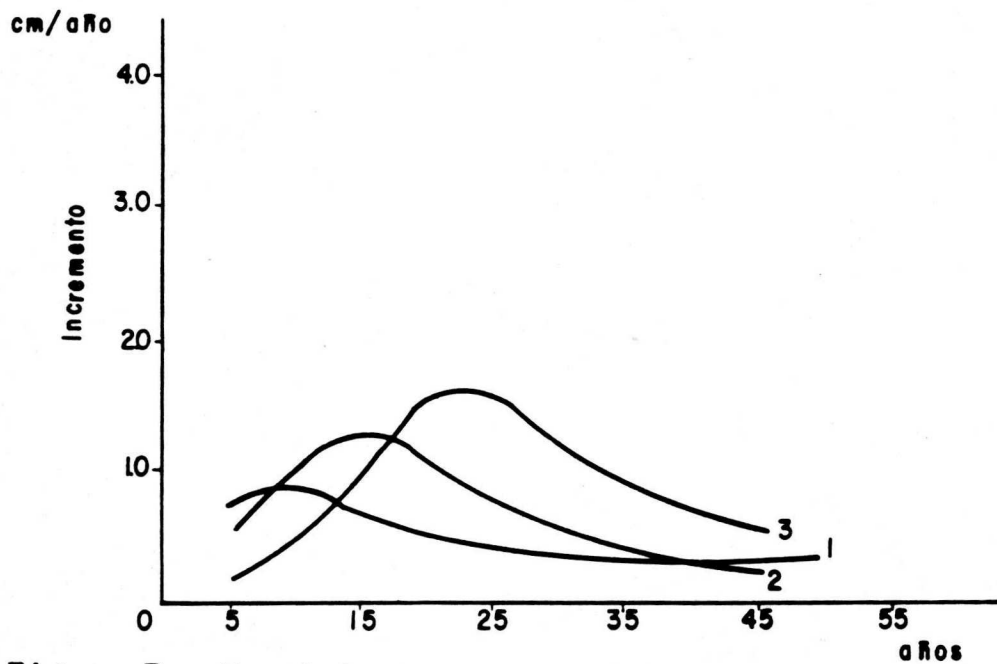
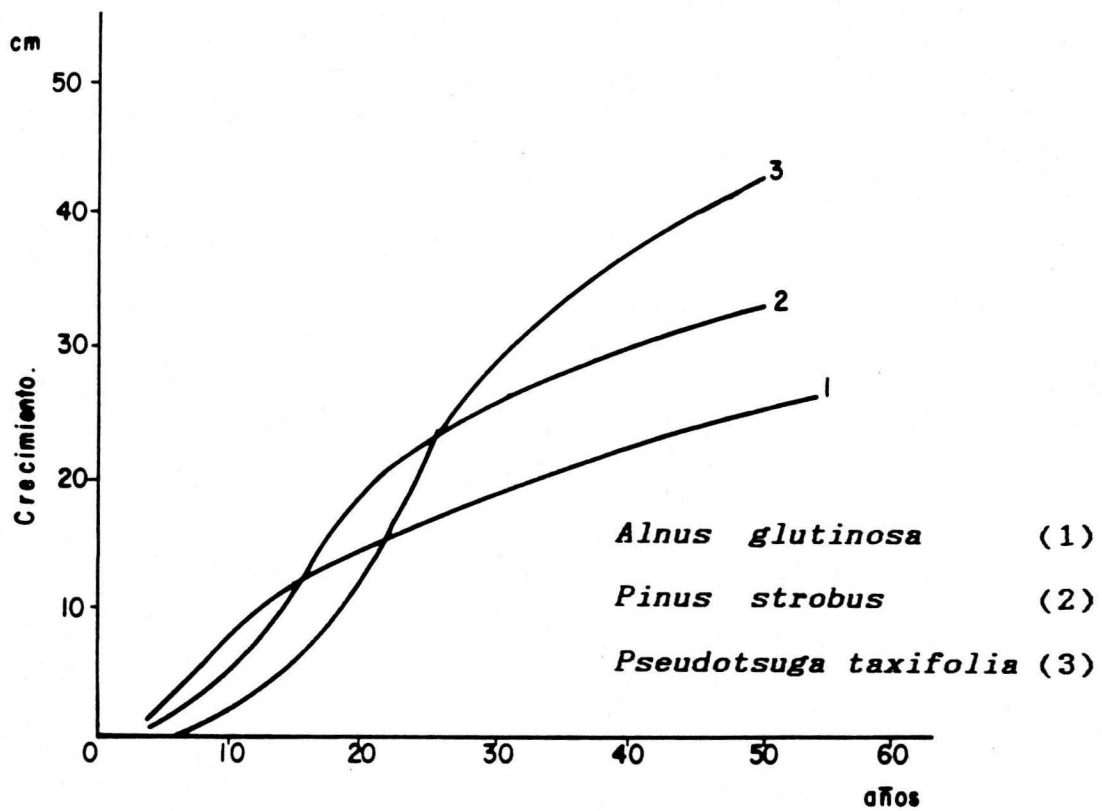


Figura 7. Crecimiento e incremento en diámetro de tres especies forestales [Adaptado de Klepac, 1983].

Por medio del incremento en diámetro se puede calcular el incremento del área basal. La característica de este incremento recae en el hecho de que es más consistente que el incremento en diámetro. Por ejemplo, si el incremento en diámetro del fuste permanece en el mismo nivel, el área basal, no obstante aumenta.

2.2.1.3 Crecimiento e incremento del árbol en volumen.

El incremento total en volumen del árbol consiste en general de tres partes: la primera se refiere a la madera propiamente dicho; la segunda al follaje (agujas), frutos y sistema radicular; y la tercera a la parte que se pierde a causa de la transpiración.

El volumen del árbol aumenta con la altura y el diámetro desde el nacimiento hasta su muerte. La curva de crecimiento es también sigmoide, pero el punto de inflexión en esta curva ocurre aun más tarde que en las curvas del incremento en altura y diámetro, lo que tiene una repercusión en la culminación del incremento en volumen. Bajo condiciones diferentes el incremento en volumen siempre culmina después del incremento en altura, diámetro y área basal. Es característica del incremento en volumen no decrecer tan rápidamente como el incremento en altura y diámetro, ya que persiste durante más tiempo en el mismo nivel (Figura 8).

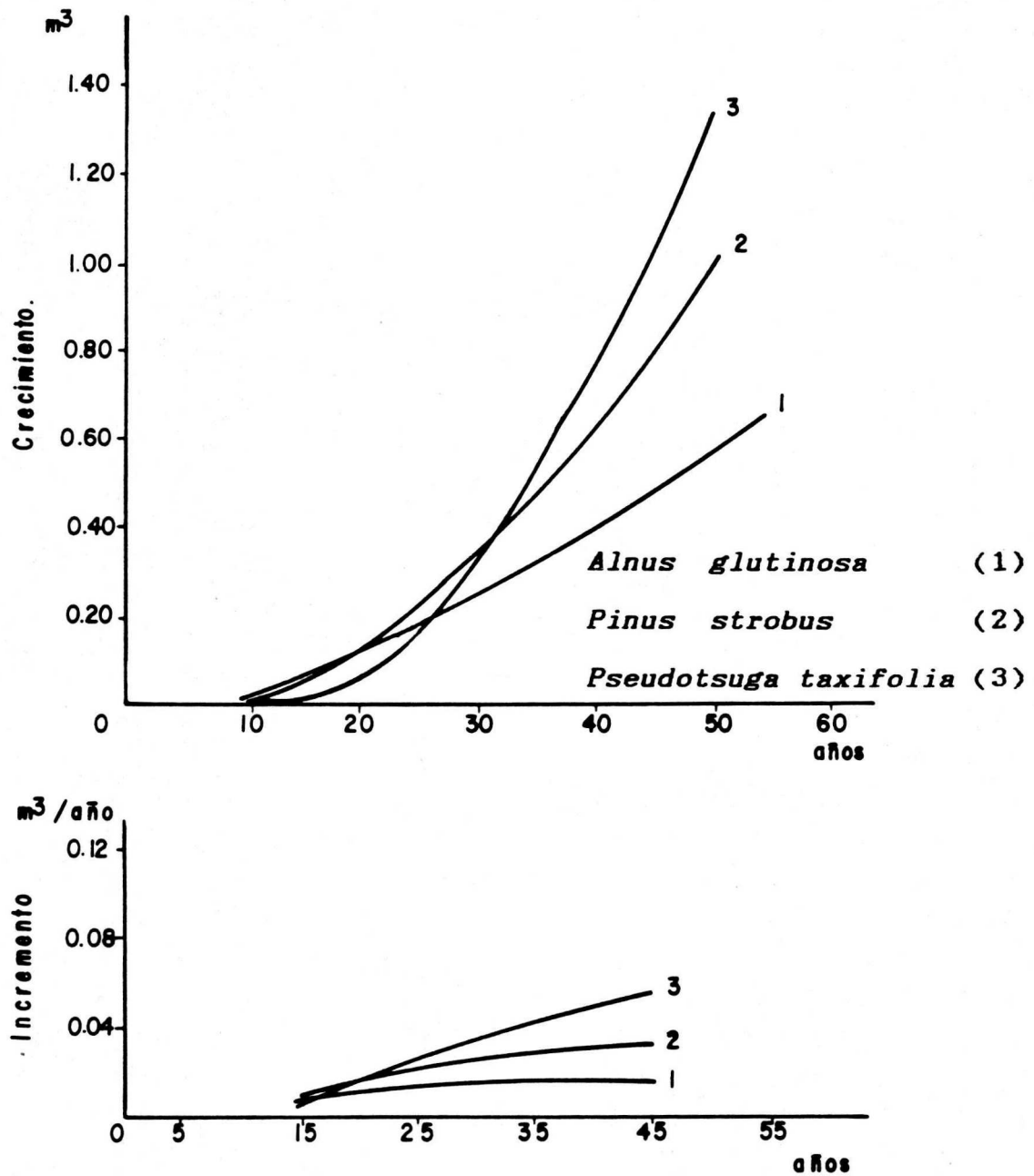


Figura 8. Crecimiento e incremento en volumen de tres especies forestales [Adaptado de Klepac, 1983].

Esta característica del incremento en volumen se explica por el hecho de que el incremento en diámetro interviene al cuadrado en el incremento en volumen; de tal manera que al disminuir el incremento en diámetro no necesariamente disminuye el incremento en volumen. Recuérdese que si el incremento en diámetro del fuste permanece en el mismo nivel, el área basal, no obstante aumenta. Con la edad, el incremento anual en diámetro del árbol disminuye gradualmente, los anillos de crecimiento tienden a ser más estrechos, pero el correspondiente incremento en volumen permanece más tiempo al mismo nivel y cuando los anillos de crecimiento se hacen considerablemente más estrechos comienza la disminución.

De una manera general se puede establecer que debido a lo lento del desarrollo del árbol en su juventud, la culminación de su incremento es tardía, de tal manera que sólo se producen pequeños incrementos en esta culminación, pero una vez alcanzado el desarrollo máximo éste permanece por un período mayor al mismo nivel. Parece ser que el incremento total final es mayor a medida que es menor el desarrollo del árbol en su juventud. Este fenómeno es más notable en Quercus sp., por lo que la gente dice que el encino, vive y muere cada cien años.

Se debe tomar en cuenta no sólo el incremento en volumen del árbol, sino también su valor. En este caso hablamos de la calidad del incremento, el cual es fundamental para el manejo forestal.

Es de gran importancia, saber en que clase de fustes se acumula el incremento en volumen; el valor de 0.1 m³ de incremento anual en volumen en dos Quercus diferentes en calidad puede variar hasta diez veces y aún más, dependiendo de la calidad de esos árboles. Por lo tanto, la silvicultura tiende a elevar el valor de los árboles tanto como sea posible por medio de las diversas prácticas culturales. Pero además de las técnicas silvícolas y los factores ecológicos necesarios para lograr esta meta, son muy importantes también los caracteres genéticos dentro de una misma especie, por lo que se deben seleccionar aquellos árboles que muestren un incremento de buena calidad y, aún más, tender al mejoramiento haciendo cruza genéticas para obtener individuos más valiosos.

2.2.2 Crecimiento e incremento de las masas forestales..

Una masa no es la suma simple de árboles, es una biocenosis formada por numerosos individuos comprendidos en un todo, en el cual rigen multitud de interrelaciones. Los individuos en una masa presentan diferentes ritmos de crecimiento; muchos son eliminados a través de la selección natural o artificial, teniendo como consecuencia que el desarrollo e incremento de una masa es diferente al desarrollo e incremento de un árbol.

Se debe hacer una diferencia en el análisis del crecimiento e incremento entre bosques coetáneos y de selección (para algunos autores son bosques regulares e irregulares, respectivamente); ya

que tienen diferencias tanto en su constitución como en su desarrollo e incremento. Una masa coetánea pasa durante su desarrollo a través de varias fases: de la etapa de brinzal a latizal hasta constituir una masa madura, la cual en determinada época es removida por una corta total o una corta de regeneración. Durante la etapa de desarrollo de una masa coetánea sólo una porción de la masa se incrementa, mientras que otras porciones acumulan el aumento de la masa para utilizarlo a la edad de madurez. En un monte de selección la situación es diferente, ya que su constitución permanece más o menos invariable; en él regularmente se aprovecha todo el incremento pero el volumen en pie permanece constante.

La fase inicial del desarrollo de una masa pura está compuesta por un gran número de individuos; entre ellos se presenta una gran competencia porque no hay suficiente espacio para que todos puedan desarrollarse vigorosos y bien formados. Desde temprana edad los más vigorosos toman la delantera, sobresalen de su ambiente, dominan a los árboles cercanos a ellos, por lo tanto, encuentran espacio para su posterior desarrollo. Al mismo tiempo los individuos oprimidos retrasan su crecimiento y gradualmente mueren. De esta manera los árboles en la masa se agrupan estratificándose del nivel de los dominantes al grupo de los oprimidos, los cuales se muestran en proceso de desaparecer. El grupo de los árboles dominantes recibe luz directa y es llamado por algunos autores masa principal, oponiéndose a la capa de los suprimidos que reciben el nombre de

masa secundaria. De aquí los términos de: rendimiento principal y rendimientos intermedios; el primero proviene de árboles maduros, el segundo se refiere a los árboles aprovechados gradualmente en la masa.

El aclareo continuo de árboles en la masa siempre se lleva a cabo a expensas de los árboles débiles. Esta es la razón del porqué la altura media y el diámetro normal medio de la masa incrementan más rápidamente que en aquellos árboles considerados individualmente. Por lo tanto, el desarrollo e incremento de la masa difiere del incremento de los árboles individuales.

2.2.2.1 Crecimiento e incremento en altura de masas puras coetáneas.

La altura media de los árboles no muestra el mismo patrón de desarrollo que la altura de los árboles individuales dentro de la masa. Hay dos factores que afectan la altura de la masa: el incremento en altura de los árboles y la continua eliminación de los individuos dominados. Por lo tanto, la culminación de la altura media de la masa ocurre siempre después, en comparación con la culminación del incremento en altura de los árboles individuales. Pero el patrón que rige el desarrollo de la altura media de la masa es análoga al que influye en el desarrollo de los árboles individuales. El incremento anual en altura es al principio pequeño, después aumenta; alcanza su culminación,

disminuye y finalmente cesa. Por lo tanto, el curso de desarrollo de la altura media de la masa muestra una curva en forma sigmoide, si la altura media se considera en función de la edad de la masa.

La altura media de una masa es un factor muy importante, ya que es la base para determinar su producción. Con relación a esto se menciona la ley de Eichorn, de acuerdo a la cual la producción total de una masa coetánea está en función de su altura media. Lo que significa que la producción total de una masa coetánea puede determinarse con base en su altura media, aún cuando su edad sea desconocida. Se ha comprobado que existe correlación entre la producción total y la altura media en zonas climáticas semejantes, lo que significa que en diferentes regiones climáticas se obtendrán diferentes rendimientos para la misma altura media de la masa.

2.2.2.2 Crecimiento e incremento en diámetro de masas puras coetáneas.

Cuando se examina el curso del desarrollo del diámetro de una masa se notan diferencias entre los árboles individuales aún cuando todos ellos sean de la misma edad. Mientras más vieja sea la masa mayores son las diferencias.

Del crecimiento e incremento en diámetro se puede obtener fácilmente el crecimiento e incremento del área basal. El

desarrollo del área basal de la masa en función de la edad presenta también una curva sigmoide, variando de acuerdo con la especie.

El efecto de un pequeño incremento de árboles más chicos en el número de árboles presentes ocasiona una considerable reducción en el diámetro promedio del rodal. El diámetro promedio del rodal ó diámetro cuadrático medio se define como el diámetro que corresponde al área basal promedio. No es el diámetro promedio de los árboles presentes, puesto que el diámetro es una función lineal y el área basal es una función cuadrática del diámetro (Daniel, Helms y Baker, 1982).

2.2.2.3 Crecimiento e incremento en volumen de masas puras coetáneas.

El volumen de una masa en su juventud es muy pequeño; incrementa lentamente y a una edad determinada incrementa con rapidez. Después este incremento en volumen de la masa disminuye y no cesa hasta que ésta comienza a declinar. Se puede seguir el desarrollo de una masa desde su establecimiento hasta su corta de dos maneras: tomando en cuenta el volumen total de la madera producida, o considerando el desarrollo de la masa en pie. Las curvas de incremento en volumen son del tipo sigmoide y representan la productividad de la masa.

Finalmente, se señala que el crecimiento e incremento en las masas mezcladas coetáneas rigen leyes análogas a las de masas puras coetáneas, con la diferencia de que en las masas mezcladas se manifiestan además, varias características de las especies en lo que se refiere al ritmo y tamaño del incremento.

2.2.3 Incremento de bosques de selección.

La normalidad de un bosque de selección no recae en una serie de masas coetáneas, sino en una serie de árboles de varias edades, en donde cada árbol va a alcanzar las dimensiones de su madurez, y en varias series suplementarias de árboles, que van reemplazando a los árboles cortados de los diferentes diámetros. El arreglo de las frecuencias diamétricas en una gráfica toma la forma de la llamada curva de Liocourt (Figura 9). La constitución de un bosque de selección permanece más o menos sin cambiar; por eso se dice que la masa de selección es siempre más o menos la misma. Los árboles pasan de una categoría diamétrica a otra; se deben cortar los árboles que representan la diferencia entre el número de árboles de categorías diamétricas sucesivas, más los árboles de la categoría diamétrica más grande.

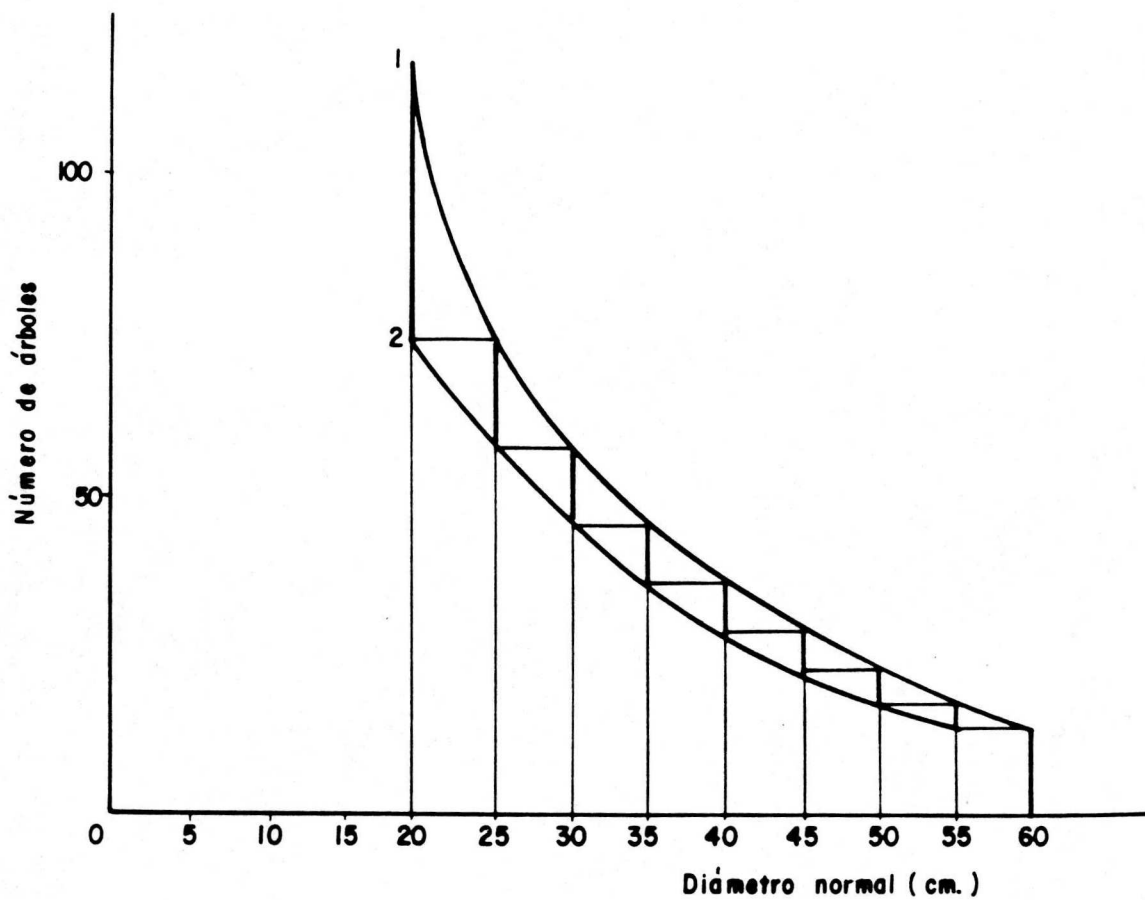


Figura 9. Distribución del número de árboles por categorías diamétricas en un bosque de selección (Curva de Liocourt) [Klepac, 1983].

2.2.3.1 Incremento en diámetro en bosques de selección.

Un bosque de selección consta de árboles con diámetros diferentes. Por lo tanto, cuando se habla del incremento en diámetro de una masa de selección se refiere al incremento en diámetro de los árboles tipo de las diversas categorías diamétricas. Las especies tolerantes muestran una tendencia a sostener durante más tiempo un buen incremento en diámetro. Los árboles tipo de las categorías más grandes muestran un buen ritmo de incremento, aún cuando la culminación del incremento en diámetro haya ocurrido ya en cada árbol individualmente.

Como en la selección natural o artificial siempre se deben cortar los individuos más débiles dejando que los mejores y más vigorosos permanezcan en pie, el incremento en diámetro de los árboles tipo en las categorías diamétricas se mantienen en aumento por largo tiempo.

2.2.3.2 Incremento en altura en bosques de selección.

Si un bosque de selección tiene una estructura normal y está balanceado, la curva de la altura-diámetro no cambia mucho en el curso del tiempo. La curva de la altura-diámetro en un bosque de selección usualmente no se traza en función de la edad, sino en función del diámetro normal.

Una curva de altura frecuentemente muestra un punto de inflexión y puede expresarse matemáticamente por una función tangente hiperbólica, en contraste con la curva de alturas de una masa coetánea, la cual corresponde a una parábola de segundo grado.

2.2.3.3 Incremento en volumen en bosques de selección.

Considerando que el volumen del árbol tipo crece en función del diámetro normal, se verá que a este respecto existe en el bosque de selección una regularidad definida, la cual fué establecida en 1901 por Algan H. en Francia.

Esta regularidad consiste en que el árbol tiene dos veces su volumen total cuando su diámetro normal en centímetros aumenta de 20 a 25, de 30 a 40, de 45 a 60 y de 65 a 90; tres veces cuando aumenta de 60 a 100; cinco veces cuando aumenta de 35 a 70; y diez veces cuando aumenta de 20 a 50, de 25 a 65 y de 30 a 80.

2.3 Metodología para la construcción y uso de modelos

La actividad del modelado es un proceso que involucra un número de etapas claramente identificables (Edwards y Hamson, 1992). Sin embargo, el proceso de investigación biológica es tan difícil de abstraer en un modelo de componentes, fases y elaboración perfectamente definidos, que cualquier secuencia debe tomarse como una visión simplificada y discreta de un proceso que es en realidad complejo y sin una separación tajante entre sus fases (Mendoza, 1983).

Los fenómenos como el crecimiento, la regeneración y la mortandad son procesos complejos, debido a su dinámica y a la multiplicidad de factores y variables que interactúan en ellos. El problema de la complejidad aumenta por las exigencias del método científico en cuanto a la colección de evidencias que afirmen o nieguen la existencia de un determinado patrón atribuible al proceso. Para aportar este tipo de evidencias, la investigación se enfrenta a la necesidad de recurrir a la toma y análisis de información en una escala masiva. Por los formatos usados en la presentación y análisis de información, el pasar de los datos numéricos a las conclusiones definitivas, y de allí a las evidencias demostrativas de las teorías biológicas es un paso complejo y difícil. No parece haber un camino simple y claro para determinar el comportamiento dinámico de cada variable que afecta a los fenómenos biológicos, al margen de la influencia del conjunto de las variables restantes (Mendoza, 1983).

Entre las actividades que deben considerarse en el proceso de construcción y uso de modelos están la definición del problema, la construcción propia del modelo que necesariamente incluye la toma de datos y el análisis preliminar de los mismos, la verificación, calibración, validación, control y evaluación, y la utilización del modelo. Diversos autores como Maki y Thompson (1973), Draper y Smith (1980), Mendoza (1983) y Edwards y Hamson (1992) propusieron algoritmos para la elaboración de modelos matemáticos los cuales son desde versiones generales hasta procedimientos más detallados (Figura 10).

Los criterios de Edwards y Hamson (1992), Maki y Thompson (1973), Mendoza (1983) y de Ramírez (1994) principalmente, se reunieron para establecer la siguiente metodología para la construcción y uso de modelos:

1. Definición del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Validación del modelo.
4. Utilización del modelo.

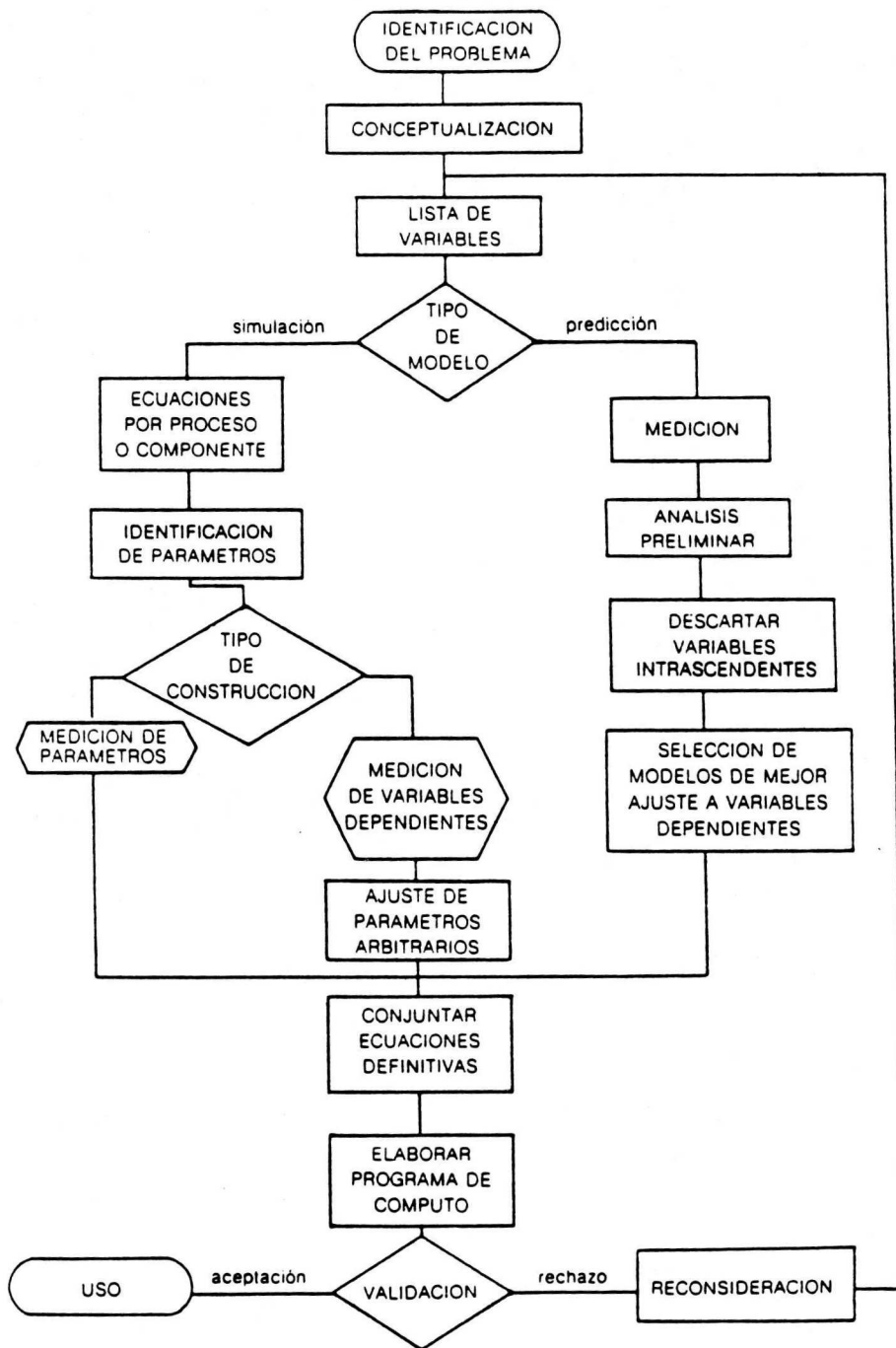


Figura 10. Alternativas generales para la elaboración de modelos matemáticos [Mendoza, 1983].

A continuación se detallan los aspectos más importantes de cada fase.

2.3.1 Definición del problema.

En esta fase se deben dar respuesta a las siguientes interrogantes (Edwards y Hamson, 1992):

- a). ¿Qué se quiere conocer?
- b). ¿Cuál es el propósito y objetivo?
- c). ¿Cómo será la respuesta?
- d). ¿Cuáles son las fuentes de los factores y datos, y si son creíbles?
- e). ¿Hay una sola respuesta?
- f). ¿El problema es determinístico o probabilístico?

El problema original casi siempre surge en el mundo real, en algunas ocasiones en las condiciones relativamente controladas de un laboratorio y algunas veces en el mucho menos conocido medio de vida diario. Las diversas conjeturas, producto de las observaciones del mundo real por parte del investigador pueden estar basadas completamente sobre la intuición, pero más

frecuentemente son el resultado de estudios detallados y el reconocimiento de algunas similitudes con otras situaciones que son mejor comprendidas. Mucho de este trabajo inicial debe ser hecho por un investigador quien esta familiarizado con el origen del problema y la base biológica o todo lo que esté involucrado. Después del estudio inicial es necesario hacer del problema algo tan preciso como sea posible. Esto significa llegar a un conocimiento claro y definitivo de las palabras y conceptos para ser usados. Este proceso típicamente involucra hacer ciertas idealizaciones y aproximaciones (Maki y Thompson, 1973).

Cuando se estudia un proceso biológico particular uno tiene primero que decidir que factores del medio son relacionados a las características de tal proceso. Esta interrogante puede, en un número de casos, ser decidido estrictamente sobre la base de información disponible sobre los mecanismos biológicos dentro de cada uno de los procesos constitutivos como son la naturaleza matemática de la relación y análisis matemático necesario para cumplir el objetivo práctico. En muchos casos, existen procesos parciales que inciden en el proceso biológico total que son desconocidos (Ban, 1988).

Mendoza (1983) señala que por principio debe establecerse el propósito de estudio, que generalmente y según Ramírez (1994) es la administración del bosque, y de éste derivar la conceptualización del problema o proceso que se investiga. Esta conceptualización representa un primer modelo, en el cual se

utilizan frases como elementos del modelo. A esto se le denomina conceptualización verbal.

Posterior a la descripción verbal que se haga del objeto de estudio deben definirse los atributos, variables y parámetros que son significativos para el caso en estudio.

A la definición de atributos, variables o parámetros se le denota como léxico (Dale, 1970; citado por Mendoza, 1983). La gran importancia concedida a esta selección de parámetros puede atribuirse a la repercusión que tendrá en las cualidades del modelo, particularmente con su generalidad, precisión, realismo y complejidad.

La elección de variables puede parecer tan obvia que no necesitaría mencionarse, pero es tan fundamental, que de la elección apropiada de las variables de estudio dependerá no solamente la naturaleza de los resultados, sino también su precisión y validez. El nivel sobre el cual se realicen las observaciones proporcionará mayor información en ese nivel, pero su extrapolación a otro nivel de complejidad puede ser, sino imposible, difícil. Tal es el caso de la medición del crecimiento a nivel individual o a nivel poblacional o comunitario. En el primer caso es posible descubrir las relaciones funcionales que gobiernan el desarrollo de cada individuo, si bien la extrapolación a lo que ocurre una vez integrados todos los comportamientos individuales al nivel poblacional no sea sencilla

ni objetiva; en el segundo caso, aunque se puede tener una idea general de la productividad global del sistema, no es posible definir de manera precisa y clara las relaciones que gobiernan esta productividad (Franco, 1983).

La longitud de la lista de variables es la primera decisión, y permite separar dos grandes tendencias en el modelado. La primera, que es llamada táctica porque define como necesaria la selección de un grupo en extremo limitado de variables, las que deben ser cuidadosamente escogidas por su eficiencia para explicar el comportamiento del fenómeno en estudio. El resto de variables que los antecedentes y el modelo conceptual consideran como influyentes en el fenómeno se dejan como exógenas o bien como elementos constantes en un diseño de medición como también ocurre en uno experimental. Con esta orientación, los modelos tácticos están en capacidad de abstraer de los procesos estudiados unos pocos elementos comunes y detectar los patrones generales de comportamiento que es el propósito básico de este tipo de modelos. En cambio, en los modelos que se han denotado como estratégicos, las listas de variables son poco menos que exhaustivas, previendo que en el análisis de la información se segreguen los parámetros que demuestren mayor capacidad predictiva, explicativa o de asociación.

Un aspecto importante de esta etapa es el intento para identificar y seleccionar adecuadamente a aquellos conceptos a ser considerados como base en el estudio. El propósito aquí es

eliminar información innecesaria y simplificar aquellas retenidas tanto como sea posible.

Gran parte de la calidad del modelo queda definida por la eficiencia con que el investigador realice una abstracción reteniendo únicamente aquellas cualidades que se consideren trascendentales al estudio. La selección de cualidades depende de los antecedentes del fenómeno en estudio según los objetivos y los propósitos. En el caso del fenómeno del crecimiento forestal, puede hablarse, por ejemplo, de que en masas coetáneas es posible abstraerlo en tres cualidades: número de árboles, área basal y edad.

2.3.2 Construcción del modelo.

En esta fase se contempla efectuar lo siguiente (Edwards y Hamson, 1992):

- i). Formular el modelo matemático, con la ayuda de las actividades siguientes:
 - a). Primero mirar el modelo más simple.
 - b). Dibujar diagramas apropiados.
 - c). Identificar y listar los factores relevantes.

- d). Colectar datos y examinarlos sobre la conducta de las variables.
- e). Colectar más datos si es necesario.
- f). Denotar a cada variable con un símbolo apropiado asignándole unidades.
- g). Establecer algunos supuestos.
- h). Establecer relaciones y ecuaciones conectando las variables del problema mediante el uso de herramientas matemáticas (proporcionalidad, relaciones lineales y no lineales, relaciones empíricas, ecuaciones diferenciales, matrices, probabilidad, distribuciones estadísticas, etc.)
- ii). Obtener la solución matemática del modelo, mediante el uso de métodos algebraicos y/o numéricos, cálculos y gráficos.
- iii). Interpretar la solución matemática. Esto se puede lograr al examinar los resultados matemáticos y al responder a las dos siguientes interrogantes, ¿los valores de las variables son del signo y tamaño adecuado? y ¿estos valores aumentan o decrecen cuando deben?.

La identificación de los procesos de un sistema involucra un alto grado de creatividad, siendo la expresión de la situación entera en términos simbólicos, una meta a alcanzar. Entonces, el mundo real llega a ser un modelo matemático en el cual las cantidades reales y los procesos son reemplazados por símbolos y operaciones matemáticas. Una identificación inapropiada entre el mundo real y el mundo matemático conduce a resultados inútiles. Se debe enfatizar que la construcción de un modelo matemático no es muy singular; puede haber muchos modelos matemáticos para una misma situación real. En tales circunstancias puede suceder que uno de los modelos puede ser mejor, en cierto sentido, que cualquiera de los otros (Maki y Thompson, 1973).

Para cumplir con las actividades inicialmente planteadas de esta fase, a continuación se describen las subfases principales del proceso de construcción de modelos.

2.3.2.1 Toma de datos.

Un examen de los orígenes de cualquier campo científico, indica que una disciplina comienza con un conjunto de observaciones y experimentos. Es natural entonces, que las primeras etapas en cuantificar un estudio así como en la construcción de un modelo, que es el tema que ahora se ocupa, debería involucrar la colección, presentación y tratamiento de datos. Un tratamiento estadístico de datos puede ser bastante elemental involucrando el listado, clasificación y un poco de

cálculos sencillos, aunque también puede ser complejo (Maki y Thompson, 1973).

De las variables del medio y biológicas se deben seleccionar los factores más significativos para ser incluidas en el análisis. Se debe recalcar que el aumento del número de variables conducen, al mismo tiempo, a dificultades y altos costos de procesamiento de datos. Consecuentemente, debería haber algún criterio para tomar la decisión sobre los factores a considerar (Ban, 1988).

El primer requerimiento es una lista de factores relevantes al objetivo y factores hipotéticamente relacionadas a estos. Las formas numéricas más usuales son: binario, ordinal, descriptivo, discreta y continua.

Por la trascendencia que tiene el proceso de toma de datos en cuanto a las características finales del modelo construido es pertinente considerar algunas de sus cualidades. En primer lugar, debe recordarse que es este proceso el que con mayor frecuencia concentra la parte más significativa del presupuesto de recursos económicos del proyecto de investigación, particularmente en los casos de medición exhaustiva. La importancia económica de la medición, en combinación con la variación natural de los parámetros que se estiman, genera el principal componente del error del modelo matemático. En segundo término debe señalarse que los sistemas de medición frecuentemente recurren a

procedimientos indirectos para cuantificar las variables (por ejemplo el caso del volumen del rodal que es estimado indirectamente, por medio del área basal y la altura media), así como de índices y estimadores para las variables de difícil representación cuantitativa (por ejemplo área basal como estimador de la densidad) (Mendoza, 1983).

Los modelos de cualquier clase, independientemente de su refinamiento y aproximación para representar el sistema real, pueden ser de poco valor si no están apoyados en una base de datos confiables.

Algunas veces se construye un modelo según la hipótesis de que puedan asegurarse ciertos datos, pero la búsqueda posterior puede comprobar que tal información es difícil de obtener. En este caso puede ser necesario reconstruir el modelo para manejar la ausencia de datos. Por consiguiente, la disponibilidad de datos puede también tener un efecto directo sobre la aproximación del modelo.

Se ha recurrido a formas de análisis cada vez más complejas, como lo ilustra Nevarez et al (1986) para subsanar las carencias de sus datos. También se ha recurrido a la teoría ecológica cuantitativa del crecimiento y de poblaciones, como es el caso de Franco y Sarukhan (1979) pero con poco avance, al menos en cuanto a crear herramientas con potencial de aplicación (Islas y Mendoza, 1992).

La información puede obtenerse de medidas repetidas en áreas de muestreo en períodos anuales. En áreas bajo manejo continuo y estable es posible acumular buena información de crecimiento superior a cualquier otra fuente. Para recabar información se requiere tiempo y dinero. La fuente de datos y el costo pueden cambiar el método de estimación empleado (Davis, 1966).

El manejador forestal no debería tener prejuicio acerca de los métodos de estimación del crecimiento; hay un número de ellos de amplia variedad de tipos. Cada una es usada bajo ciertas condiciones y tienen ciertas ventajas y desventajas. Un predictor debería tener un buen conocimiento general de metodologías y uso, o adaptación, si es necesario, y así situar el mejor método a la necesidad particular. Finalmente, esto no sustituye todavía, para cerrar la observación y conocer la conducta del árbol y rodal, la aplicación de un buen juicio y medición (Davis, 1966).

El muestreo es una alternativa de la experimentación en situaciones donde las variables que entran en el modelo no pueden ser controladas por el investigador. En estudios de crecimiento y rendimiento esta condición se aplica principalmente a las variaciones de sitio. Los tipos de bosque pueden controlarse al seleccionar las áreas experimentales o al establecer los tipos de bosques deseados; la densidad de los rodales puede ser controlada por operaciones silviculturales y de aprovechamiento.

Los experimentos son generalmente más eficientes, y por lo tanto menos onerosos que el muestreo, para una determinada exactitud y precisión de la predicción. Sin embargo, se necesitan datos de ambos tipos, si las variaciones de sitio van a incluirse efectivamente en el modelo.

Los efectos reales de las operaciones de aprovechamiento son también muy difíciles de simular experimentalmente y normalmente se determinan por un programa de muestreo, efectuado inmediatamente después del aprovechamiento.

A continuación, se mencionarán algunas fuentes de información que se emplean en investigaciones del crecimiento de árboles y masas forestales.

PARCELAS TEMPORALES

Las parcelas o sitios temporales se usan primordialmente para la estimación de relaciones independientes del tiempo. Sin embargo, esta distinción no es tan clara, ya que existe la posibilidad de determinar relaciones dependientes del tiempo con la información de los anillos de crecimiento, en situaciones donde éstos existan. Donde los anillos anuales estén claramente presentes, pueden realizarse los estudios en parcelas temporales en lugar de parcelas permanentes.

PARCELAS DE MUESTREO PERMANENTES

Muchos forestales consideran los datos obtenidos de parcelas o sitios de muestreo permanentes como la contribución más importante para los modelos de crecimiento y rendimiento. Aunque esto es verdad en muchos casos, los experimentos deben considerarse como una adición necesaria para introducir tratamientos extremos que no se encuentran en el bosque. También la medición de anillos significa una alternativa a las mediciones en parcelas de muestreo permanentes.

No es posible definir el número de parcelas de muestreo permanentes requeridas desde un punto de vista puramente estadístico. La precisión de un modelo, ajustado a datos de parcelas de muestreo permanentes, dependerá de la localización de las parcelas, de la duración de las mediciones posteriores, así como de las covarianzas de las diferentes variables predictoras y coeficientes en el modelo ajustado.

La experiencia sugiere sin embargo, que aproximadamente 100 parcelas que cubran las variaciones de sitio y el desarrollo histórico del rodal pueden ser suficientes en un determinado tipo de bosque o en una plantación, a menos que haya evidencia de diferentes patrones de crecimiento sobre una parte de la zona de estudio.

Las parcelas de muestreo permanentes deben ubicarse en sitios pobres, sitios promedios y sitios buenos. Así también en rodales de baja densidad, de densidad promedio y muy densos.

La frecuencia de las mediciones de las parcelas de muestreo permanentes dependerá de la tasa de crecimiento de los árboles. En las parcelas nuevas es provechoso efectuar la segunda medición después de un lapso de tiempo más corto que el normal, con el fin de utilizar lo más rápidamente posible los datos de crecimiento que suministren.

La época de las mediciones debe tomar en cuenta los efectos estacionales. Si existe una estación de crecimiento definida, las mediciones deben efectuarse después de dicha estación. En cualquier caso, una parcela determinada debe medirse en el mismo mes, cuando las mediciones son anuales, para permitir comparaciones y estimaciones de crecimientos anuales.

Clasificación de los sitios (parcelas) permanentes (Mas, 1969; citado por Adlard, 1983):

1. **SPIB.** Sitios permanentes de muestra para investigación bioecológica.
2. **SPES.** Sitios permanentes de muestra para experimentación silvícola.

3. **SPOF.** Sitios permanentes de muestra para ordenación forestal que incluyen:
 - a). Sitios permanentes de muestra para incremento
 - b). Sitios permanentes de muestra para producción
4. **SPIS.** Sitios permanentes para investigación silvícola
5. **STM.** Sitios temporales de muestreo
6. **IFC.** Inventario forestal continuo

La mayor parte de los datos necesarios para estimar la variación de la producción en el país, provendrá de sitios del Inventario Forestal Continuo IFC y de otras investigaciones ya establecidas en varias unidades forestales. Los diseños de inventarios forestales están orientados principalmente para obtener estimaciones confiables de las masas boscosas en relación a las superficies que ocupan. Sin embargo, mucha de la información obtenida puede ser útil en estudios de crecimiento y rendimiento.

Generalmente es ineficiente, requerir mediciones de parámetros en todas las parcelas del inventario forestal para las predicciones de crecimiento y rendimiento. Es preferible seleccionar un conjunto de parcelas para mediciones más detalladas.

Sin investigaciones en sitios permanentes para tratar de entender el comportamiento del árbol como un individuo o una población que crece bajo condiciones cuantificadas en cuanto a luz, agua y nutrientes dentro de un ecosistema forestal, nunca podremos escapar del empirismo en la actividad forestal.

El iniciar una discusión sobre el modelado del crecimiento forestal puede darnos el marco para ordenar nuestros estudios y evitar inventarios y mediciones ineficientes que constituyan un despilfarro para la investigación silvícola.

A pesar de los estudios extensivos de los procesos fisiológicos y ecológicos de masas forestales y árboles individuales en los últimos 100 años, la mayoría de los procesos de crecimiento que se aplican en la práctica se han quedado en la fase empírica.

La situación nacional del modelado silvícola es altamente satisfactoria en cuanto a los aspectos académicos, pero la posibilidad de materializar estas ventajas académicas en modelos complejos y eficientes ha sido y posiblemente seguirá siendo seriamente restringida por la carencia de datos de parcelas permanentes y parcelas experimentales. Todos los modelos actualmente publicados en México sufren esta limitante (Cano y Nevarez, 1979; Franco y Sarukhan, 1979; Torres, 1984; Mendoza, 1985; Nevarez et al, 1986; citados por Islas y Mendoza, 1992).

Es evidente que en el futuro inmediato la investigación nacional y mundial en materia de modelado silvícola se apoyará en bases de datos más confiables, tomando como base la investigación silvícola empírica. Los rodales de donde provengan los datos deben estar manejados sistemáticamente y la historia del manejo debe estar lo suficientemente documentada para que las inferencias estadísticas sobre los procesos de crecimiento y reproducción de la masa puedan apoyarse en explicaciones biológicas con amplio soporte empírico (Islas y Mendoza, 1992).

2.3.2.2 Análisis preliminar de la información.

En el análisis preliminar de la información, los datos de campo son codificados, ordenados, almacenados, corregidos, complementados, sintetizados y elaborados hasta el punto de tener los valores de las variables que alimentan al modelo en un formato apropiado para su empleo inmediato (Mendoza, 1983).

Las numerosas técnicas existentes para el manejo preliminar de la información son de tal naturaleza que, para problemas teóricamente simples, permiten detectar una solución definitiva, sin que haya necesidad de mayor elaboración sobre el modelo matemático. Entre las técnicas de análisis preliminar de mayor capacidad pueden anotarse algunos paquetes de manejo de información como el SAS que representa opciones de edición relativamente refinadas. Mediante paquetes de programas SAS es posible almacenar la información de campo que es fácilmente

manipulable.

El procesamiento preliminar de la información también suele incluir, en los modelos complejos, la búsqueda inicial de relaciones entre las numerosas variables. Existen dos procedimientos básicos para este propósito, el primero de los cuales sería de tipo estadístico y el segundo en cuanto a resumir la información mediante procedimientos de clasificación.

Después del registro de datos se ejecutan estimaciones del grado de asociación probable entre parejas de variables; esto es generalmente por vía de técnicas de correlación. El detectar correlación entre variables puede tener dos fines, uno en cuanto a evadir la colinearidad y otros problemas de manejo de datos, que se presentarán al construir el modelo, para lo cual se buscará, ya sea eliminar una de las variables correlacionadas o bien, de condensarlas en un índice que abarque el comportamiento de ambas. El otro fin sería en cuanto a dar una idea inicial de la constitución del modelo, lo cual se logra al analizar la influencia de las diversas variables en el comportamiento general del proceso estudiado, esto es, sobre las variables dependientes. De hecho, si se tratara de relaciones del tipo lineal entre las variables, y las variables a explicar fuesen independientes unas de otras, este primer esbozo de modelo puede ser ya el modelo definitivo; pero desde luego tal simplicidad es improbable con fenómenos ecofisiológicos como el crecimiento.

Técnicas de clasificación como serían el análisis de conglomerados, dendrogramas, análisis de componentes principales, y otras, han rebasado su función de mecanismos de agrupación y se han convertido en herramientas para detectar patrones de asociación y de comportamiento de variables. La razón de tal capacidad analítica reside en la posibilidad de utilizar, arbitrariamente, una diversidad de criterios de agrupamiento y clasificación de datos, además de que los datos pueden ser observaciones o mediciones de un sitio, o bien observaciones de una misma variable en sitios que presenten determinada secuencia característica. En este sentido, los procedimientos de clasificación son muy útiles en cuanto a condensar un conjunto amplio de datos en unas pocas variables (por ejemplo en componentes principales) también es posible que se deduzcan patrones de asociación clasificando sitios en base a la característica que el análisis estadístico detecte como fuerte correlación, así como patrones de comportamiento dinámico si los datos, en lugar de clasificarlos en cuanto a su arreglo espacial, se arreglan en cuanto al tiempo.

2.3.2.3 Construcción del modelo.

Una vez contando con una masa de datos semiprocesados y alguna información en cuanto a las posibles relaciones entre las variables, el paso inmediato suele ser el proceso mismo de construcción del modelo. Siguiendo la secuencia del tipo más común de modelo, el estudio integrado, que presenta gran cantidad

de variables involucradas, entonces a partir de la descripción conceptual del proceso en estudio se han de deducir las funciones básicas que el modelo debe simular.

Si existe la posibilidad de describir en detalle las funciones básicas que el modelo debe simular, entonces la descripción conceptual del proceso puede ser la clave para definir el tipo de ecuaciones que han de representar a cada función. En este punto es de gran importancia la destreza que posea el investigador en cuanto a crear funciones matemáticas con determinadas características (curvas cuadráticas, hipérbolas, elipses, etc.), tanto para representar adecuadamente los fenómenos, como para armonizar las diferentes ecuaciones en un conjunto soluble, cómodamente manejable y compatible con la naturaleza de los datos de campo. En un plano más avanzado, tres cualidades adicionales de las ecuaciones de un modelo serían deseables, la elegancia matemática, la belleza estética del modelo y la economía en el uso de elementos que requieren cuantificación en campo. Para lograr estos efectos, el investigador puede recurrir a toda la gama de variantes en la expresión del lenguaje matemático, así sean polinomios, ecuaciones de diferencia, continuas, algoritmos numéricos, redes, ecuaciones sujetas a funciones de probabilidad, etc. (Mendoza, 1983; Alder, 1980).

En cuanto al método detallado por medio del cual se llega a las ecuaciones que componen al modelo matemático, es natural que

existan tantos caminos como en cualquier otra disciplina. Dos procedimientos contrastantes, que son los más usados, pueden ejemplificar el punto. Una opción para el modelado es simplemente el utilizar ecuaciones del tipo que a juicio del investigador tienen un comportamiento que refleja la concepción teórica del fenómeno, tal como sería en el caso de la supervivencia de una población coetánea, que suponiéndose descendente, ha sido modelado en numerosas ocasiones con ecuaciones logísticas negativas que dan el efecto de J invertida, o bien usar tipos de ecuación cuya gráfica asemeje el patrón de distribución gráfica de las observaciones de campo sobre la variable que se modela, tal como ha ocurrido para el crecimiento en altura y la calidad de estación. La posición alternante puede darse si se abandona todo intento de captación subjetiva de los patrones de comportamiento de las variables y se opta por usar programas estadísticos de cómputo que tengan rutinas de búsqueda de los modelos de mejor ajuste, tales como la regresión paso a paso y otras técnicas semejantes (Hann, 1978; citado por Mendoza, 1983).

En el proceso cognoscitivo para la construcción de un modelo se presenta una disyuntiva que refleja tres diferentes actitudes del investigador:

En primer término se puede partir de no hacer más suposiciones que las implicadas en la lista de variables de campo, y por procedimientos analíticos, generalmente de carácter estadístico, deducir la fuerza de asociación entre ellas y de

allí las posibles relaciones y procesos que son los motores de la dinámica del fenómeno en estudio.

Una segunda alternativa incluye el transformar, utilizando las variables seleccionadas, a la descripción verbal del fenómeno en una secuencia ordenada de ecuaciones cuyo comportamiento sea un reflejo de la dinámica supuesta del fenómeno. Después, se identificarán dentro de las ecuaciones, las constantes y otros parámetros que necesariamente deban tener valores numéricos específicos. En base a la descripción verbal, a los antecedentes y otras ideas preliminares sobre el fenómeno, es necesario traducir el significado matemático de estos valores a términos biológicos que han de ser medidos. A cambio del riesgo que implica la intervención verbal a lenguaje matemático, esta forma de construcción de modelos ofrece el atractivo de una medición de campo considerablemente más reducida y barata que la primera opción.

Por último, es posible seguir la secuencia anterior hasta tener el modelo matemático, pero a diferencia, esta nueva opción no requiere medir directamente en campo a sus parámetros. En su lugar la medición se encuentra en la dinámica global del fenómeno. Mediante procedimientos matemáticos iterativos, se manipulan los parámetros básicos del modelo hasta que los resultados de las ecuaciones reproduzcan aceptablemente la dinámica global del fenómeno.

Taha (1986), señala que después de que se construye un modelo matemático puede ser necesario simplificar el modelo de tal manera que sea analíticamente tratable. Algunas de las simplificaciones comunes incluyen:

1. Convertir las variables discretas en continuas. La matemática continua generalmente es más fácil tanto desde el punto de vista analítico como de cómputo.
2. Linealizar funciones no lineales. Las funciones no lineales en un modelo, frecuentemente requieren un método complejo de solución. Las técnicas de cómputo más poderosas están asociadas a modelos en los que todas las funciones son lineales. Además, las técnicas para modelos no lineales están basadas en aproximaciones con modelos lineales.
3. Eliminar algunas de las restricciones. Cuanto mayor es el número de restricciones, menos eficiente es el modelo.

Como un resultado de las tres recomendaciones para el sistema original, uno debe estudiar el efecto de esta simplificación adicional sobre la calidad de la solución obtenida.

El procedimiento de ajuste de un modelo puede ser estadístico, usando por ejemplo regresión lineal, o puede ser subjetivo, trazando líneas a través de los datos registrados en

gráficos. Si se requiere, estas curvas hechas a mano pueden expresarse posteriormente como ecuaciones. Los tipos de curvas dibujadas o de ecuaciones ajustadas pueden basarse en una ley natural de crecimiento, o pueden ser empíricos, en cuyo caso las funciones o ecuaciones de ajuste se escogerán únicamente por su habilidad para representar una forma determinada (Alder, 1980).

Torres, Acosta y Magaña (1992) señalan que las pruebas para indicar la bondad de ajuste si se trata a la curva de crecimiento como una función de distribución, son:

1. Razón de verosimilitud
2. Prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS)
3. Prueba de Cramer-von Mises (CM)
4. Prueba Anderson-Darling (AD)
5. Prueba de ji-cuadrada de Pearson

y otros criterios de bondad que no incorporan niveles de confiabilidad son:

6. Diferencia máxima entre el valor medio observado y el valor medio predicho.

7. Suma de cuadrados de las diferencias

El desarrollo de modelos ha sido más hacia la utilización de métodos y maquinaria de cálculo cada vez más complejos que en un mayor conocimiento de los fenómenos biológicos responsables de estos procesos de crecimiento (Franco, 1983).

Si el propósito es, no solamente predecir de manera precisa la productividad natural de los bosques, sino además, entender claramente cuáles son las relaciones funcionales que gobiernan esta productividad, las investigaciones deberán de conducirse por un camino más rico en información ecofisiológica detallada (Franco, 1983).

2.3.3 Validación del modelo.

En el área del modelado se define verificación como una comprobación del modelo con los mismos datos que fueron utilizados para generar el modelo y validación como una comprobación del modelo con un grupo de datos que no haya sido utilizado para ajustar ninguna de las funciones del modelo (Bruce y Wensel, 1987, citado por Hughell, 1991; Alder, 1980)). La validación es literalmente hablando, el proceso de determinar si un modelo verdaderamente representa, de un modo u otro, la realidad (Alder, 1980).

La validación es la primera prueba para un modelo matemático, la cual consiste en un proceso repetitivo de corrección y ajuste del mismo de manera que cada una de sus ecuaciones demuestre tener las bases teóricas que el modelo se supone, así como el reflejar de modo aceptablemente preciso la dinámica real de la variable que representa. Además, todo el conjunto del modelo debe tener resultados que no defieran de manera importante de los resultados que se obtengan de mediciones de campo independientes y que no hayan sido incluidas en la base de datos que se usó en el ajuste del modelo. Naturalmente, el punto central en la validación y calibración de los modelos matemáticos es determinar la calidad de su construcción en cuanto a que se ajuste a las especificaciones del diseño y en cuanto a que permita la realización de objetivos últimos para los que fue creado (Mendoza, 1983).

En el proceso de validación queda implícita la determinación y cuantificación de las características generales del modelo tales como la precisión, confiabilidad, exactitud, plasticidad y sobre todo generalidad. Esta última característica es la que define si el modelo es válido sólo para su propia base de datos, para todos los lugares similares, sólo en un período de tiempo o indefinidamente (Mendoza, 1983).

Mendoza (1983) identifica en los modelos las siguientes seis cualidades: Generalidad, Complejidad, Realismo, Precisión, Exactitud, Confiabilidad, Validez y Elasticidad

A continuación se detallan las anteriores cualidades ya que estas determinan según Mendoza (1983) el alcance de utilización de los modelos.

1. **Generalidad.** Es la medida en que un determinado modelo puede ser utilizado validamente en el estudio de procesos. El caso del crecimiento, modelado como una curva sigmoide, es un ejemplo de modelo de amplia generalidad, puesto que, usando los valores numéricos apropiados a cada caso, puede representar para una diversidad de fines el desarrollo de casi cualquier masa coetánea.

2. **Complejidad.** Es esta cualidad el resultado del número de variables en el modelo, así como el número y el tipo de ecuaciones. La importancia de esta característica reside en los problemas que la complejidad pueda causar en cuanto a cómputo y a acumulación de errores. Aunque, por otra parte, un modelo complejo puede incluir mayor cantidad de recursos de lenguaje matemático, a la disposición del investigador para aumentar el realismo del modelo.

3. **Realismo.** Se trata de una medida de similitud entre el modelo y el patrón. En general los modelos de simulación, como en el caso del modelo de Mitchell (1975) (Mendoza, 1983), son más realistas que los modelos predictivos, ya que además de reproducir la dinámica general del crecimiento, limitan también los componentes que dan lugar a esta

dinámica como lo es, por ejemplo, el proceso de acumulación de anillos de crecimiento en árboles individuales, dependiente de la fotosíntesis neta, mientras que en otros modelos estos procesos se aglutinan en una sola ecuación de crecimiento de toda la masa del rodal.

4. Precisión, exactitud y confiabilidad. Estos componentes son parte importante de la determinación de la calidad del modelo. Ellos indican el grado de aproximación con que el modelo reproduce los resultados de la realidad, tanto en margen de error como en fidelidad y consistencia entre repeticiones de pruebas. Naturalmente, no existen normas absolutas de calidad en cuanto a resultados o predicciones en modelos, sino que es en función de la naturaleza de los objetivos que se establecen límites holgados o estrictos para la precisión, exactitud y confiabilidad de los datos.

5. Validez. Con este término se designa a la longitud del horizonte de tiempo para el cual un modelo genera resultados válidos. En este sentido, un modelo basado en remediciones de crecimiento de un solo sitio, durante 10 años, no sería válido para predecir la producción de madera a 100 años.

6. Elasticidad. La plasticidad de los modelos representa una estimación de versatilidad en las aplicaciones. Se entiende que si un modelo fue construido para reproducir la dinámica de una especie forestal y bajo unas alteraciones menores, se

le puede usar para otras especies, o si fue creado para predecir reacciones a aclareos, pero se le adapta para detectar patrones evolutivos de la especie, entonces se trata de un modelo plástico.

El resultado final del proceso de validación, además del perfeccionamiento de la estructura del modelo, consiste en una serie de advertencias o supuestos bajo las cuales se puede emplear el modelo.

La validación puede demostrar debilidades en el comportamiento del modelo, lo cual conducirá a mejorar su estructura o a la necesidad de recolectar más datos de campo. Los experimentos con modelos, inclusive aquellos completamente inválidos, pueden conducir a conceptos alternativos de diseños experimentales y de recolección de datos.

Para Alder (1980), la validación de un modelo cumple con cuatro funciones importantes:

1. Probar hipótesis. Determinar si los datos independientes confirman o contradicen las predicciones dadas.
2. Definir el ámbito de sitios y condiciones donde se puede aplicar el modelo con cierta confiabilidad.
3. Calibrar el modelo si es necesario.

4. Incrementar la confianza de los usuarios potenciales del modelo.

Y para cumplir con las funciones anteriores, el proceso de verificación/validación se realiza en tres fases:

1. Evaluar las componentes individuales del modelo, para ver si cada una tiene un comportamiento lógico.
2. Evaluar el comportamiento global del modelo en diferentes situaciones.
3. Realizar una prueba estadística y objetiva con datos independientes, o sea la validación propiamente dicha.

La primera fase se realiza durante el desarrollo de las ecuaciones para la estimación de los parámetros del rodal. La segunda mediante la incorporación de todas las ecuaciones para formar el modelo global y la confección de tablas de rendimiento. Finalmente, la prueba estadística se debe realizar con un grupo de datos independientes de los usados en el desarrollo del modelo.

Si se considera necesario después de la validación, se pueden agrupar los datos utilizados para desarrollar el modelo y los de la validación para recalibrar los coeficientes del modelo y así, se aprovecha una muestra de datos más grande.

La validación del o los modelos, en esencia, es la realización de una prueba estadística con datos independientes, basada en un análisis de los errores residuales, comparando los valores predichos o esperados y los valores observados para cada medición. El análisis de los residuos (valores observados - valores predichos) se puede realizar calculando con el modelo el valor de las variables: número de árboles vivos, diámetro, altura y producción (volumen o biomasa) por medición, y calculando la diferencia entre estos valores calculados y los valores reales observados. Las estadísticas que resumen la evaluación de los residuos son: el número de mediciones analizadas, el promedio de las diferencias absolutas o cuadradas, la desviación estándar de las diferencias, y el coeficiente de variación (cv), con base en el valor medio observado.

El promedio de las diferencias indica si existe un sesgo (una tendencia de subestimar o sobreestimar los valores observados) para los valores calculados con el modelo. Con una muestra representativa el promedio casi siempre es cero o muy cerca a cero por ser de regresiones de mínimos cuadrados con modelos que poseen interceptada.

La desviación estándar representa la dispersión o precisión de las predicciones con respecto al promedio. El coeficiente de variación (cv) representa la misma precisión o dispersión, pero en relación con el promedio de los valores observados; este valor es útil para comparar la precisión respecto al tamaño promedio de

la variable a pronosticar.

Hughell (1991), señala que los coeficientes de variación son del 15% para las variables número de árboles, diámetro y la altura, y más del doble de este para la biomasa o el volumen. Esto debido al efecto aditivo de los errores del número de árboles, altura y diámetro utilizados en el cálculo de la biomasa o el volumen.

La aplicabilidad del modelo es mayor cuando los datos provienen de muchos y a la vez diferentes sitios, aunque esto aumenta la dispersión de los residuos.

Los errores residuales de un modelo generalmente tienden a incrementarse a medida que las variables predictoras se acercan a sus valores extremos. Esto parece especialmente cierto cuando los datos de validación cubren una gama de sitios, edades y condiciones de crecimiento más amplia que la de los datos usados en la construcción del modelo (Alder, 1980).

Sin embargo, habrá que establecer límites a los datos de validación, del mismo modo que fueron establecidos a los datos usados en la construcción del modelo. Es importante, como parte del proceso de validación, examinar el comportamiento del modelo fuera de estos límites y estimar, para cada tipo de variable predictora, un intervalo de valores fuera del cual las predicciones del modelo se vuelven obviamente imprecisas e

inútiles.

Esto es importante porque muchas de las aplicaciones de los modelos de crecimiento y rendimiento pueden tener lugar en situaciones, en las cuales los valores absurdos no se detectan de inmediato. Por ejemplo, como parte de un modelo sectorial de economía forestal o como un componente en un programa para calcular planes de cortas.

En la validación deben tenerse siempre en cuenta los siguientes puntos:

- Los modelos de predicción se aproximarán más a la realidad a medida que se incrementen los esfuerzos en la recolección de datos y en la construcción del propio modelo.
- En algún momento, el esfuerzo involucrado para obtener más datos o para crear un modelo estadísticamente más sólido es más costoso, que la mejora marginal garantizada por las predicciones del modelo.
- Los modelos forestales no tienen un grado uniforme de error sobre el intervalo completo del comportamiento que predicen, pero pueden ser más o menos precisos en diferentes intervalos de las variables predictoras.

El proceso de validación puede ser más costoso y consumir más tiempo, que la construcción del modelo. Puede ser necesario la realización de experimentos especiales para comprobar el modelo, y también la construcción de sistemas de procesamiento de datos que permitan la validación por comparaciones en un gran número de parcelas. A veces se requerirán considerables análisis estadísticos para estimar las covarianzas de los errores residuales.

Para validar un modelo, su comportamiento debe compararse con observaciones de situaciones reales cuya historia y tratamiento sean perfectamente conocidos. Estos datos pueden llamarse datos de validación, y obtenerse de parcelas de muestreo permanentes o temporales o de experimentos. Existen usualmente dos situaciones distintas respecto a los datos de validación:

- Los datos usados para validar el modelo son los mismos que se utilizan para construir las diferentes funciones que forman parte del modelo. Esto puede llamarse autovalidación.
- Los datos usados en la validación del modelo no han sido utilizados para estimar ninguno de los parámetros de las funciones del modelo. Esta situación puede denominarse validación independiente.

La autovalidación es particularmente peligrosa con un número pequeño de observaciones y con modelos muy complejos. Con modelos

simples (quizá sólo una o dos funciones) y con gran cantidad de datos de comparación puede ser muy aceptable.

La validación independiente es un procedimiento mucho más satisfactorio desde cualquier punto de vista. Da una imagen completa de cuan efectivo es el modelo como instrumento de predicción. La principal dificultad de la validación independiente es que se necesita una considerable cantidad de datos, que deben ignorarse cuando se construye el modelo. Probablemente el mejor procedimiento, ampliamente adoptado por los sistemas que modelan comunidades, es el de dividir el conjunto de datos en dos partes iguales por un proceso aleatorio o sistemático y usar la mitad de los datos para la construcción del modelo y la otra mitad para su validación.

Desafortunadamente, hay un cierto traslape entre autovalidación y validación independiente. Es posible construir un modelo usando un tipo de información de un conjunto de datos de parcelas o de experimentos y validarlo usando otro tipo de información, estadísticamente independiente, de las mismas parcelas. Una validación parcialmente independiente de esta naturaleza debe ser considerada menos satisfactoria que una validación totalmente independiente, pero más indicadora de la validez de un modelo que la autovalidación.

Hay una serie de razones por las cuales los modelos pueden comportarse erróneamente cuando se validan:

1. El conjunto de datos originales puede representar un patrón diferente de comportamiento del crecimiento que el conjunto de datos con el cual se prueba.
2. Se han utilizado en la construcción del modelo métodos inapropiados de ajuste de las ecuaciones.
3. Algunas de las funciones ha podido extrapolarse durante la comprobación con lo cual los datos de la validación han entrado en un intervalo donde son imprecisos.
4. Si el modelo abarca un sistema de ecuaciones puede volverse inestable cuando se trata como conjunto, a pesar de que cada una de las funciones en forma aislada puede ajustar los datos adecuadamente.
5. Pueden haber varias clases de errores humanos durante la transcripción o aplicación de las diferentes ecuaciones o gráficos.

2.3.4 Utilización del modelo.

Los modelos son usados para predecir el funcionamiento de un sistema conceptual, es decir, los sistemas que no han sido estructurados; también son empleados para resumir un conjunto de datos. En muchos casos al final de un experimento el investigador tiene un número grande de observaciones. Un método conveniente para resumir estos números es encontrar un miembro de una familia general de distribuciones que puedan representar a los datos (Shapiro y Gross, 1981).

En la medida que el uso de los modelos matemáticos se ha venido generalizando, el conocimiento del potencial técnico de éstos se ha ido difundiendo progresivamente, ocasionando por un lado, una mayor apreciación de las buenas cualidades de los modelos matemáticos, pero de otro lado se han fomentado ciertos abusos y malos entendidos, en lo general derivados de la enorme comodidad de manipulación de los modelos, una vez que han sido programados en computadoras, y también porque la información acerca de los detalles internos de los modelos, ha sido mucho menos difundida que la información e instrucciones de empleo (Mendoza, 1983).

Franco (1983) refuerza lo anterior, al señalar que se detecta que el desarrollo de modelos se ha dado más en la utilización de métodos y maquinaria de cálculo cada vez más complicados que en un mayor conocimiento de los fenómenos

biológicos responsables de por ejemplo los procesos de crecimiento.

Aunque pareciese obvio, es conveniente recalcar que una de las razones que ha dado auge al desarrollo de modelos es que se trata de herramientas que una vez elaboradas, requieren un esfuerzo muy pequeño para darle mantenimiento y para actualizarlo. Esta cualidad implica que, aun cuando la construcción de modelos sea una labor altamente complicada y que requiere especialistas con alta capacidad, los modelos son proyectos únicos, que a la larga son relativamente poco costosos y que pueden ser empleados por personal técnico del área de utilización, con un mínimo de conocimientos sobre modelado matemático (Mendoza, 1983).

Por otra parte, el empleo de los modelos es relativamente simple si se tienen dos condiciones básicas. La primera es la disponibilidad de un instructivo tan claro y completo que cualquier técnico que domine la teoría sobre el proceso de modelado pueda usar correcta y eficientemente el modelo. La segunda condición sería el que los datos base y el empleo de los resultados del modelo sean perfectamente consistentes con los supuestos, limitantes y propósitos bajo los que el modelo fue diseñado (Mendoza, 1983).

Ocasionalmente, los modelos matemáticos que no tienen validez para casos, lugares o períodos de tiempo determinados,

son modificados cambiando la base de datos o volviendo a estimar los parámetros del modelo. En tales situaciones es importante recordar que la alteración de la estructura del modelo implica la necesidad de repetir el proceso de validación.

Algunos aspectos que deben considerarse en la utilización de los modelos son:

1. Los modelos estadísticos, como todos los modelos, son idealizaciones del fenómeno de la vida real y no existen realmente.
2. Usar el modelo que tiene la forma más simple y de más fácil aplicación, es decir, el modelo más parsimonioso.
3. Probar modelos sin parámetros de forma (o con parámetros de forma conocidos) es conceptualmente muy diferente a probar distribuciones con desconocimiento de los parámetros de forma.
4. Hay escenarios donde el error tipo I para una prueba de distribución es frecuentemente razonable usar valores de alfa más grandes que los tradicionales 0.05

Adicional a lo anterior y para seleccionar el mejor modelo, Hernández, Mendoza y Rodríguez (1993) consideran que los siguientes criterios - el primero es más específico de las curvas

de crecimiento y el resto más generales - deben contemplarse:

1. Un comportamiento similar al reportado para las leyes generales de incremento (aumento gradual, un máximo y un descenso paulatino).
2. Bajos cuadrados medios del error.
3. Cumplimiento hasta donde sea posible (sin manejo adicional de datos) de los supuestos de regresión lineal.
4. Significancia de la prueba de F.
5. Sentido lógico en el signo de los parámetros y significancia en la prueba de T.
6. Bajos coeficientes de variación.
7. Coeficiente de determinación alto.

Por otro lado Torres, Acosta y Magaña (1992); señalan las siguientes pruebas de bondad de ajuste:

1. Razón de verosimilitud
2. Prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS)

3. Prueba de Cramer-von Mises (CM)

4. Prueba Anderson-Darling (AD)

5. Prueba de ji-cuadrada de Pearson

Y otros criterios de bondad de ajuste que no incorporan niveles de confiabilidad son:

6. Diferencia máxima entre el valor medio observado y el valor medio predicho

7. Suma de cuadrados de las diferencias

Finalmente, Alder (1980) destaca que los modelos pueden ser aplicados en una de las tres formas siguientes:

1. Como una simple tabla o gráfico.

2. Como un programa para una computadora que pueda producir una tabla o gráfico de crecimiento y rendimiento para un conjunto particular de tratamientos. Esto es apropiado cuando el modelo tiene suficiente flexibilidad inherente y no es posible definir todas las predicciones en un sólo conjunto de tablas.

3. Como un programa de computación en forma de subrutina, contenido en un programa general de planificación forestal y al cual puede incorporarse una base de datos de información de inventario y varias funciones restrictivas de tipo económico o técnico sobre operaciones de explotaciones y tratamientos.

2.4 Conversión de modelos.

Por definición el incremento es el tamaño del parámetro durante un período de tiempo definido y el crecimiento es el incremento acumulado del parámetro desde la edad cero hasta la edad de evaluación; en términos matemáticos, la integral de una ecuación de incremento es la ecuación de crecimiento, y la derivada de la ecuación de crecimiento es la de incremento.

La integración matemática tiene ventajas sobre la simulación, como una manera de usar los modelos de incremento que no requieren de equipo especial de computación. Sin embargo, muchos modelos, aparentemente simples, pueden ser muy difíciles de integrar; este método supone un conocimiento elemental de cálculo diferencial e integral por parte del investigador (Alder, 1980).

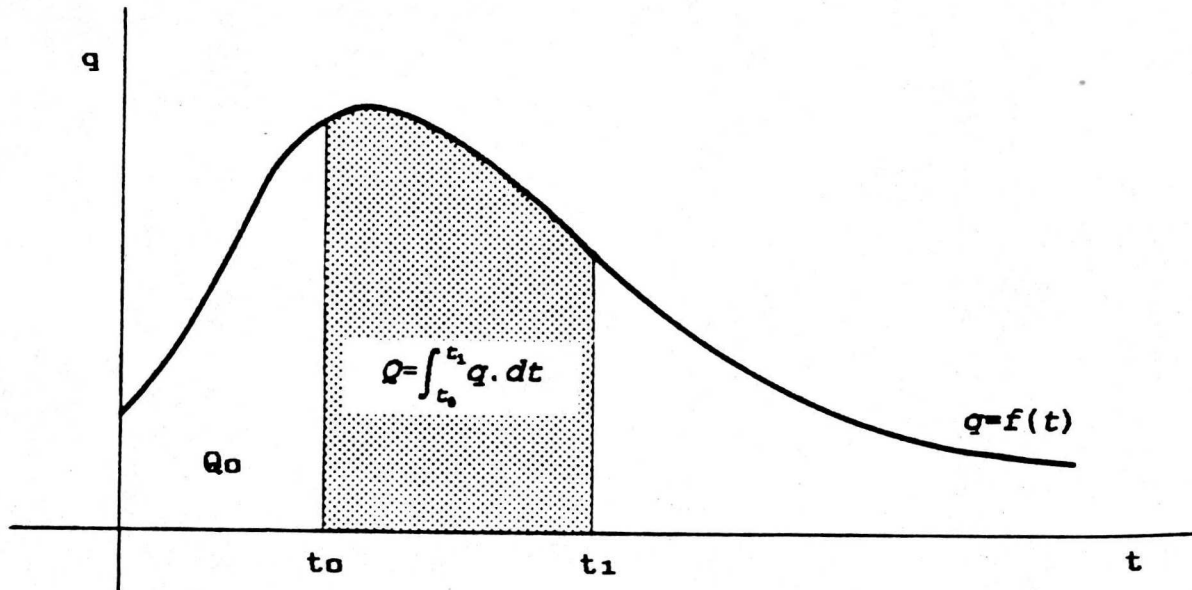
La compatibilidad de incremento y crecimiento es útil porque describe el desarrollo del organismo o grupo de organismos ajustándose a los principios biológicos del mismo; por ejemplo,

que el organismo tiene un tamaño máximo y que existe un tamaño donde el incremento es máximo. Para determinar si una ecuación concuerda con los principios biológicos, es necesario evaluar tanto la ecuación de incremento como la de crecimiento (Hughell, 1991). Las funciones matemáticas de incremento son comúnmente formuladas en términos de tasas de crecimiento, es decir, una consideración del comportamiento de la tasa de crecimiento en el tiempo. Alternativamente, éste también a menudo se formula en términos de tasa relativa de crecimiento, es decir, una consideración entre el tamaño y la tasa de crecimiento (Pienaar, 1965; citado por Acosta, 1991).

Los antecedentes sobre la conversión de modelos según Avery y Burkhart (1983), se registra con Buckman en 1962 y Clutter en 1963, quienes fueron los primeros investigadores en los Estados Unidos de América en reconocer las relaciones matemáticas entre el incremento y crecimiento en sus análisis. Clutter derivó la compatibilidad de los modelos de incremento de pino loblolly asegurando que la forma algebraica de el modelo de crecimiento podría ser obtenido por integración matemática del modelo de incremento.

A continuación se describe la teoría básica de Alder (1980) sobre la conversión de modelos de incremento a modelos de crecimiento por integración.

Si se tiene una función de incremento del tipo mostrado a continuación:



Donde:

q : tasa de crecimiento (área basal, diámetro o volumen)

t : tiempo

La ecuación de la tasa de crecimiento puede ser representada en forma general por:

$$q = f(t) \quad (1)$$

A la vez, el área bajo esta curva de incremento es el crecimiento total acumulado. Así, el crecimiento acumulado hasta el tiempo " t ", está dado por:

$$Q = Q_0 + \int_{t_0}^{t_1} q dt \quad (2)$$

donde Q_0 es el crecimiento acumulado al principio del período t_0 .

Para un rodal no aclareado, la curva área basal/edad representa la función integral equivalente a la ecuación (2) con $Q_0=0$ y $t_0=0$. Por lo tanto, cualquier función ajustada a los datos de rodales no aclareados suministra una forma ya integrada de modelo de incremento. Consecuentemente, si se ajustan datos de un experimento de espaciamiento con una función de crecimiento dependiente de la densidad del rodal, esta función puede usarse para predecir con cierta precisión el incremento de rodales aclareados. Esto es una generalización de la hipótesis de Marsh a cualquier tipo de función de incremento utilizando cualquier variable.

Por otro lado, los modelos de simulación constituyen un método de usar un modelo de incremento de una manera mucho más sencilla que la integración matemática, pero normalmente se requiere de acceso a un pequeño computador. Para usar un modelo de incremento por simulación, deben definirse los puntos siguientes, a partir de los datos de parcelas de muestreo permanentes o de experimentos:

1. La función altura/edad/índice de sitio.
2. La función de incremento del área basal, en términos de altura o área basal y/o edad e índice de sitio y número de árboles/ha.
3. La relación entre la masa removida y el área basal

removida para cada tipo de aclareo.

4. La función del volumen en términos de altura y área basal.

5. El área basal inicial del rodal a una cierta edad o altura de referencia, en la cual comienza la simulación, en función de la masa plantada.

Estas funciones no necesitan ser relaciones matemáticas continuas. Cada función puede ser un conjunto de ecuaciones, de las cuales se selecciona una por un proceso condicional, o pueden ser un conjunto de valores tabulados.

Los modelos de simulación se construyen codificando las relaciones funcionales, y las interconexiones lógicas entre ellas, como instrucciones en un lenguaje de computación, usualmente FORTRAN, BASIC, ALGOL y ahora Lenguaje C. Este modelo de lenguaje fuente es compilado por el computador en un código propio interno de máquina y se corre o procesa en el computador. Así como se procesa, requerirá datos que definan:

1. El índice de sitio y el espaciamiento inicial del rodal,

2. La frecuencia e intensidad de los aclareos.

2.5 Tipos de modelos.

Los modelos pueden clasificarse de varias formas; pueden caracterizarse por ejemplo, por su función, tema, propósito, dimensionalidad o grado de abstracción. Una forma conveniente de clasificación es por su tipo: icónico, analógico y simbólico (Dykstra, 1984).

2.5.1. Modelos icónicos. Son representaciones físicas de objetos o situaciones. Ejemplos:

a). Modelos bidimensionales: Fotografías, mapas, planos de proyectos y pinturas.

b). Modelos tridimensionales. Mapas en relieve, fotografías aéreas vistas en estereoscopio, modelos de aeroplanos, muñecas, globos que representan la tierra y esculturas diversas.

Cuando el objeto o situación de interés excede de tres dimensiones no es posible construir un modelo físico y se puede tratar entonces con modelos analógicos o simbólicos.

2.5.2 Modelos analógicos. Son análogos al objeto o situación real pero no parecidos físicamente. Ejemplos: Diagramas de flujo, tablas de organización y gráficos.

2.5.3. Modelos simbólicos. Comienzan con la abstracción y son considerados por medio del uso de símbolos. Ejemplos: Fórmulas químicas, ecuaciones matemáticas y notas musicales. En la ciencia del manejo forestal los modelos matemáticos son los más usuales; estos son simbólicos que pueden ser descritos como un conjunto de enunciados matemáticos que colectivamente describen los trabajos o procesos de una organización o sistema.

Las expresiones matemáticas que comprenden un modelo particular puede ser en forma lineal o no lineal, y pueden definirse sobre valores continuos o únicamente sobre ciertos valores enteros. Los valores en un modelo matemático pueden ser asumidos para conocerse con certeza en cuyo caso el modelo es determinístico o los valores pueden ser asumidos en un rango de variación en cuyo caso el modelo es probabilístico (también llamado estocástico) (Dysktra, 1984).

2.6 Clasificación de modelos matemáticos.

La principal dificultad en los intentos que se han realizado para clasificar a los modelos ha sido la enorme versatilidad de la técnica de modelado, tanto en elementos matemáticos de construcción como en estructura interna, complejidad, realismo y características de uso de los modelos.

2.6.1 Clasificación en base a objetivos.

Quizá el criterio de clasificación más ilustrativo sea uno basado en los propósitos para los cuales se construye un modelo matemático, dando con ello a entender que es completamente a juicio del investigador el uso de tal o cual fuente de datos, tipo de ecuaciones, relaciones entre ecuaciones, validación y demás operaciones que implica la elaboración del modelo, en tanto se satisfagan los objetivos básicos del modelo. En tal sentido las categorías de modelos según Mendoza (1983) serían:

2.6.1.1 Compiladores. La función básica de los modelos compiladores es de permitir el manejo rápido y confiable de cantidades masivas de información de campo. También se presentan para condensar la información, reduciéndola tanto en número de datos como de variables, a un mínimo adecuado para un análisis directo, o para alimentar modelos de estructuras simples.

2.6.1.2 Tácticos. Se pretende con estos modelos ilustrar conceptos teóricos en una forma elegante, clara y condensada, características todas ellas del lenguaje matemático. Esta versión de los modelos ha sido de enorme éxito para explicar fenómenos y procesos que, debido a su carácter dinámico, son complejos cuando se manejan verbalmente. Este proceso representa un artificio que facilita enormemente el procesamiento de la información, tal como lo ejemplifica el manejo matemático del concepto de turno.

2.6.1.3 Estratégicos. Debido a que los modelos tácticos por su sencillez y elegancia, son en extremo dependientes de que el investigador tenga una noción perfectamente clara del proceso que modela, resulta poco productivo su uso en proyectos que tratan temas multivariados de tipo dinámico. Para estos casos se ha desarrollado otro tipo de modelos en los que, para extraer conclusiones acerca del fenómeno en estudio, el modelo actúa como un mecanismo sistemático de deducciones lógicas que en aproximaciones sucesivas va eliminando de los datos el ruido, y haciendo resaltar los patrones básicos en la dinámica del fenómeno.

2.6.1.4 Simuladores. En las categorías anteriores se presupone que la realidad es organizada y conocible, es decir, que es posible abstraer de los procesos como el crecimiento de las masas forestales, patrones regulares de comportamiento. En este sentido los modelos compiladores, tácticos y estratégicos, son herramientas cognoscitivas de valor estrictamente académico y teórico. En un nivel más aplicado, los modelos simuladores buscan reproducir tanto el funcionamiento de los elementos internos del fenómeno como su dinámica global. Aunque los modelos de simulación pueden ser usados para generar predicciones, su mejor contribución está en la investigación de las relaciones entre comportamiento de los componentes y comportamiento del conjunto. Esta cualidad de los modelos de simulación ha sido desarrollada plenamente con la introducción de conceptos de sistemas y cibernética en su elaboración y uso. Pudiera definirse

la función de los simuladores como la búsqueda de las cualidades dinámicas del objetivo de estudio, dejando en un segundo plano las características cuantitativas; o sea que en los simuladores es más importante la manera de generar resultados que el monto preciso de estos.

Los modelos de simulación imitan el comportamiento del sistema sobre un período. Esto se logra especificando ciertos eventos, los cuales son puntos en el tiempo, cuya ocurrencia significa que puede recolectarse la información importante perteneciente al comportamiento del sistema. Una vez que se definen tales eventos es necesario prestar atención al sistema únicamente cuando ocurre un evento. La información que mide el funcionamiento del sistema se acumula en observaciones estadísticas, las cuales se actualizan en cuanto cada evento tiene lugar (Taha, 1986).

Dado que los modelos de simulación no necesitan funciones matemáticas explícitas para relacionar las variables, usualmente es posible simular sistemas complejos que no pueden modelarse o resolverse matemáticamente. Además, tal flexibilidad permite una representación más apropiada del sistema. La principal falla de la simulación consiste en que el análisis es equivalente a realizar experimentos y por consiguiente está sujeto al error experimental. Esto lleva a las dificultades usuales de diseñar (estadísticamente) el experimento, recolectar observaciones y entonces ejecutar las pruebas estadísticas necesarias de

inferencia. Naturalmente el modelo de simulación no es tan conveniente como los modelos matemáticos (exitosos), los cuales proporcionan una solución general del problema (Taha, 1986).

2.6.1.5 Predictores. Estos modelos son en esencia de tipo aplicado y su propósito básico es el conjunto de información y estructura conceptual de modelo que mejor ajuste tengan para predecir el desarrollo futuro del fenómeno, o su comportamiento en condiciones distintas a aquellas que se midieron en campo.

2.6.1.6 Optimizadores. Se trata de modelos que son estructurados para detectar estados específicos del objetivo de estudio. El criterio que define al estado específico que ha de buscarse es precisamente el criterio de optimización. Debido a las fuertes limitantes en el cómputo de los modelos de optimización, deben aceptarse con frecuencia muy fuertes limitantes en las características de los datos base, de las ecuaciones y la estructura del modelo. Un ejemplo característico es el de los modelos de programación lineal y los basados en redes.

Mientras que los modelos buscan la determinación de la mejor solución (óptima) algunas veces la formulación matemática puede ser demasiado compleja para permitir una solución exacta. Aun si la solución óptima puede obtenerse eventualmente, el cómputo requerido puede ser imprácticamente grande. En este caso la heurística puede utilizarse para desarrollar buenas soluciones

(aproximadas). El método heurístico de solución descansa en las reglas empíricas o intuitivas que, dada una solución actual al modelo, permiten la determinación de una solución mejorada. Actualmente los métodos heurísticos son procedimientos de búsqueda que pasan inteligentemente de un punto de solución a otro, con el objetivo de mejorar el valor del criterio del modelo. Cuando ninguna mejora adicional puede lograrse la mejor solución que se haya tenido es la solución aproximada al modelo (Taha, 1986).

Por otro lado, Ramírez (1994) señala que para el manejo forestal, los objetivos de un modelo pueden ser diversos. Los más comunes son de dos tipos: puntuales y dinámicos.

2.6.1.7 Modelos puntuales. Los modelos puntuales más comunes en dasometría son las tablas de volúmenes y las ecuaciones de ahusamiento. A estos dos grupos básicos se suman aquellos que representan otras relaciones alométricas como la altura con el diámetro normal, las dimensiones de la copa con el diámetro, con la altura o con ambos, volumen de raíces con el diámetro normal y/o con la altura. Recientemente han adquirido importancia los que relacionan biomasa total, leñosa o incluyendo partes vegetativas menos estables, con diámetro normal y altura; estos modelos han cobrado relevancia ante la necesidad de cuantificar los volúmenes de carbono "secuestrados" por la vegetación.

2.6.1.8 Modelos dinámicos. Los modelos dinámicos contemplan tasas de cambio de un sistema (Alder, 1980); son en esencia los que involucran realmente el crecimiento, pueden ser identificados en dos grupos genéricos: de árboles y de masa forestal. La variable explicatoria fundamental es la edad, del árbol o de la masa; se supone que otras variables como la especie, la fertilidad del suelo, los factores climáticos y bióticos y otras influencias e interacciones permanecen constantes, esto obliga a considerar definiciones específicas de estas variables, que de otra manera pueden ser incluidas al modelo además de la edad (Ramírez, 1994).

En el grupo de modelos de árbol individual los más relevantes son para el crecimiento en diámetro, en altura y en volumen. Este último pocas veces obtenido directamente y con mayor frecuencia como derivación de los crecimientos en diámetro y en altura.

En el grupo de modelos para el crecimiento de rodal, se pueden señalar los de diámetro normal, mínimo, máximo, medio y cuadrático; de igual manera, para la altura media, mínima y dominante. Otros modelos, de la mayor importancia para el manejo forestal basados en unidad de superficie, son sobre el área basal, el número de árboles, otros parámetros de densidad y volumen.

2.6.2 Clasificación en base a los medios de construcción.

Para modelar el crecimiento de árboles y masas forestales necesariamente debe existir un motivante y los medios para lograr la construcción. Los medios para la construcción se configuran en base a los conceptos teóricos que sobre el crecimiento se tengan (Ramírez, 1994).

2.6.2.1 Modelos mecanicistas. Se denomina modelo mecanicista a aquél que se obtiene resolviendo ecuaciones diferenciales, o de diferencia, que representan algunas suposiciones sobre el tipo de crecimiento que se desea modelar (Draper y Smith, 1980; citado por Zepeda, 1990); intenta dar una descripción con conocimiento y es eventualmente basado en el empirismo (France y Thornley, 1984). El modelo mecanicista basado en ecuaciones de diferencia trata de describir el funcionamiento de los atributos del nivel "i" en términos de los atributos del nivel "i-1".

Bajo el enfoque mecanicista, primero se analiza el fenómeno bajo estudio y a partir de éste se proponen los modelos matemáticos en forma de ecuaciones de diferencia (Zepeda, 1990).

Muchos de los modelos mecanicistas son de tipo no lineal en sus parámetros, es decir, modelos distintos a la forma (Draper y Smith, 1980; citado por Zepeda, 1990):

$$Y=B_0+B_1Z_1+\dots+B_pZ_p+e$$

Donde:

Z_i : funciones de variables predictoras básicas $x_1 \dots x_k$
($i=1,2,\dots,p$).

Y : variable aleatoria distribuida alrededor de una
media dependiente de Z_i ($i=1,2,\dots,p$).

Para muchos autores, señala Zepeda (1990), los modelos del tipo anterior no son apropiados cuando existe información disponible sobre la forma de la relación existente entre variables respuesta y predictoras, que pueda involucrar un conocimiento directo de la forma real del modelo; o bien cuando tal relación puede ser representada por sistemas de ecuaciones diferenciales, ya que siempre es mejor producir los modelos más realistas posibles.

Una característica de los modelos mecanicistas es expresar el crecimiento como una función de la edad, y no obstante que ello no provee una explicación de las causas del fenómeno y las relaciones son hipotéticas, son de importancia teórica y práctica, puesto que representan una aproximación hacia las leyes biológicas (Prodan, 1968).

2.6.2.2 Modelos empíricos. Un modelo empírico es aquel seleccionado para aproximar experimentalmente un modelo mecanicista desconocido, típicamente a través de polinomios de

algún orden conveniente (Draper y Smith, 1980; citado por Zepeda, 1990).

Los modelos empíricos en el sentido de exigir el concurso de la experiencia, son la corriente más favorecida y promisoría para construir modelos de crecimiento. En estos modelos, los procesos biológicos no son considerados directamente; en cambio, el crecimiento se torna como la respuesta de un sistema complejo, sobre el que actúa un gran número de variables, pero pocas de ellas, frecuentemente sólo una, la edad, se considera para el modelado. La variable de respuesta, el crecimiento, es entonces explicada por la dimensión de esas pocas variables, sin pretender desentrañar los procesos que se suscitan al interior del sistema. Debe entenderse que tales modelos son producto de la experiencia, tanto del modelador como la derivada de la experimentación, motivo por el cual la fuente principal de información son las mediciones repetidas, sobre todo en tiempo que se hacen sobre los árboles y masas forestales (Ramírez, 1994).

Los modelos empíricos no son producto o no deben serlo de reiterados intentos azarosos. Un modelo de esta naturaleza debe ser responsable y respetuosamente emitido y usado. No basta satisfacer preceptos como la bondad de ajuste (R -cuadrada) para juzgar a un modelo como aceptable, debe haber también argumentos coherentes para una proposición (Ramírez, 1994).

Un modelo de crecimiento debe sustentarse para su formulación, en suposiciones admisibles. Esto involucra alguna concepción, aunque genérica, de los procesos involucrados; algunos autores llegan a diferenciar estos modelos como "biológico", tratando de separarlos claramente de los modelos "no argumentables" (Ramírez, 1994).

Muchos intentos se han hecho para simular curvas de crecimiento limitadas por formulaciones matemáticas dirigidas a explicar su forma mediante ciertos postulados fundamentales sobre el proceso de crecimiento o bien son severamente prácticos en el alcance e inspirados por el deseo de obtener cualquier ecuación relativamente simple que contenga la esencia de los datos numéricos. En el enfoque empírico las magnitudes de las constantes en las ecuaciones aptas pueden ser usadas para valorar la importancia en el crecimiento de los factores controlables experimentalmente, pero las constantes no son apreciables como tener alguna significancia absoluta en la teoría del crecimiento. Obviamente la utilidad de cualquier ecuación empírica se mejora si sus constantes producen fácilmente información de interés biológico (Richards, 1959).

Bajo un análisis de comprensión del mecanismo bajo estudio, se podrá escoger un modelo específico. Sin embargo, en algunos casos debido a la complejidad de la situación, se carece de comprensión del modelo o simplemente el deseo de encontrar la mejor aproximación a un conjunto de datos. Ante esta situación

usualmente se selecciona un modelo para ajustar el conjunto de datos sin importar la relación entre el modelo y el mecanismo bajo estudio. El término modelos empíricos ha sido usado para describir familias de distribuciones que puedan servir a este propósito. En la mayoría de los casos tales modelos empíricos no dan comprensión del mecanismo atrás de los datos, ellos simplemente sirven como un medio que resume la respuesta y pueden ser usados para interpolación y extrapolación, es decir, para obtener valores probables correspondientes a puntos no contenidos en el conjunto original de datos (Shapiro y Gross, 1981).

Pueden obtenerse valores probables fuera del rango del conjunto de datos; sin embargo, puede resultar caro hacer cierta extrapolación con el modelo seleccionado basado en su capacidad de ajuste y no de una comprensión básica del mecanismo dado surgido para la respuesta; en tal caso la extrapolación puede rendir resultados engañosos (Shapiro y Gross, 1981).

Una distribución empírica es en realidad una familia de distribuciones que pueden asumir una amplia variedad de formas que son determinadas por los valores de los parámetros.

A continuación, se anota un ejemplo de France y Thornley (1984) para conceptualizar mejor a los modelos empíricos y mecanicistas.

Cuadro 1. Ejemplo de la jerarquía de sistemas y subsistemas.

Nivel	Descripción del nivel
...	...
i+1	Colección de organismos (hato, cultivo, bosque)
i	Organismo (Planta/animal)
i-1	Tejidos
i-2	Células
i-3	Organelos
i-4	Macromoléculas
...	...

Una curva da una descripción del crecimiento de un animal por ejemplo, la cual puede usarse para muchos propósitos. Sin embargo, puede enfatizarse que la curva simplemente redescrive los datos experimentales y este no contiene ninguna información adicional que no esté contenido en los datos. La curva no dice lo que de alguna manera deseamos conocer del porqué la respuesta es así, tanto en términos de su forma general como de su asíntota. De hecho, uno debe desear saber que procesos fisiológicos limitan la tasa de crecimiento de un animal en altos niveles de alimentos o que procesos determinan como pierde peso rápidamente el animal cuando este no come. Para obtener este tipo de conocimiento es necesario relacionar la descripción de la respuesta del animal completo a las descripciones de otro fenómeno -fenómeno que trate con un nivel bajo en la jerarquía organizacional del animal.

En la Figura 11 se identifican los siguientes aspectos:

1. Cada nivel tiene su propio lenguaje, conceptos o principios.
2. Cada nivel es una integración de partes de niveles más bajos. Una descripción en el nivel i puede proporcionar un conocimiento (explicación mecanicista) al fenómeno del nivel $i+1$.
3. La relación entre niveles no es simétrica.

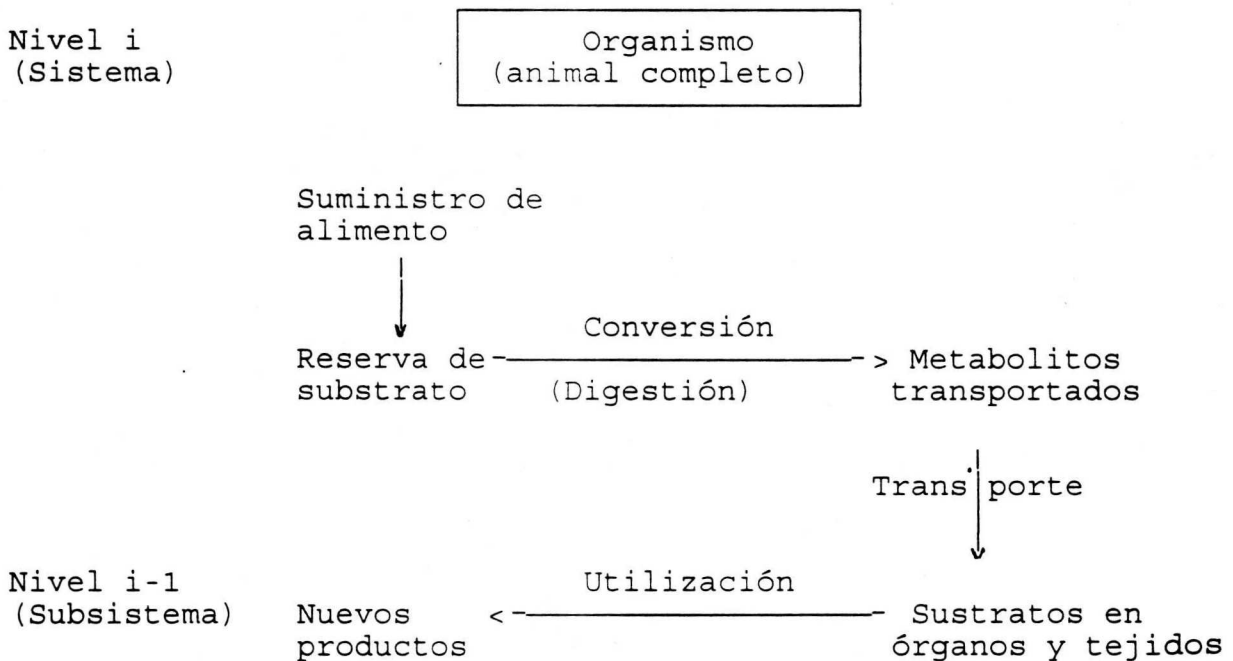


Figura 11. Sistemas y subsistemas: un modelo posible de explicación.

Los empiricistas trabajan a un nivel simple (por decir nivel i) en la jerarquía organizacional donde ellos están construyendo ecuaciones conectando atributos del nivel i solamente. Diferente es el modelo mecanicista el cual trata de describir el funcionamiento de los atributos del nivel i en términos de los atributos del nivel $i-1$.

Los dos niveles son conectados por un proceso de análisis y resíntesis, acompañado por hipótesis o supuestos. La descripción del funcionamiento en el nivel $i-1$ puede ser puramente empírica, no conteniendo ningún elemento que se refiera al nivel $i-2$ o niveles más bajos. Todo modelo mecanicista esta basado eventualmente en el empirismo (France y Thornley, 1984). Aunque todos los modelos son empíricos en algún nivel, las funciones de crecimiento pueden ser de valor en el órgano, tejido o nivel de célula, así como a nivel de organismo completo.

Las características generales de las curvas de crecimiento e incremento sugieren que un polinomio de la forma:

$$Y=a+bx+cx^2+\dots+px^q$$

no puede representar satisfactoriamente un proceso de crecimiento completo. De otro modo, un polinomio de alto grado es bien situado para representar secciones individuales de la curva de crecimiento o incremento y para interpolación. Cálculos por polinomios ortogonales hacen esto posible para conseguir un buen

ajuste con relativamente poco esfuerzo. Algunas posibles ecuaciones tienen asíntotas que no son provistas por ecuaciones polinomiales.

Con los modelos empíricos se intenta representar con una función matemática confiable y conveniente, el curso de cualquier curva producida empíricamente (Prodan, 1968; citado por Zepeda, 1990), sin poner de manifiesto información no contenida en los datos (Villaseñor, 1987; citado por Zepeda, 1990).

Causton y Venus (1981) citados por Zepeda (1990), indican que uno de los modelos más usados es la función exponencial polinómica, la cual implica que el logaritmo de algún atributo de crecimiento es una función polinómica del tiempo.

Los mayores inconvenientes de algunos de los modelos empíricos son: no haber aportado algo a una teoría cuantitativa sobre incremento y producción de poblaciones forestales (Pienaar, 1965; citado por Zepeda, 1990), ser incapaces, en muchos casos, de representar adecuadamente un proceso completo de crecimiento (Prodan, 1968; citado por Zepeda, 1990) y ser funciones marcadamente artificiales de poco realismo biológico (Causton y Venus 1981; citados por Zepeda, 1990). No obstante lo anterior, existen modelos que reúnen ciertas características que les permiten representar satisfactoriamente procesos de crecimiento (Zepeda, 1990).

2.6.2.3 Modelos de procesos. Estos simulan los eventos biológicos mediante los cuales el bióxido de carbono, los nutrientes y el agua son convertidos en biomasa a través de la fotosíntesis. El desarrollo de estos modelos que implicaría simular su diferenciación de células, el engrosamiento de sus paredes y la agregación de tejidos leñosos o árboles completos, no ha llegado a un nivel que motive el interés de los administradores del bosque (Ramírez, 1994).

2.6.3 Clasificación en base a los parámetros del modelo.

2.6.3.1 Modelo estadístico. Los modelos estadísticos, son modelos matemáticos para el estudio de fenómenos aleatorios en donde la característica general de su manipulación matemática es la evaluación de probabilidades (Méndez, 1976). También se les denomina como modelos probabilísticos o modelos estocásticos; son usados en aquellos casos donde la respuesta no puede ser expresada como una función fija de las variables de entrada (Shapiro y Gross, 1981).

Un modelo estocástico contiene algunos elementos aleatorios o distribuciones de probabilidad dentro del modelo, esto es, no únicamente pueden predecir el valor esperado de una cantidad tal como el peso de un animal W , $E(W)$, sino también la varianza de W , $V(W)$ (France y Thornley, 1984).

Los modelos estocásticos tienden a ser técnicamente difíciles para manejar y puede rápidamente convertirse muy complejos. Usualmente se intenta formular y resolver el primer problema de una forma determinística, para luego ver si rinde los resultados deseados con poco esfuerzo antes que pueda plantearse como un difícil problema estocástico (France y Thornley, 1984).

El modelo, por ejemplo, $Y_i = M + e_i$, es bastante simple, pero tiene muchas de las características de ejemplos más complejos. Primero, el modelo es una idealización del sistema, éste no es exacto. Esto último es muy cierto debido a la dificultad en reducir la respuesta de un sistema complejo a expresiones matemáticas y la incapacidad de manipular matemáticamente expresiones sumamente complejas. Cuando el modelo es simplificado, es más fácil analizar los supuestos que han sido hechos, por ejemplo, el modelo asume que M es una constante fija aunque la respuesta puede cambiar de medida a medida del proceso de medición. Segundo, el modelo $Y_i = M + e_i$ no es una ecuación en el usual sentido matemático. Este no se resuelve Y_i conociendo M y e_i , de hecho nunca se conoce M o e_i , únicamente se observa Y_i .

Los modelos estadísticos son usados para predecir el funcionamiento de un sistema conceptual, es decir, los sistemas que no han sido estructurados. Frecuentemente esta área es denominada análisis de tolerancia o análisis de incertidumbre.

2.6.3.2 Modelo determinístico. Estos modelos determinan exactamente, las relaciones entre las variables; determinan los valores de una variable en función de otra(s); dan como resultado una sola respuesta.

Un modelo determinístico es uno que hace predicciones definitivas por cantidades (tales como peso vivo del animal, rendimiento del cultivo o precipitación) sin ninguna distribución de probabilidad asociada.

2.6.4 Otras clasificaciones con diversos enfoques.

Zepeda (1990) registra las diversas clasificaciones de los modelos que varios autores han realizado con un enfoque silvícola básicamente. A continuación solo se presentan los diversos criterios de clasificación que estos autores consideraron:

Munro (1974) citado por Zepeda (1990), basa su clasificación en dos características distintivas de los modelos: la unidad primaria de modelado utilizada y la consideración explícita o implícita del "status" de competencia interarbóreo como parámetro del modelo.

Ek y Monserud (1975) citados por Zepeda (1990), establecen una clasificación basada en la técnica matemática usada y en la evolución de los modelos.

Moser (1980) citado por Zepeda (1990), clasificó a los modelos analizando exclusivamente la evolución de los mismos.

Burkhart (1981; 1982) citado por Zepeda (1990), clasifica a los modelos de acuerdo a el enfoque metodológico.

Kent (1983) citado por Zepeda (1990), basa su clasificación en el enfoque analítico empleado; las clases obedecen a la naturaleza de los parámetros considerados y a la forma en que la competencia interarbórea es modelada, es decir, igual que en la clasificación de Munro de 1974.

Clutter et al. (1983) señalan que muchos de los modelos generados a la fecha reflejan prácticas silvícolas, filosofías de modelado y niveles de complejidad matemática diferentes, por lo su agrupación puede estar basada en una variedad de características. Así entonces, estos autores clasifican los modelos de acuerdo a la población prototipo para la que se generan, la complejidad del enfoque matemático involucrado y la forma en que se aborda el problema de la densidad, es decir, si los modelos contemplan o no la proyección de ésta.

Finalmente, Davis y Johnson (1987) citados por Zepeda (1990), dan una clasificación en función de la combinación de los puntos de vista de Munro de 1974 y Clutter et al. de 1983; usaron la terminología de Clutter et al. (1983) para describir los modelos de totalidad de rodal (de densidad variable) y la

convención de Munro de 1974 para clasificar los modelos de árbol individual.

Zepeda (1990) después de haber registrado las diversas clasificaciones, también diseñó una clasificación de modelos utilizando como criterio básico la estructura del rodal. El argumento del citado autor es debido a que las evidencias de los enfoques de construcción de los modelos son por el interés marcado de los dasónomos por modelar la estructura de los rodales a diferentes niveles de resolución. Otro aspecto que se resalta de esta clasificación, es que existen una serie de modelos e ideas básicas, previstos inicialmente para modelos de rodal, que son aplicables a modelos de árbol y que son los elementos básicos con que es posible construir un modelo.

2.7 Antecedentes del modelaje matemático.

La necesidad y obligación de aprovechar racionalmente los recursos forestales maderables ha motivado la construcción, desde hace más de tres siglos, de modelos para conocer el comportamiento probable de las masas arboladas a través del tiempo y fundamentar así sus decisiones sobre cálculo de la posibilidad y regulación de la corta, según sean los objetivos de manejo considerados; tanto como métodos tradicionales como aquellos basados en modelos de programación matemática.

2.7.1 Antecedentes generales a nivel mundial.

En silvicultura como en biología, sociología y economía se han hecho un gran número de intentos para expresar el crecimiento como una fórmula matemática. Tales intentos en la investigación forestal señala Prodan (1968) son probablemente entre los primeros: Späth en 1797, Hossfeld en 1822 y Smallan en 1837. Sin embargo, las primeras observaciones sobre el crecimiento de los árboles son atribuidas a Teofrasto de Grecia [370-285 a. C.], quién registró observaciones fenológicas y diferencias en tasas de crecimiento y longevidad de especies que crecían en sitios con regímenes de humedad distintos (Tesch, 1981; citado por Zepeda, 1990).

En el siglo XVIII y principios del XIX, las tablas de producción fueron las que primero se produjeron, proporcionando una descripción bastante precisa del crecimiento de varias especies maderables, entre estas tablas destacan las de Harting de 1804 y Behlen de 1827 (Prodan, 1968). Otro antecedente muy importante parece ser el hecho de que en Austria, en 1788, se intentara definir matemáticamente la productividad potencial del bosque mediante relaciones entre existencias, incremento y posibilidad (Osmaston, 1968); esta idea tuvo una trascendencia enorme porque definía que la productividad potencial del bosque, o sea la normalidad, sólo se daría cuando su estructura presentara una secuencia proporcionada de rodales de todas las edades, desde la regeneración hasta el turno; el propósito

original del modelo austriaco fue estimar los impuestos prediales que deben cobrarse sobre los terrenos forestales, y en este sentido representa el primer antecedente de la determinación de impuestos forestales en función de la productividad potencial del suelo, que es la noción más aceptada actualmente (Mendoza, 1993). H. L. Harting en 1791 estableció en Alemania las primeras parcelas experimentales permanentes (Velázquez, 1979). J. Ch. Paulsen [1748 - 1825] publicó tablas de producción para varias especies alemanas importantes (Assmann, 1970; citado por Zepeda, 1990). Späth en 1797 preparó las primeras curvas de crecimiento en volumen para árboles individuales (Prodan, 1968); Seutter en 1799, introdujo la técnica de análisis troncal como base para la construcción de tablas de producción (Tesch, 1981; citado por Zepeda, 1990). Ch. V. Seebach [1793 - 1865] inició el estudio científico y sistemático de la producción de rodales (Assmann, 1970; citado por Zepeda, 1990).

El análisis crítico del efecto de ciertos desastres sobre plantaciones realizadas en Europa durante la primera mitad del siglo XIX, principalmente en los países de Austria y Francia, evidenció el carácter sobresimplificado tanto de los modelos de crecimiento, como de los análisis financieros con los que se justificaron muchas de estas plantaciones (Mendoza, 1993).

Durante el siglo XIX y la primera mitad del siglo XX abundaron publicaciones relativas a modelos matemáticos que definían el ideal estado de normalidad, sus características

silvícolas de rendimiento y de manejo a nivel bosque. Estos modelos fueron la base de muchos otros métodos de cálculo de la posibilidad y regulación de las cortas, y su importancia práctica fomentó el desarrollo de técnicas de medición forestal. Además, se hicieron importantes contribuciones acerca de la interrelación entre el flujo de los volúmenes de cosecha, el método de regulación de la corta y la división dasocrática del terreno (Mendoza, 1993).

2.7.2 Antecedentes generales a nivel nacional.

Zepeda (1992), divide la experiencia de modelos de estimación del incremento y rendimiento maderable en México en:

1. Fórmulas empíricas y tablas de proyección de estructuras
2. Tablas de producción y rendimiento según enfoque tradicional
3. Modelos de estimación del incremento y rendimiento maderable (MEIRM)

El mismo autor, proporciona una concentración de información de cada uno de los tres grupos. Para mayor información, se recomienda consultar la referencia bibliográfica respectiva. A continuación, solo se presenta un listado de estos trabajos.

Las fórmulas empíricas han sido ampliamente usadas en México, destacando las de Shaeffer-Klepac, C. Treviño S., Borggrevve y tablas de proyección de estructuras como la de Loetsch, diferencial y experimental de Meyer, Bruce y Schumacher y método general del tiempo de paso. En todos los casos con el propósito único de estimar la acreación de los rodales, es decir, omitiendo correcciones por mortalidad e incorporación (Zepeda, 1992).

Las tablas de producción y rendimiento según el enfoque tradicional tienen su primer antecedente en 1939 (Departamento Autónomo Forestal y de Caza y Pesca). Fue con Garzón [1976] cuando se construyó la primera tabla de producción normal para rodales de Pinus hartwegii Lindl., de Zoquiapan, México (Zepeda, 1992).

Musálem (1977) citado por Zepeda (1992), presentó el procedimiento seguido para construir tablas de producción preliminares, útiles para el área de influencia de la Unidad Industrial de Explotación Forestal Atenquique, Jalisco.

Cano y Nevárez (1979) citados por Zepeda (1992), produjeron una tabla de producción para Pinus douglasiana Martínez, en Atenquique, Jalisco.

Carrillo (1984) citado por Zepeda (1992), construyó una tabla empírica para rodales naturales de Pinus montezumae Lamb.,

del CEF San Juan Tetla, Puebla.

Torres (1984) citado por Zepeda (1992), produjo tablas de rendimiento para Pinus hartwegii Lindl. de Zoquiapan, México

Finalmente, con respecto a los modelos de estimación del incremento y rendimiento maderable, se comienza con Sarukhán y Franco (1981) citados por Zepeda (1992), quienes produjeron el primer modelo de pronóstico del rendimiento maderable implantado en un sistema de cómputo, que permitió estimar el comportamiento probable de poblaciones naturales de Pinus hartwegii Lindl., de Zoquiapan, México, sujeta a diferentes prescripciones silvícolas distintas.

Aguirre (1984) citado por Zepeda (1992), preparó un modelo compatible para masas coetáneas naturales de Pinus patula Schl. et cham., de la región de Perote, Veracruz.

Mendoza (1985) citado por Zepeda (1992), utilizó para Pinus ponderosa var. arizonica del estado de Chihuahua, el enfoque metodológico del modelo PROGNOSIS.

Islas en 1987, para complementar el modelo desarrollado por Mendoza en 1985 y tratar de obtener un simulador silvícola, generó dos modelos empíricos para estimar indirectamente los niveles probables de regeneración y mortalidad global de un rodal dado, a partir de la distancia y superficie promedio ocupada por

al menos un brinjal proveniente de regeneración probable y aquella en que es posible localizar un árbol muerto anualmente (Zepeda, 1992).

Torres (1987) construyó un modelo compatible de totalidad de rodal para Pinus hartwegii Lindl., de Zoquiapan, México.

Rodríguez (1987) estudió el efecto de la densidad sobre el crecimiento en diámetro normal, altura total, volumen del fuste, longitud de copa, área de proyección de copa y área foliar de árboles de Pinus montezumae Lamb., de Puebla, cuantificando las relaciones alométricas existentes entre algunas variables dasométricas.

Castillo (1988) generó un sistema de estimación de la producción neta de Pinus caribaea var. hondurensis, de "La Sabana", Oaxaca, utilizando un enfoque distribucional.

Fierros (1989) citado por Zepeda (1992), para "La Sabana", Oaxaca, con los datos usados previamente por Castillo (1988), construyó un Modelo de estimación de incrementos y rendimientos forestales basado también en el enfoque distribucional, usando la función de distribución de probabilidad Weibull de tres parámetros.

CIDASA (1989) citado por Zepeda (1992), preparó un conjunto de ecuaciones a las que denominó "simulador silvícola

Atenquique", pero que según Zepeda (1992) corresponden más a un predictor de rendimientos probables.

SARH en 1990, en el marco del convenio de intercambio técnico, en materia forestal, entre México y Finlandia, y como parte de los trabajos del Sistema de Conservación y Desarrollo Silvícola (SICODESI), previeron un modelo de árbol individual independiente de la distancia (Zepeda, 1992).

Zepeda (1990) construyó un modelo de estimación del incremento y rendimiento maderable independiente de la distancia en la región de Perote, Veracruz, con los datos utilizados previamente por Aguirre en 1984.

Acosta (1991) preparó un modelo de estimación del incremento y rendimiento maderable de Pinus montezumae de San Juan Tetla, Puebla.

2.7.3 Tendencias del modelaje matemático.

La investigación de una función generalizada capaz de describir apropiada y adecuadamente los procesos de crecimiento biológico de árboles forestales y rodales han sido sometidos a esfuerzos persistentes por biometristas forestales desde el siglo pasado (Yang, Kozak y Smith, 1978).

Sin lugar a dudas el más significativo logro en materia de funciones de producción ha sido la creación de un cuerpo de teoría sobre silvicultura cuantitativa. En este campo del conocimiento se ha pretendido detectar los patrones generales de comportamiento en la dinámica de la formación, desarrollo y rendimiento de masas forestales. En la medida que ha avanzado la silvicultura cuantitativa, este campo ha aumentado su base de apoyo teórico en ecología cuantitativa, dándole una capacidad explicativa más amplia de los procesos de producción forestal. Los modelos más recientes han aprovechado estos avances para incluir en sus estructuras variables descriptivas y explicativas del proceso de producción (Mendoza, 1993).

Las funciones de producción eran para predecir crecimiento y rendimiento casi de manera exclusiva; actualmente se emplean en las predicciones de rendimiento físico que han sido articuladas con funciones de predicción de rendimiento financiero y estimaciones sobre el uso de los factores de producción (Mendoza, 1993).

La construcción de estas herramientas debe continuarse en el país, bajo la concepción actual de un modelo de estimación del incremento y rendimiento de rodales, es decir, como una familia de funciones, que proporcionen información sobre el comportamiento probable de los mismos a través del tiempo (Zepeda, 1990).

También se ha iniciado el trabajo de formación de funciones de producción múltiple, las cuales, además de evaluar el rendimiento maderable de las labores silvícolas aplicadas sobre una cierta condición de bosque, hacen estimaciones de rendimiento de forraje y otros productos no maderables, así como del impacto ecológico de la actividad (sobre la fauna, el agua y el paisaje principalmente) (Mendoza, 1993). Es aproximadamente a partir de 1970, cuando se inició la utilización sistemática de técnicas de programación matemática para auxiliar el análisis de los temas fundamentales del manejo forestal, que puede percibirse con claridad un cierto progreso más allá de lo estrictamente tecnológico (Mendoza, 1993).

3. MATERIALES Y METODOS

Para alcanzar los objetivos del presente trabajo, se empleo la siguiente metodología:

i). **Revisión bibliográfica.** Se consultaron fuentes de información bibliográfica para registrar, la conceptualización e importancia de los modelos, el proceso biológico del crecimiento, las características de las curvas de crecimiento e incremento de las principales variables dasométricas de algunas especies forestales, la metodología para la construcción y uso de los modelos, las diversas clasificaciones de los modelos matemáticos, el mecanismo de conversión de modelos de incremento a modelos de crecimiento y viceversa, los antecedentes más relevantes y las tendencias de aplicación de los modelos matemáticos en la actividad forestal, y finalmente, se revisaron los supuestos y propiedades de los principales modelos de crecimiento empleados en la actividad forestal.

ii). **Análisis matemático.** Con la información de los básica de los modelos de crecimiento, se procedió a determinar: la forma integral de los modelos, mediante la integración matemática de la tasa de crecimiento supuesta para cada modelo; la función de incremento corriente, como la derivada de la función de crecimiento; la función de incremento medio, al dividir la función de crecimiento entre la edad; el punto de culminación del incremento corriente, a través de la derivada de la función de

incremento corriente igualada a cero; y el punto de culminación del incremento medio, mediante la derivada de la función de incremento medio e igualada a cero o igualar la función de incremento corriente con la de incremento medio. También, se desarrollaron los métodos de sustracción y división sugeridos por Zeide (1993) para explicar la tasa de crecimiento basada en las fuerzas anabólicas y catabólicas.

4. RESULTADOS.

Los resultados de la primera etapa de la metodología se registran con suficiente extensión en la revisión bibliográfica de este documento. La información siguiente constituye los resultados de la segunda etapa.

Por principio, se debe enfatizar que los modelos matemáticos por su naturaleza tienen supuestas aproximaciones en su construcción y por lo tanto tienen rangos de validación restringidos. Estos rangos pueden ser amplios si los modelos son cuidadosa y razonablemente contruidos (Dym and Ivey, 1980).

Los modelos matemáticos pueden ser de forma lineal o no lineal, y pueden definirse sobre valores discretos, continuos, o una combinación. Los modelos de crecimiento que estudiaremos son no lineales continuos.

Como se mencionó, el empleo de los modelos es relativamente simple si se tienen dos condiciones básicas. La primera es la disponibilidad de un instructivo tan claro y completo que cualquier técnico que domine la teoría sobre el proceso de modelado pueda usar correcta y eficientemente el modelo. La segunda condición es que los datos base y el empleo de los resultados del modelo sean perfectamente consistentes con los supuestos, limitantes y propósitos bajo los que el modelo fue diseñado.

A continuación se describen algunos modelos resaltando los supuestos, limitantes, propósitos y aplicaciones de los mismos.

4.1 Función alométrica.

Un número de funciones de crecimiento usadas, frecuentemente están basadas en la transformación (Prodan, 1968):

$$\log (y) = f(\log x)$$

donde, puede ser:

$$f(\log x) = a + b(\log x)$$

ó

$$f(\log x) = k_0 + k_1 \log x + k_2 \log^2 x$$

La fórmula $\log (y) = f(\log x)$ es la función de crecimiento alométrica.

El resultado de la ecuación $\log (y) = f(\log x)$ cuando:

$$f(\log x) = a + b(\log x)$$

es:

$$\log(y) = a + b(\log x)$$

$$y = ax^b$$

Esta muestra la dependencia entre el crecimiento de una característica de 'y' (por ejemplo, volumen) y el crecimiento de otra característica 'x' (por ejemplo, la variable combinada HD^2).

La fórmula $y=ax^b$ se deduce de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a$$

es decir, el incremento relativo (tasa relativa de crecimiento) de 'y' es igual a la tasa relativa de crecimiento de 'x'.

En algunos casos se ha señalado que las relaciones alométricas son relaciones de tipo causa-efecto, más que relaciones empíricas, por lo que a nivel planta se ha intentado dar explicación fisiológica del fenómeno y a nivel conjunto de individuos sobre dinámica poblacional (Zepeda, 1990).

La función alométrica es muy apropiada para aplicaciones prácticas. Esta da una expresión correcta de un número de relaciones que han sido extendidas de atributos a nivel árbol individual a atributos poblacionales, por ejemplo, densidad-volumen medio, densidad-diámetro cuadrático promedio, densidad-altura dominante.

Las siguientes relaciones son algunos ejemplos:

1. La relación entre el diámetro normal y la altura de un árbol en un rodal.

$$\log h = \log a + b (\log d)$$

$$h=ad^b$$

Donde:

h: altura

d: diámetro

2. La relación entre el volumen y el diámetro normal promedio en un rodal.

$$\log v = \log b + c(\log d).$$

$$v=bd^c$$

Donde:

v: volumen

d: diámetro normal promedio

3. La relación entre el volumen, y la variable combinada. altura por diámetro al cuadrado del árbol.

$$\log v = \log a + b(\log h d^2)$$

$$v=a(d^2h)^b$$

Donde:

v: volumen

h: altura

d: diámetro

A continuación, se citan algunos trabajos que consideran relaciones alométricas:

Larsen (1963) citado por Adlard (1983), indica que en 1884 Pressler estableció la "Ley de la formación del fuste" producto de estudios sobre relaciones entre la copa y el fuste. Su hipótesis es: "el crecimiento de área radial a cualquier nivel del fuste, dentro de la copa, es proporcional a la cantidad de follaje arriba de dicho nivel".

Horn (1971) y Jahnke y Lawrence (1965) citados por Adlard (1983), retomaron la hipótesis de Pressler y realizaron observaciones sobre la intensidad y naturaleza de la luz. También lo hicieron Onaka en 1950 y Hal en 1965 con mediciones de la distribución de las hormonas (Adlard, 1983).

Madgwick (1970) citado por Adlard (1983), estudió la relación entre la estructura del rodal y la biomasa, con la productividad de las masas forestales.

Madgwick y Olson (1974) citados por Adlard (1983), investigaron la relación entre el índice de área foliar y el incremento en volumen en un ensayo de aclareos de masas coetáneas de Liriodendron tulipifera.

Lemon (1963) citado por Adlard (1983), encontró una relación de los coeficientes alométricos entre el volumen y la altura de

árboles medios de Pinus pinaster con la distribución estacional de la precipitación y la densidad de la masa.

Mitchell (1975) citado por Adlard (1983), publicó un método utilizando la capacidad fotosintética de la copa como base para hacer crecer los árboles dentro de las masas, aunque este método es muy exigente y necesita de equipo computacional.

Las investigaciones de relaciones alométricas como la proporcionalidad del crecimiento entre órganos diferentes en el mismo individuo, han demostrado otra manera de abordar el problema del crecimiento y la forma de los árboles en relación a factores del medio ambiente, o mejor dicho, un método más científico que dendrométrico.

La existencia de relaciones alométricas entre varias dimensiones o partes de un árbol pueden rápidamente establecerse graficando los datos en coordenadas logarítmicas. Kittredge en 1948 verificó la existencia de tales relaciones entre el peso del follaje y el diámetro normal, mientras que la relación alométrica entre el volumen del fuste y diámetro normal es comúnmente usada en la construcción de tablas de volúmenes locales. Sin embargo, pocas de las relaciones existentes entre componentes de la biomasa son examinadas para un árbol particular durante su vida, de manera que, estas relaciones no son alométricas en el sentido de la definición inicial. Como se definió al inicio, la relación alométrica parte del supuesto de que las tasas de crecimiento

específico de dos componentes mantienen una relación proporcional en el tiempo (Pienaar y Turnbull, 1973).

En México, las relaciones alométricas en la actividad dasonómica se registran casi en su generalidad en todo estudio. Así por ejemplo, la relación alométrica entre el diámetro normal y el volumen del fuste se ha empleado para la construcción de tablas de volúmenes. Han cobrado también bastante importancia en estudios dirigidos en la selva, relacionando las principales variables dasométricas del árbol como son el diámetro normal, altura, volumen y amplitud de copa. Entre estos trabajos, destaca uno reciente, el realizado por López (1995).

4.2 Modelo de Von Bertalanffy.

Pienaar y Turnbull (1973) y Yang, Kozak y Smith (1978), señalaron que Von Bertalanffy derivó su modelo de estudios de relaciones alométricas en organismos. La relación alométrica es la existente entre las dimensiones de los elementos de un organismo, por decir, 'P' y 'Q' cuando la relación entre ellos puede expresarse en la forma:

$$P = cQ^a$$

Donde 'P' podría ser el área fotosintética y 'Q' área del cambium en el fuste de una especie de árbol. El parámetro 'c' depende de condiciones iniciales e incorpora también cambios dimensionales según sean las unidades de 'P' y 'Q'.

Proviene de la suposición de que en individuos normales la tasa relativa de crecimiento de 'P' sostiene una relación constante proporcional a la tasa relativa de crecimiento de 'Q'.

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = a \left[\frac{1}{Q} \frac{dQ}{dt} \right]$$

El parámetro 'a' es la constante alométrica; caracteriza el tipo particular de organismo y medio ambiente, reflejando su particular relación dimensional.

Extensos estudios de muchos organismos terrestres y acuáticos condujeron a Von Bertalanffy a la conclusión de que para una clase importante de organismos la relación alométrica entre el área superficial (ya sea total, o área absorbente total) y el volumen total podría ser apropiadamente expresado como:

$$S=cV^{\frac{2}{3}}$$

Donde:

S: área superficial
V: volumen del organismo
2/3: constante alométrica

El valor de 'c' depende de si la relación involucra únicamente la parte de la superficie interna o externa, y puede incorporar una constante dimensional, tal como la gravedad específica, para que la relación alométrica se exprese entre, por ejemplo, área superficial y peso de un organismo.

Esto último, permitió que Von Bertalanffy formulara una hipótesis que expresó a la tasa de crecimiento en volumen de un organismo como la diferencia entre la tasa anabólica (metabolismo constructivo) y la tasa catabólica (metabolismo destructivo). La tasa anabólica es proporcional al área superficial del organismo, mientras la tasa catabólica proporcional al volumen de la biomasa. La hipótesis puede expresarse matemáticamente como:

$$\frac{dV}{dt} = \eta V^{\frac{2}{3}} - \gamma V \quad (1)$$

Donde:

- η : Parámetro de la tasa anabólica del crecimiento
- γ : Parámetro de la tasa catabólica del crecimiento
- V : Volumen de la biomasa
- $2/3$: Constante alométrica

A continuación se señala el razonamiento de este modelo. La tasa anabólica es directamente proporcional a la superficie de absorción:

$$\text{Tasa anabólica} = cS$$

Donde 'c' es la constante de proporcionalidad.

Para:

$$S = c_2 V^{\frac{2}{3}}$$

como fué establecido por Von Bertalanffy,

La tasa anabólica es:

$$cc_2 V^{\frac{2}{3}} = c_3 V^{\frac{2}{3}}$$

La tasa catabólica es directamente proporcional al volumen de la biomasa;

La tasa catabólica es:

$$c_4 V$$

Donde c_4 es la constante de proporcionalidad.

La tasa de crecimiento potencial es la tasa teórica de crecimiento que debería ocurrir como resultado de la tasa anabólica y catabólica. Puede considerarse como la tasa excedente de producción de los productos metabólicos:

La tasa de crecimiento potencial es:

$$c_3 V^{\frac{2}{3}} - c_4 V$$

Finalmente, la tasa de crecimiento real es proporcional a la tasa de crecimiento potencial:

La tasa de crecimiento real es:

$$c_5 \left[c_3 V^{\frac{2}{3}} - c_4 V \right]$$

Donde ' c_5 ' es un coeficiente de eficiencia que relaciona la tasa de producción de volumen a la tasa de producción de productos metabólicos excedentes. Sobre esta base:

La tasa de crecimiento en volumen es:

$$C_5 C_3 V^{\frac{2}{3}} - C_5 C_4 V$$

esto es,

$$\frac{dV}{dt} = \eta V^{\frac{2}{3}} - \gamma V$$

como en la ecuación (1), la formulación de la tasa de crecimiento del modelo de Von Bertalanffy.

La tasa de crecimiento en forma más general, pero basada en las fuerzas anabólica y catabólica, se puede explicar por la sustracción de estas dos componentes o por la división que ellas representan a través del tiempo (Zeide, 1993). Las componentes de las dos explicaciones (sustracción y división) no son iguales pues responden a explicar dicha tasa en forma aditiva una y multiplicativa la otra. En el Cuadro No. 2 se indican los resultados y en el Apéndice se presentan los desarrollos matemáticos respectivos.

Al integrar la ecuación (1) con el auxilio de la ecuación de Bernoulli, para la integración de ecuaciones diferenciales, se llega a la siguiente ecuación:

$$V_t = \left\{ \frac{\eta}{\gamma} - \frac{\eta}{\gamma} \cdot \exp[-\gamma (1-2/3) (t-t_0)] \right\}^{\frac{1}{(1-2/3)}} \quad (2)$$

Donde ' V_t ' es el volumen total en el tiempo (edad) ' t ', dada la condición inicial de que en el tiempo t_0 , $V_{t_0}=0$. Cuando ' t ' tiende al infinito:

$$\frac{\eta}{\gamma} \cdot \frac{1}{e^{[\gamma(1-2/3)(t-t_0)]}} \rightarrow 0$$

Por lo tanto:

$$V_t \rightarrow \left[\frac{\eta}{\gamma} \right]^{\frac{1}{(1-2/3)}}$$

Si este volumen asintótico se denota por A , entonces:

$$A = \left[\frac{\eta}{\gamma} \right]^{\frac{1}{1-2/3}}$$

$$\frac{\eta}{\gamma} = A^{(1-2/3)}$$

Y si:

$$k = \gamma(1-2/3)$$

luego entonces:

$$V_t = \{A^{(1-2/3)} - A^{(1-2/3)} \cdot \exp[-k(t-t_0)]\}^{\frac{1}{(1-2/3)}}$$

la cual se reduce a:

$$V_t = A\{1 - \exp[-k(t-t_0)]\}^{\frac{1}{(1-2/3)}}$$

o también:

$$V_t = A\{1 - \exp[-k(t-t_0)]\}^3$$

$$V_t = A(1 - e^{-k(t-t_0)})^3$$

Si $t_0=0$;

$$V_t = A(1 - e^{-kt})^3$$

Zeide (1993) lo reporta así:

$$y = a(1 - e^{-bt})^3 \quad (3)$$

o también:

$$y = \beta_0(1 - e^{-\beta_1 t})^3$$

Donde:

y: Variable de estudio
 β_0 : Parámetro del valor asintótico
 β_1 : Parámetro de la tasa de crecimiento
t: Edad

El tiempo en que se localiza el máximo del incremento corriente (t_{IC}), es $t_{IC} = \ln(3)/\beta_1$ y el tiempo donde se encuentra el máximo incremento medio (t_{IM}), es el valor de $t_{IM} > t_{IC}$ tal que $\exp(\beta_1 t_{IM}) - 1 = 3\beta_1 t_{IM}$. La tasa de crecimiento explicada por la sustracción de dos fuerzas es $y' = 3\beta_0^{1/3}\beta_1 y^{2/3} - 3\beta_1 y$, ($y' = dy/dt$) y la explicada por la división de ellas es $y' = 3\beta_0^{1/3}\beta_1 y^{2/3} / \exp(\beta_1 t)$.

Von Bertalanffy demostró que los modelos de crecimiento de la forma como la ecuación (4) se aplican razonablemente bien al crecimiento de muchos organismos de una clase ampliamente

estudiada y también investigó la conexión entre la relación alométrica y las tasas metabólicas reales; también afirmó que la pendiente ' m ' de la línea alométrica es ' $2/3$ ' para especies que obedecen la regla de la superficie del metabolismo, ' 1 ' o algo intermedio, cuando el consumo de oxígeno es proporcional al peso del animal (Richards, 1959).

La base de la ecuación de Von Bertalanffy está en el rigor proyectado de su fundamento teórico. Von Bertalanffy en 1957 afirmó haber tenido éxito al desarrollar "una teoría general de crecimiento, la cual establece leyes cuantitativas racionales de crecimiento, e indicó los mecanismos fisiológicos sobre los cuales el crecimiento está basado". Esta teoría considera el crecimiento animal por ser el resultado de la acción combinada de dos procesos opuestos, el anabolismo y el catabolismo. Von Bertalanffy deriva su ecuación de los supuestos, atribuidos a Pütter en 1920, de que el nivel de anabolismo es proporcional a la superficie aérea de un organismo (o si es masa elevada a la potencia $2/3$), mientras que el catabolismo es proporcional a la masa del organismo. Estos supuestos definen lo que él llamó "el primer tipo metabólico". Von Bertalanffy también describe otros dos tipos de metabolismo y sus correspondientes tipos de crecimiento, pero Ricker en 1979 cuestionó estos supuestos considerándolos como "especulaciones imaginativas". Sin embargo, para honrar la presumiblemente autoría original de estas especulaciones, Ricker refiere a la ecuación de Bertalanffy como la curva de crecimiento No. 2 de Pütter (Zeide, 1993).

El origen de estos conceptos, sin embargo, va más a fondo que la creencia de Bertalanffy y Ricker. Esta puede ser una de las pocas ideas viables del legado prodigioso de Spencer. El estuvo preocupado con esta pregunta: ¿Porqué el crecimiento individual tiene un límite? y propuso muchas respuestas que se parecen a consideraciones estructurales y mecánicas propuestas por Galileo en sus "Diálogos concernientes a dos nuevas ciencias". En particular, Spencer en 1898 escribió, "en cuerpos similares, las areas y las masas varían de acuerdo a las dimensiones de los cuadrados y de los cubos, respectivamente; de esto se deduce que la superficie de absorción aumenta cuatro veces, mientras que el peso movido por la materia absorbida aumentó ocho veces". Como Von Bertalanffy, Spencer restringió este razonamiento a animales, creyendo que el crecimiento de árboles es ilimitado (Zeide, 1993).

4.3 Modelo de Chapman-Richards.

Este modelo de crecimiento se le conoce también como modelo de Richards o generalización de Von Bertalanffy; aunque fué reportado por Mitscherlich en 1919, éste volvió a conocerse por los investigadores americanos con el artículo "una curva flexible de crecimiento de uso empírico" por Richards en 1959 (Zeide, 1993).

Richards en 1959] y Chapman en 1961 al realizar estudios en plantas y peces, respectivamente, registraron que la constante alométrica de $2/3$ que estableció Von Bertalanffy en 1951 fué bastante restringida para aplicarse a varias formas de vida. Ambos autores sugirieron que la constante alométrica sea de un valor indefinido y propusieron un modelo generalizado que tuviera amplias aplicaciones en estudios botánicos empíricos (Pienaar y Turnbull, 1973).

La formulación estándar del modelo conceptualiza la tasa de crecimiento de un organismo o población como resultante de la tasa de crecimiento anabólico (metabolismo constructivo de un organismo) y de la tasa de crecimiento catabólico (metabolismo destructivo de un organismo). La tasa anabólica se asume que es proporcional al tamaño de un organismo o población, elevada a una potencia, mientras que la tasa catabólica se asume que es directamente proporcional al tamaño (Clutter et al, 1983).

Esto es:

$$\frac{dV}{dt} = \eta V^m - \gamma V$$

Donde:

m: Parámetro de alometría
η: Parámetro de la tasa anabólica de crecimiento
γ: Parámetro de la tasa catabólica de crecimiento
V: Volumen de la biomasa
t: Edad

Al integrar la ecuación anterior con el auxilio de la ecuación de Bernoulli, para la integración de ecuaciones diferenciales, se llega a la siguiente ecuación:

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2}$$

Donde:

y: Variable de estudio
β₀: Parámetro del valor asintótico
β₁: Parámetro de la tasa de crecimiento
β₂: Parámetro de forma
t: Edad

Los puntos de culminación del incremento corriente e incremento medio se registran en el Cuadro No. 3.

El modelo de Von Bertalanffy se desarrolló para animales bajo consideraciones teóricas; sin embargo, al deshechar las limitaciones impuestas por los antecedentes teóricos, este puede tener amplias aplicaciones en estudios botánicos empíricos. En su forma general incluye las funciones monomolecular, logística o autocatalítica y Gompertz (Richards, 1959), mismos que se estudian más adelante.

La derivación de la tasa de crecimiento contiene supuestos y aproximaciones que permiten tener dudas acerca de la validez teórica; para ' m ' mayores que 1 no muestran una interpretación teórica de la constante de proporcionalidad de anabolismo y catabolismo.

Los términos en el modelo de Chapman-Richards -tasas anabólica y catabólica- tiene una amplia y gruesa interpretación fisiológica. El modelo incorpora simplificaciones obvias en que los parámetros son considerados constantes a través de la vida de un organismo. Por ejemplo, el término que relaciona la tasa catabólica al volumen de la biomasa, implica una constante de eficiencia catabólica. Simplificaciones similares se aplican a las demás constantes del modelo. Una vez que la tasa del modelo ha sido especificada, el modelo de crecimiento es obtenido por integración. También es cierto que el modelo matemático tiene propiedades que pierden esencia en el mundo real, por ejemplo, el crecimiento se representa como un proceso continuo mientras que de hecho pocos organismos crecen a una tasa continua; mas bien exhiben ciclos estacionales, diurnos y de otro tipo. La adecuación del modelo debería juzgarse, sin embargo, por la habilidad para representar el patrón general de crecimiento, en relación a un propósito establecido (Pienaar y Turnbull, 1973).

El modelo de crecimiento de Chapman-Richards puede aplicarse al crecimiento de árboles individuales así como al crecimiento de rodales. Para árboles que crecen bajo condiciones ambientales

relativamente estables, se puede argüir que la tasa potencial de crecimiento de biomasa, por ejemplo, es el resultado de una tasa anabólica y catabólica, como se ha descrito en párrafos anteriores. La tasa anabólica, esto es, la tasa de metabolismo constructivo, se asume que es proporcional al área fotosintética del árbol; también se asume que hay una relación alométrica entre la biomasa viva y el área fotosintética (Pienaar y Turnbull, 1973).

La ventaja de la ecuación de Chapman-Richards es su flexibilidad. Esta ecuación es valorada por su exactitud y es usada más que cualquier otra función en estudios de crecimiento de árboles y rodales. La ecuación de Chapman-Richards fué derivada de la ecuación de Von Bertalanffy "cuando las limitaciones impuestas por su origen teórico son descartadas" (Richards 1959). La diferencia entre las ecuaciones de Von Bertalanffy y Chapman-Richards es que el parámetro β_2 , restringido a un valor de tres en el caso de Von Bertalanffy, puede asumir cualquier valor en la ecuación de Chapman-Richards.

Ecuación de Von Bertalanffy:

$$Y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^3$$

Ecuación de Chapman-Richards:

$$Y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2}$$

Esta modificación omitió la interpretación biológica propuesta por Von Bertalanffy. Rolfe A. Leary remarcó que comparada con la ecuación de Von Bertalanffy, es un salto hacia atrás muy grande en la explicación de la descripción deseada (Zeide, 1993).

No está claro si la flexibilidad es una característica deseable de los modelos de crecimiento. Cuando el número de parámetros es igual al número de datos, la ecuación pasaría por cada uno de los puntos; seguramente que no se espera esta clase de flexibilidad. Nuestra interpretación de crecimiento poco beneficiaría en una ecuación que pasivamente sigue todos los puntos de los datos. Necesitamos una ecuación que ajuste los datos y de un modo correcto, a una trayectoria directa de todos los puntos, una ecuación que exponga una tendencia de crecimiento en el laberinto de información para separar lo esencial de lo inesperado.

La flexibilidad depende del número de parámetros en una ecuación, y no hay razón para suponer que la ecuación de Chapman-Richards podría ser más flexible que cualquier otra ecuación con tres parámetros, aunque sí que otra de dos.

La función generalizada de Von Bertalanffy, desarrollada por Richards, ha encontrado utilidad en estudios de crecimiento y rendimiento en la silvicultura. Pienaar y Turnbull (1973) reparametrizando e imponiendo una condición inicial en el tiempo

$t=t_0$ y $V_{t_0}=0$ derivaron la función de crecimiento:

$$V_t = A(1 - e^{[-k(t-t_0)]})^{\frac{1}{(1-m)}}$$

Donde:

V_t : volumen o área basal en el tiempo ' t '

A , k , y m : parámetros

Ellos aplicaron exitosamente este modelo para crecimiento y rendimiento de área basal en rodales coetáneos.

Rawat y Franz en 1974 también usaron la función en la forma:

$$W = A[1 - be^{-kt}]^{\frac{1}{(1-m)}}$$

para construir curvas de índice de sitio y concluyeron que el modelo es igualmente conveniente para todos los estudios de crecimiento y rendimiento, por ejemplo, las relaciones de diámetro-edad, área basal-edad y volumen total-edad (Richards, 1959). En la ecuación anterior a diferencia del modelo de Chapman-Richards, se incluye a ' b ' (cuyo significado biológico es limitado).

En México, también son bastantes los trabajos que han empleado este modelo, entre ellos se tienen los realizados por: Aguirre (1984), Arteaga (1985), Fierros (1989), Bojorges (1990), Guerra (1990), Pérez (1990), Landeros (1994), Hughell (1991), etc.

4.4 Modelo Monomolecular.

Este modelo es conocido también como la Ley de rendimientos decrecientes, en la agricultura y economía; Ley de acción de masas, en Química; Ley de efectos de factores de crecimiento; y ecuación de Mitscherlich.

El modelo monomolecular supone que la tasa de crecimiento en un tiempo 't' es directamente proporcional a la cantidad potencial de crecimiento (diferencia entre el crecimiento máximo posible y el crecimiento actual) (Draper y Smith, 1980; Martínez, 1982; Prodan, 1968).

Esto es:

$$\frac{dy}{dt} = k(A - y) \quad (1)$$

Donde:

y: Variable de estudio

k: constante de proporcionalidad de la tasa de crecimiento

A: Tamaño máximo del crecimiento

t: tiempo (edad)

Los supuestos del modelo monomolecular son: la cantidad de maquinaria de crecimiento es constante e independiente del peso seco; esta maquinaria trabaja a una tasa proporcional al nivel del sustrato; y, el crecimiento es irreversible (France y Thornley, 1984).

Integrando la ecuación (1), se tiene:

$$\frac{dy}{(A-y)} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{(A-y)} = \int kdt$$

$$\ln(A-y) = -kt + C_1$$

$$\ln(A-y) - C_1 = -kt \quad (2)$$

Cuando $t=0$, $y=0$, esto es:

$$\ln(A) - C_1 = 0$$

$$\ln(A) = C_1 \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se tiene:

$$\ln(A-y) - \ln(A) = -kt$$

$$\ln\left(\frac{A-y}{A}\right) = -kt$$

$$\frac{A-y}{A} = e^{-kt}$$

$$A-y = Ae^{-kt}$$

$$y = A - Ae^{-kt}$$

$$y = A(1 - e^{-kt})$$

Con otra notación, la ecuación es:

$$y = \beta_0(1 - e^{-\beta_1 t})$$

Donde:

- y: Variable de estudio
- β_0 : Parámetro del valor asintótico
- β_1 : Parámetro de la tasa de crecimiento
- t: Tiempo

A esta ecuación también se le incluye un parámetro de significado biológico limitado. Zeide (1993), la reporta así:

$$y=a(1-ce^{-bt})$$

La cual puede escribirse como:

$$y=\beta_0(1-\beta_2e^{-\beta_1t})$$

Donde β_2 es el parámetro de significado biológico limitado.

Los puntos de culminación del incremento corriente e incremento medio de este modelo, así como de los siguientes, se registran en el Cuadro No. 3.

Para el modelo monomolecular, si se retoma el modelo generalizado de Von Bertalanffy asignándole a la constante de alometría el valor de cero ($m=0$).

Esto es:

$$V_t=A(1-\exp[-k(t-t_0)])^{\frac{1}{(1-m)}}$$

Donde:

$$A=\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-m}} ; k=\gamma(1-m)$$

Por tanto, con $t_0=0$ se tiene:

$$V_t = A \{1 - e^{[-k(t-t_0)]}\} \frac{1}{(1-0)}$$

$$V_t = \frac{\eta}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

o también:

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})$$

Agregando un parámetro, tenemos:

$$y = \beta_0 (1 - \beta_2 e^{-\beta_1 t})$$

Esta ecuación no tiene punto de inflexión, esto es, no hay cambio en signo de la segunda derivada $[d^2y/dt^2]$ para cualquier t , y la variable sube a velocidad constante a una tasa decreciente como la ecuación (1) (la tasa de crecimiento declina linealmente respecto al incremento en el tamaño del organismo).

En la figura 12 se registran curvas con valores diferentes de β_2 . Al factor de escala (β_0) se le asignó el valor de uno. Como β_1 y t se presentan juntos, se asignó para este ejemplo, el valor de uno al primero. Si ahora, se asignan diferentes valores a β_0 , la escala vertical de la curva tendría que cambiar; diferentes valores de β_1 podrían alargar o contraer la curva horizontalmente. Cada curva, cuando $t=0$ inicia en $y = \beta_0(1 - \beta_2)$, la cual es simplemente $1 - \beta_2$ cuando $\beta_0=1$.

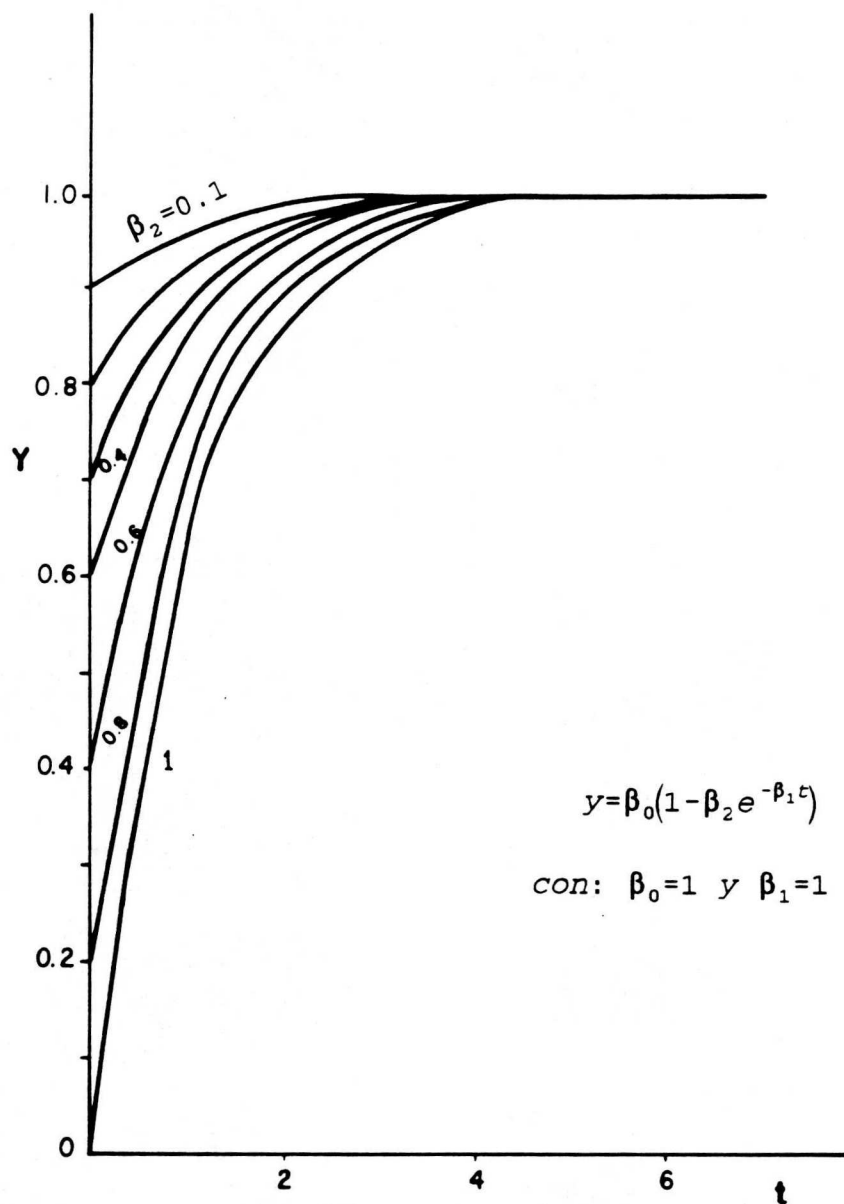


Figura 12. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo monomolecular [Adaptado de Draper y Smith, 1980].

La ecuación monomolecular, al no declinar, presenta más bien una descripción no objetiva del crecimiento. Ricker [1979] atribuye la primera aplicación biológica de una forma especial de esta ecuación a Pütter (1920), mientras que Richards (1969) refiere a esta como la fórmula de Mitscherlich. Se tiene registrado aún un uso anterior en un estudio de crecimiento de árboles por Weber en 1891 (Zeide, 1993).

Esta ecuación describe el progreso de una reacción química irreversible de primer orden, de hecho esta ecuación surge de estudios de reacciones químicas, por ello también se le conoce como Ley de acción de masas en la Química.

Esta ley establece que el rendimiento se aproxima a un límite y por lo tanto, el aumento en el rendimiento tiende hacia el valor cero. Turgot [1727-1781] postuló esta ley para la economía nacional y sobre estas bases el economista inglés David Ricardo [1772-1823] formuló la "Ley de rendimientos decrecientes". Fue Justus v. Liebig quién sugirió la validez de esta ley para rendimientos de cultivos agrícolas (Prodan, 1968).

Alfred E. Mitscherlich [1874-1956] también le llamó "Ley de efectos de factores de crecimiento", y para algunos autores esta es la "ecuación de Mitscherlich". De entre las funciones de tipo exponencial, la ecuación de Mitscherlich representa uno de los primeros intentos para explicar las respuestas de un cultivo a las adiciones de fertilizantes (Martínez, 1982). De acuerdo con

Tisdale y Nelson (1956) citados por Martínez (1982), para llegar a su expresión Mitscherlich se basó en sus observaciones y supuso que la razón del incremento en el rendimiento esperado, $d[E(y)]$, al incremento en el nutriente, du , era directamente proporcional a la diferencia entre el rendimiento máximo posible, A , y el rendimiento actual esperado. Si q es una constante de proporcionalidad, se puede escribir (Martínez, 1982):

$$\frac{d[E(y)]}{du} = (A - E(y))q$$

Pimentel (1953) citado por Martínez (1982), indicó que una de las críticas más importantes contra el uso de la ecuación de Mitscherlich en investigaciones con fertilizantes, es la dificultad extrema para considerar las interacciones entre los nutrientes. Un modelo similar a la ecuación de Mitscherlich puede deducirse para estudiar el crecimiento de una población biológica.

En el pasado, el modelo monomolecular se ha usado para representar las últimas fases de la vida de un organismo.

4.5 Modelo Logístico.

La forma más sencilla de dar origen a una curva sigmoide es la de introducir en la ecuación geométrica un término que provoque disminución del índice de incremento conforme aumenta la población, pero además se pretende disminuir el índice de incremento de manera uniforme. Estos objetivos se logran si cada individuo que se agrega a la población origina que disminuya el índice de incremento en una cifra equivalente (Krebs, 1985; citado por Aguilar, 1994).

El modelo logístico o autocatalítico supone que la tasa de cambio de la variable dependiente es proporcional al valor de ésta multiplicado por una función lineal decreciente de ella misma (Franco, 1983).

Esto es:

$$\frac{dy}{dt} = ky \frac{(A-y)}{A} \quad (1)$$

Donde:

A: Tamaño máximo de crecimiento

y: Variable de estudio

k: Constante de proporcionalidad de la tasa de crecimiento

k(A-y): Cantidad potencialmente lograble

t: Edad

Otra forma de conceptualizar el modelo logístico es, que la tasa de crecimiento es proporcional al producto entre la dimensión actual y el crecimiento futuro (Draper y Smith, 1980).

Esto es:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ky(A-y)}{A}$$

Como se nota:

$$\frac{dy}{dt} / y$$

es decir, la tasa relativa de crecimiento del tamaño actual declina linealmente con el incremento de y .

Una tercera alternativa de conceptualizar el modelo logístico, es que la tasa relativa de crecimiento a la dimensión presente declina linealmente con el incremento de y , esto es (Draper y Smith, 1980):

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \frac{k(A-y)}{A}$$

Por otro lado, se registra que la ecuación para el crecimiento de Robertson es conocida como la curva "autocatalítica" y se basa en la siguiente ecuación diferencial (Prodan, 1968):

$$\frac{dy}{dt} = ky(y_{\text{máx}} - y)$$

Esta ecuación establece que el incremento es proporcional al tamaño alcanzado y al crecimiento futuro $y_{\text{máx}} - y$, similar conceptualización que el realizado por Draper y Smith (1980). Sin embargo, a diferencia de la ecuación señalada por Franco (1983) y Draper y Smith (1980), ésta no registra la fracción inversa de A . Se registró también que durante una epidemia, si cada

individuo de la población puede clasificarse como infectado o susceptible de serlo, y si la tasa de crecimiento de infectados es proporcional al número aproximado de infectados multiplicados por el número aún susceptible, el resultado es el modelo logístico (Bartlett, 1955; citado por Shapiro y Gross, 1981).

Esto es:

$$\frac{dy_{(t)}}{dt} = ky_{(t)}[n - y_{(t)}]$$

Donde:

k: constante de proporcionalidad

y_t : número de infectados en el tiempo t

n: tamaño de la población

En el modelo exponencial, la tasa de crecimiento depende únicamente de la maquinaria de crecimiento (proporcional al peso seco) y no sobre la disponibilidad de sustrato. El modelo monomolecular supone que la tasa de crecimiento depende únicamente del nivel de sustrato y no del peso seco. Ahora, con el modelo logístico se establece un supuesto compuesto: la cantidad de maquinaria de crecimiento es proporcional al peso seco; esta maquinaria de crecimiento trabaja a una tasa proporcional a la cantidad de sustrato; y, el crecimiento es irreversible (France y Thornley, 1984).

La solución de la ecuación diferencial (1) es (Draper y Smith, 1980; Prodan, 1968; Franco, 1983; Shapiro y Gross, 1981; y, Leithold, 1992):

$$y = \frac{A}{(1 + be^{-kt})}$$

o también:

$$y = \frac{\beta_0}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})}$$

con $\beta_0 > 0, \beta_1 > 0$ y $\beta_2 > 0$

Donde:

y : Variable de estudio
 β_0 : Parámetro del valor asintótico
 β_1 : Parámetro de la tasa de crecimiento
 β_2 : Parámetro de escasa implicación biológica
 t : Edad

Se puede notar que en la expresión:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ky(A-y)}{A}$$

tiene su pendiente siempre positiva.

Como se podrá verificar:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k}{A} (A - 2y)$$

Como $dy/dt > 0$ para $0 < y < A$, entonces, la segunda derivada es:

Positiva para $y < 1/2 A$

Negativa para $y > 1/2 A$

Punto de inflexión en $y = 1/2 A$

A continuación, se enumeran algunas propiedades del modelo:

1. Curva sigmoide (la segunda derivada cambia de signo entre 0 e infinito)
2. Para $t=0$, $y=\beta_0/(1+\beta_2)$ (valor inicial del crecimiento)
3. Para $t \rightarrow \text{infinito}$, $y \rightarrow \beta_0$ (valor límite del crecimiento)
4. $\beta_2 > 0$, debido a que $\beta_0 > (\beta_0/(1+\beta_2))$

En las figuras 13 y 14 se podrá notar que si $\beta_0=1$ y β_2 con valores de uno y ocho, el punto de inicio cuando $t=0$ diferirá en el eje de las ordenadas. Si se modifica β_1 se altera la pendiente de la curva. Debido a que $\beta_1 t$ se presenta como un producto, un cambio de β_1 puede esencialmente ser compensado por una recalibración de t , por ejemplo, $\beta_1 t = (1/2 \beta_1)(2t) = \beta_1 T$ donde $\beta_1 = 1/2 \beta_1$ y $T=2t$.

Amo y Nieto (1983) reportan del modelo logístico algunas suposiciones que están a crítica:

1. Se asumen constantes los factores ecológicos que tienen influencia sobre la variable de estudio, por ejemplo, el crecimiento. Las variaciones ambientales durante algunos períodos críticos al principio de este estado de

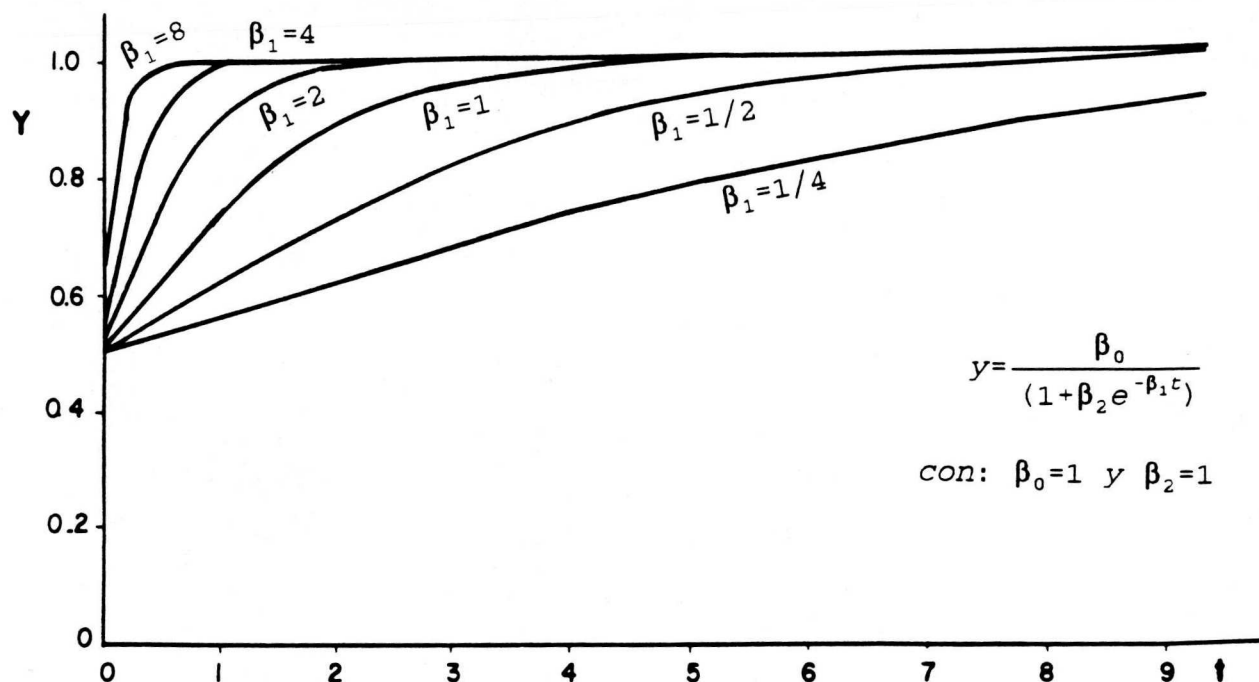


Figura 13. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo logístico [Adaptado de Draper y Smith, 1980].

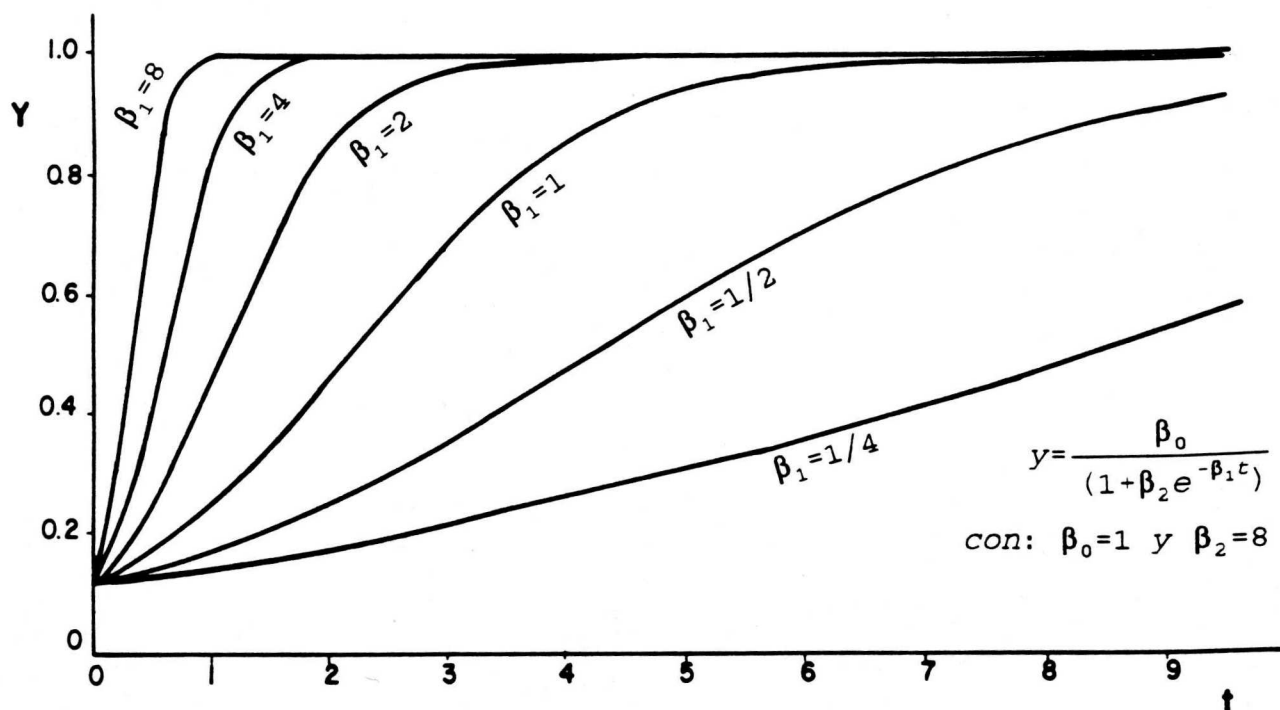


Figura 14. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo logístico [Adaptado de Draper y Smith, 1980].

crecimiento, pueden afectar el desarrollo del árbol. Este hace que sean necesarias ciertas simulaciones y análisis para detectar la sensibilidad de los parámetros a variaciones ambientales.

2. Efectos de competencia con otras plantas, relacionadas con la densidad. Quizá podría definirse el umbral de densidad por debajo del cual la competencia es posible.

La ecuación logística propuesta por Verhulst en 1838 es probablemente la ecuación más famosa en la Ecología. Una exposición excepcional de sus antecedentes esta dada por Hutchinson en 1978. Las fuerzas que contrarrestan el incremento exponencial son asumidas para hacer proporcional al cuadrado del tamaño. El punto de inflexión de la ecuación logística corresponde a un medio del tamaño final. La tasa relativa del crecimiento de la ecuación disminuye linealmente con el tamaño. A pesar de sus supuestos indefendibles y la pérdida de precisión - fué establecida (Zeide 1989) para ser de entre las ecuaciones sigmoides la menos precisa para la descripción del crecimiento en diámetro de los árboles - la ecuación es todavía usada en investigación, mayormente por zoólogos (Ricklefs, 1979 y Murtaugh 1988; citados por Zeide, 1993).

El modelo logístico es el más utilizado y validado para el crecimiento durante todo el ciclo de vida de los árboles (joven, adulto, maduro y viejo) (Castaño y Quiroga, 1989; citados por

Cuevas, Parraguirre y Rodríguez, 1994).

Una aplicación del crecimiento logístico en economía es la distribución de información acerca de un producto en particular. En biología se utiliza para describir la expansión de una enfermedad y en sociología, para describir la difusión de un rumor o chiste (Leithold, 1992).

En México, este modelo lo han aplicado en la actividad silvícola, entre otros, Franco (1983), Amo y Nieto (1983), Cuevas, Parraguirre y Rodríguez (1994) y Aguilar (1994).

4.6 Modelo de Gompertz.

A este modelo se le conoce también como "ecuación de descomposición exponencial" (Laird et al, 1965; citados por Zeide, 1993).

El modelo de Gompertz asume que la función que limita la tendencia al crecimiento exponencial es una función logarítmica e inversa de la variable dependiente (Franco, 1983).

Esto es:

$$\frac{dy}{dt} = ky \ln\left(\frac{A}{y}\right) \quad (1)$$

Donde se puede notar que $\ln(A/y)$ es la función que limita el crecimiento exponencial.

De la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = k \ln\left(\frac{A}{y}\right)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = k [\ln(A) - \ln(y)]$$

Esta última ecuación implica una relación lineal entre la tasa relativa de crecimiento y $\ln(y)$.

Integrando, la solución a la ecuación (1) es (Draper y Smith, 1980):

$$y = Ae^{-be^{-kt}}$$

Otra forma de escribir este modelo es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$$

$$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0 \text{ y } \beta_2 > 0$$

Donde:

- y : Variable de estudio
- β_0 : Parámetro del valor asintótico
- β_1 : Parámetro de significado biológico limitado
- β_2 : Parámetro que determina la tendencia de la curva en el tiempo
- t : Edad

Por otro lado, France y Thornley (1984) señalaron que la ecuación de Gompertz puede derivarse asumiendo:

1. El sustrato no es limitado, esto es, que la maquinaria de crecimiento está saturada siempre con sustrato.
2. La cantidad de maquinaria de crecimiento es proporcional al peso seco y , con una constante de proporcionalidad k .
3. La efectividad de la maquinaria de crecimiento decae con el tiempo, de acuerdo a la cinética de primer orden dando un decaimiento exponencial. Este decaimiento es atribuible a degradación (posiblemente enzimática), envejecimiento o

desarrollo y diferenciación.

La ecuación de Gompertz comparada con la ecuación logística, tiene el mismo número de parámetros (tres) pero el punto de inflexión de aquella ocurre antes del tiempo necesario para llegar a la mitad del tamaño final. Gompertz muestra un rápido crecimiento inicial, pero una aproximación más lenta a la asíntota, con un mayor período lineal cerca del punto de inflexión.

Si en el modelo generalizado de la tasa de crecimiento de Von Bertalanffy se le asigna a la constante de alometría el valor de uno ($m=1$), se tiene:

$$\frac{dY}{dt} = \eta Y^m - \gamma Y \quad (3)$$

$$\frac{dY}{dt} = (\eta - \gamma) Y$$

denotando un crecimiento exponencial.

Para valores de m diferentes de uno la integración de (3) conduce a la ecuación de crecimiento:

$$Y = \left\{ \frac{\eta}{\gamma} - \left[\frac{\eta}{\gamma} - Y_0^{1-m} \right] e^{-(1-m)\gamma t} \right\}^{\frac{1}{1-m}} \quad (4)$$

Con $t=t_0$, $Y_{t0}=Y_0$.

La gráfica de esta función es sigmoide aproximándose asintóticamente al valor:

$$\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{1-m}}$$

que es el valor máximo del modelo y que se ha denotado por '**A**' anteriormente en otros modelos y en lo que sigue.

Para valores de '**m**' arriba de '**1**' los supuestos del crecimiento no muestran interpretación teórica como constantes de proporcionalidad del anabolismo y del catabolismo.

Al hacer **m=0** la ecuación resultante es la monomolecular, mientras que si **m=2** la ecuación es la logística.

Por lo tanto, valores que excedan mucho de la unidad serán necesarios si la función general es para tener amplias aplicaciones teóricas.

La única posibilidad para tener una curva exponencial es cuando **m=1** [ver ecuación (3)]. Pero con este valor de **m**, la ecuación (4) no es solución.

Puede mostrarse que con crecimiento limitado, cuando **m** llega a ser la unidad, las constantes de anabolismo y catabolismo de von Bertalanffy llegan a ser iguales e infinitamente grandes.

Los valores de 'm' entre 1 y 2 representan tipos de curvas desde la Gompertz hasta la logística; además con $m > 2$ el punto de inflexión puede ser llevado a $Y=A/2$.

Cuando 'm' esta entre 0 y 1 las curvas son transicionales entre las formas monomolecular y la Gompertz.

En el modelo generalizado de Von Bertalanffy, la tasa de crecimiento es:

$$\frac{dY}{dt} = \eta Y^m - \gamma Y$$

$$\text{y si } k = (1-m)\gamma$$

entonces la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{kY \left[\left(\frac{A}{Y} \right)^{1-m} - 1 \right]}{(1-m)}$$

y la tasa relativa de crecimiento:

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = \frac{k \left[\left(\frac{A}{Y} \right)^{1-m} - 1 \right]}{(1-m)}$$

Estas fórmulas no son válidas para el caso $m=1$. Cuando $x \rightarrow 0$ el valor límite de:

$$\frac{a^x - 1}{x} \text{ es } \ln(a)$$

Así, la tasa absoluta de crecimiento cuando $m \rightarrow 1$ llega a ser:

$$\frac{dY}{dt} = kY \ln\left(\frac{A}{Y}\right)$$

que es la tasa de crecimiento asignada a la función de Gompertz, inicialmente registrada [ecuación (1)].

La constante ' m ', en la generalización de Von Bertalanffy, determina la proporción con respecto al tamaño que tiene el crecimiento en el punto de inflexión; para la ecuación de Gompertz, es (Draper y Smith, 1980):

$$y = \frac{A}{e} = 0.368A \text{ en } t = \frac{1}{\beta_2} \log \beta_1$$

En la figura 15, con $\beta_0=1$, $\beta_2=1$ y variando a β_1 , se muestran diversas curvas teóricas. Para valores fijos de β_1 y variando β_2 , se producen curvas que inician en el mismo punto, similares a las curvas de las figuras 13 y 14 del modelo logístico.

A continuación se anotan tres aspectos que caracterizan al modelo de Gompertz.

1. Si ' t ' tiende a infinito entonces ' y ' tiende a ' A ', el valor límite de crecimiento.
2. Cuando $t=0$, $Y=Ae^{-b}$, el valor inicial del crecimiento.

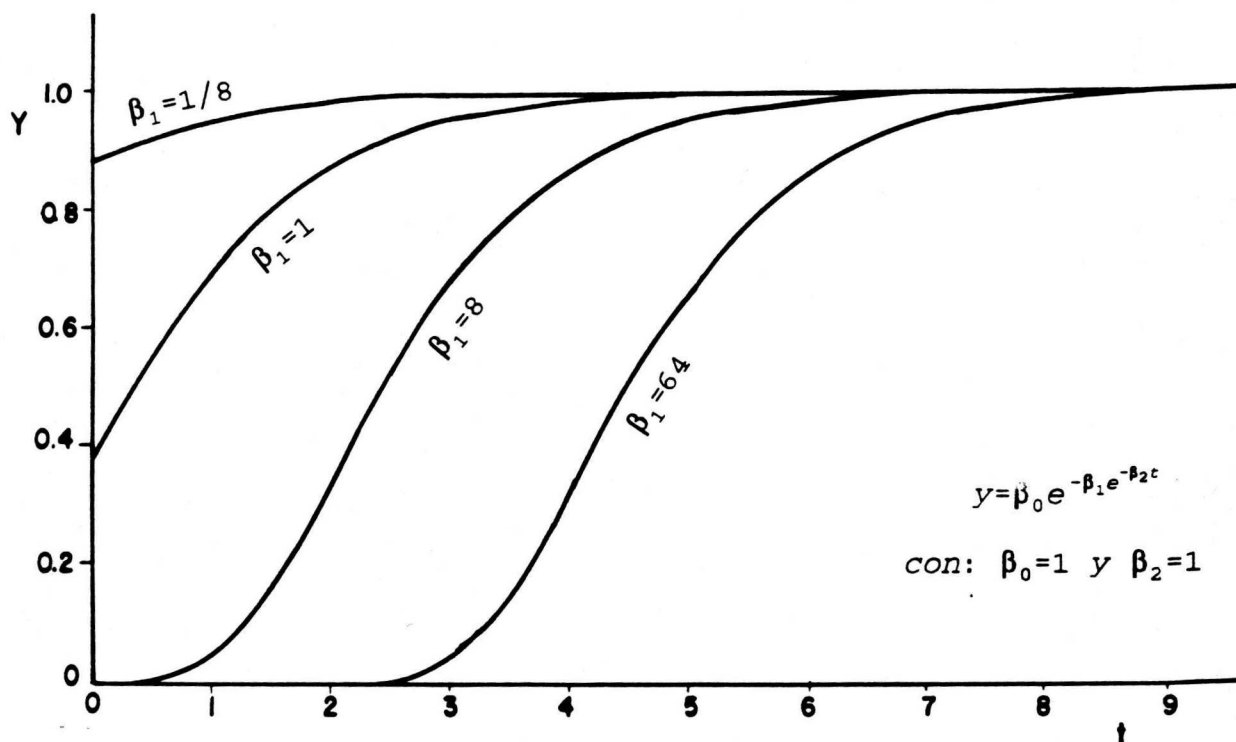


Figura 15. Familia de curvas teóricas derivadas del modelo de Gompertz [Adaptado de Draper y Smith, 1980].

3. Es una curva no simétrica con respecto al punto de inflexión, el cual es:

$$\frac{\ln \beta_1}{\beta_2}$$

La ecuación de Gompertz propuesta en 1825 fué diseñada para describir la distribución de edad en poblaciones humanas. Un siglo más tarde fué aplicada como un modelo de crecimiento (Winsor, 1932; citado por Zeide, 1993). La ecuación presenta una tasa relativa de crecimiento (la razón del incremento de tamaño al tamaño mismo, y'/y) como una función exponencial elemental de la edad. Por eso, esta ecuación fué llamada (Laird et al. 1965; citados por Zeide, 1993), la ecuación de descomposición exponencial. Otra característica distintiva de la ecuación de Gompertz es que la posición del punto de inflexión es controlado por un parámetro únicamente, el tamaño final (asintótico), **A**. Este punto ocurre cuando el tamaño actual es igual a **A/e**, esto es, alrededor de un tercio ($1/e = 0.3679$) del tamaño final.

Indica Zeide (1993) que la ecuación de Gompertz fué comprobada por Causton y Venus en 1981 y muchos otros investigadores (Laird et al., 1965; Zweifel y Lasker, 1976; Zullinger et al., 1984; citados por Zeide, 1993) para ser aplicada más en trabajos biológicos. Señala además, que estos resultados empíricos, fueron deducidos teóricamente por Medawar en 1940 indicando que el crecimiento debería seguir el modelo de

Gompertz.

Esta curva ha sido usada más para estudios de población y crecimiento animal que para aplicaciones botánicas; fué empleada, por ejemplo, por Medawar en 1940 en un estudio de crecimiento del corazón de pollos. Ha sido también aplicada al estudio de hojas de Pelargonium por F.A.Amer y W.T.Williams en 1957 (Richards, 1959).

Nokoe en 1978 aplicó la ecuación de Gompertz a tres especies de árboles y concluyó que esta ecuación "demostró flexibilidad suficiente para justificar su uso" (Zeide, 1993).

En México, Franco (1970), realizó ajustes de la función de Gompertz a una serie de relaciones alométricas de crecimiento e incremento, en un estudio de simulación demográfica y productividad de poblaciones uniespecíficas de árboles.

También Aguilar (1994), determinó el comportamiento de este modelo comparándolo con los modelos de Schumacher, Weibull y logístico; destacó que este modelo no ajusta bien en las primeras etapas de crecimiento como lo hacen la Weibull y Schumacher.

4.7 Modelo de Schumacher.

Inicialmente se desarrolló para relacionar el volumen con la edad, sin embargo, el principal supuesto del modelo es que el crecimiento porcentual varía inversamente con la edad, es decir, a medida que aumenta la edad disminuye la tasa de crecimiento (Schumacher, 1939).

Esto es:

$$\frac{dy}{d(\frac{1}{t})} = -ky$$

Donde:

y: Variable de estudio

k: Constante de proporcionalidad de la tasa de crecimiento

t: Edad

Aunque la ecuación anterior, también expresa que la tasa relativa de crecimiento varía inversamente con la edad, y puede escribirse así:

$$\frac{dy}{y} = -kd(\frac{1}{t})$$

Al integrar la ecuación anterior, se llega a la siguiente:

$$y = ce^{-k(\frac{1}{t})}$$

Esta ecuación comúnmente se registra así:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 \left(\frac{1}{t}\right)} \quad (1)$$

$$\beta_0 > 0, \beta_1 > 0$$

Donde:

y : Variable de estudio
 β_0 : Parámetro del valor asintótico
 β_1 : Parámetro de la tasa de crecimiento
 t : Edad

La función de incremento corriente (I.C.) se obtiene al derivar la función de crecimiento con respecto al tiempo, esto es:

$$I.C. = \frac{dy}{dt}$$

Para el modelo en (1), la función del incremento corriente es:

$$I.C. = \beta_1 t^{-2} \beta_0 e^{-\beta_1 t^{-1}} \quad (2)$$

o también:

$$I.C. = \frac{\beta_1}{t^2} y$$

El punto de culminación del incremento corriente ($t_{I.C.}$) se obtiene al resolver para 't' la ecuación:

$$\frac{d}{dt} (I.C.) = 0$$

Como se puede comprobar, el punto de culminación del I.C. en (2) es:

$$t_{I.C.} = \frac{\beta_1}{2}$$

La función de incremento medio (I.M.) se obtiene al dividir la función de crecimiento entre la edad, esto es:

$$I.M. = \frac{Y}{t}$$

Para el modelo en (1), la función de incremento medio es:

$$I.M. = \left[\frac{\beta_0 e^{-\beta_1 t^{-1}}}{t} \right] \quad (3)$$

El punto de culminación del incremento medio ($t_{I.M.}$) se obtiene resolviendo para 't' la ecuación:

$$\frac{d}{dt} (I.M.) = 0$$

No es difícil comprobar que para la ecuación (3), el punto de culminación del I.M. es:

$$t_{I.M.} = \beta_1$$

Otra forma para determinar la culminación del I.M. es cuando se satisface la condición:

$$I.M. = I.C.$$

$$\frac{\beta_0 e^{-\beta_1 t^{-1}}}{t} = \beta_0 \beta_1 e^{-\beta_1 t^{-1}} t^{-2}$$

$$\frac{\beta_0 e^{-\beta_1 t^{-1}}}{\beta_0 e^{-\beta_1 t^{-1}}} = \beta_1 t^{-1}$$

$$1 = \beta_1 t^{-1}$$

$$t_{I.M.} = \beta_1$$

A continuación se registran las propiedades del modelo:

1. Curva sigmoide asimétrica.
2. Si $t \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$
3. Si $t \rightarrow \text{infinito}$, $y \rightarrow \beta_0$ (valor máximo o asíntota).
4. Punto de culminación del incremento medio (I.M.):

$$t_{I.M.} = \beta_1$$

5. Punto de culminación del incremento corriente (Punto de inflexión):

$$t_{I.C.} = \frac{\beta_1}{2} = \frac{t_{I.M.}}{2}$$

Características generales del modelo de Schumacher:

1. Es un modelo sigmoide monotónico (la pendiente de la ecuación nunca es negativa), esto porque la primera derivada de la ecuación es mayor que cero, es decir, del incremento corriente.

2. Es uno de los modelos sigmoides más parsimoniosos o austero.

3. Es un modelo de fácil manipulación analítica matemática.

El antecedente que se tiene registrado sobre este modelo es que en 1937, Mackinney, Schumacher y Chaiken aplicaron una curva de crecimiento de una población de caña al rendimiento volumétrico de Pino loblolly alcanzándose buenos resultados. Sin embargo, la principal dificultad es que se requiere del conocimiento previo del máximo rendimiento de los rodales de una calidad de sitio y densidad justo antes de que empiecen a decrecer (Schumacher, 1939).

MacKinney, Schumacher y Chaiken (1937) citados por Schumacher (1939), señalaron que la curva de rendimiento volumétrico de un rodal coetáneo presenta ciertas características en común con otras curvas de crecimiento, las cuales son:

1. La curva de rendimiento vale cero en el intercepto y tienen un valor máximo finito a edad avanzada justamente antes de que el rodal empiece a decrecer. De ahí en adelante, el rodal pierde su uniformidad. La pérdida de volumen por mortalidad excede al crecimiento periódico de todos los supervivientes, y los espacios normalmente son cubiertos por nueva generación.

2. La curva muestra una tasa declinante del porcentaje de incremento; o, en los términos de medición forestal, el porcentaje de crecimiento varía inversamente con la edad.

3. La pendiente de la curva de crecimiento aumenta al inicio de la vida y decrece en los últimos años. La curva de incremento corriente anual asciende rápidamente para los árboles que tienen espacio para el buen crecimiento, pero declina durante la intensa lucha por la luz y espacio porque los rodales pierden continuamente el volumen de los árboles menos vigorosos, que son suprimidos primero y después reemplazados por los individuos dominantes. El incremento corriente anual es cero cuando se obtiene el máximo crecimiento.

La concepción más simple y alternativa del crecimiento se concibió en la segunda característica, es decir, que el porcentaje de crecimiento varía inversamente con la edad, y que al ser traducido al lenguaje matemático dió origen al modelo de Schumacher.

El modelo de Schumacher ha sido bastante usado desde que éste fue dado a conocer por su autor. De entre varios trabajos se registran los siguientes:

Alder (1980) describió diversos métodos para estudiar el crecimiento y predecir el rendimiento; mostró al modelo

Schumacher con un parámetro no lineal k , así como una forma múltiple del mismo. Después, Benavides (1987) lo aplicó a datos de análisis troncales de Pinus michoacana cornuta Martínez y P. oocarpa Schiede en Jalisco, México.

Farrar y Murphy (1986) citados por Aguilar (1994), utilizaron una modificación de la función de rendimientos de Schumacher para predecir el volumen de rodales de segundo crecimiento de pino loblolly.

Cao (1986) citado por Aguilar (1994) comparó dos procedimientos para derivar las distribuciones diamétricas, al utilizar el modelo de Weibull y los modelos Coile y Schumacher.

Aguilar (1983) empleo el modelo de Schumacher para elaborar curvas de índice de sitio con datos de análisis troncales de Pinus douglasiana Martínez y P. lawsonii en Michoacán, México.

Pérez (1990) determinó índices de sitio de Pinus arizonica Engelm. de Durango, Méx., probando los modelos Schumacher y Chapman-Richards, en sus versiones anamórficas y polimórficas.

Bojorges (1990) generó curvas anamórficas de índice de sitio por el método de la diferencia algebraica ajustando y comparando los modelos Schumacher y Chapman-Richards a datos de análisis troncales de Abies religiosa (H.B.K.) Schl. et Cham. en Zoquiapan, México.

Landeros (1994) analizó la bondad de ajuste de los modelos Schumacher y Chapman-Richards en sus versiones anamórficas y polimórficas utilizando los métodos de ajuste de la curva guía y de la diferencia algebraica. La información fue de análisis troncales de Pinus durangensis Martínez y P. teocote Schl. et Cham. en Durango, México.

Aguilar (1994) determinó el comportamiento de los modelos Weibull, Schumacher, Gompertz y logístico con información de análisis troncales de Pinus douglasiana Martínez en Atenquique Jalisco, México. Concluyó que el modelo de Schumacher es el mejor modelo para calidad de estación; registró también un excelente ajuste en las primeras etapas y al final la tendencia del modelo es prolongarse.

Madrigal y Ramírez (1995) con el propósito de un mayor conocimiento y poder tomar decisiones adecuadas sobre la bondad de ajuste de los modelos Shumacher, Chapman_Richards y Weibull compararon estos modelos con información de análisis troncales de Pinus douglasiana Martínez y P. lawsonii Roezl en Uruapan, Michoacán, México. Los resultados indicaron el polimórfico de Schumacher proporcionó la mejor bondad de ajuste.

4.8 Función Weibull.

Las curvas de crecimiento e incremento típicas se parecen a una función de densidad de probabilidad (fdp) y a una función de distribución de probabilidad acumulativa (fda), respectivamente. Así como una función de distribución acumulativa es la integral de su función de densidad, la función de crecimiento de un organismo es el valor acumulativo de su crecimiento (Yang, Kozak y Smith, 1978).

Una función de distribución de probabilidad tiene valores entre 0 y 1, por lo que al agregar un factor de escala (multiplicador) a la función se puede describir el crecimiento verdadero de un organismo en los estudios de rendimiento y crecimiento. Comúnmente, el factor de escala es el valor superior asintótico que alcanza un organismo en la característica estudiada y determinado por la naturaleza genética y los factores ambientales que la naturaleza le imponen (Yang, Kozak y Smith, 1978).

Una función de densidad de probabilidad puede representar la frecuencia de árboles por clase de edad o tamaño de un cierto rodal, con lo que el problema se limita a estimar los parámetros de la fdp que caractericen adecuadamente dicha estructura (Castillo, 1988). A estas funciones se les conoce como modelos de predicción de incremento y producción que modelan las estructuras diamétricas de los rodales o modelos de distribución diamétrica

o sistemas de predicción implícita (Torres et al, 1991).

El conocimiento de la distribución de los árboles en las distintas clases de edad o tamaño de los rodales permite decidir sobre su manejo silvícola. Conocida tal distribución es posible responder interrogantes como ¿ Cuánto costará el realizar una corta?, ¿ Cuáles son las dimensiones requeridas para justificar dicha corta? y ¿ Cuánto volumen comercial y valor puede esperarse de una cosecha al momento de realizarla? (Rustagi, 1978; citado por Zepeda, 1990).

Existen varias funciones de densidad de probabilidad (fdp) para modelar la distribución diamétrica, sin embargo, las más populares son la Beta y la Weibull (Torres et al, 1991). Se ha recurrido más a la función Weibull por ser flexible y puede ser modificada rápidamente sin perder sus cualidades básicas haciéndose más eficiente en el proceso de estimación y de toma de decisiones; es un modelo con una amplia variedad de aplicaciones forestales (Burk y Newberry, 1984; citados por Castillo, 1988).

La idea básica del enfoque distribucional consiste en lo siguiente. Dada la posibilidad de representar la estructura diamétrica de los rodales que constituyen un bosque alto o bajo regular, con una distribución estadística, es posible "reproducir" aquélla a partir de ésta, conocido el número de árboles "**N**" y el vector de parámetros "**Q**" que caracterizan a ésta última en el caso particular deseado, es decir, la esencia de

éste enfoque estriba en conocer "N" y "Q" para el tiempo "t" de interés (Hyink, 1980; citado por Zepeda, 1990), en las calidades de sitio deseadas.

La fdp Weibull con dos parámetros, de una variable aleatoria "X", se puede representar con la siguiente notación (Dubey, 1967; citado por Castillo (1988):

$$f_x(x) = \left(\frac{c}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^c} ; x > 0 \quad (1)$$

$$f_x(x) = 0 \text{ de otra forma}$$

b y c son parámetros positivos

"c" es un parámetro de forma (si "c" es mayor que 1, curva unimodal y si "c" menor que 1, curva en forma de "j" invertida) y "b" el parámetro de escala; "X" es una variable aleatoria.

Se puede incluir un tercer parámetro, el de localización o posición, sustituyendo en la expresión anterior a "x" por "x-a", donde "a" en este caso puede ser interpretado como el diámetro más pequeño posible. Entonces, la fdp en (1) toma la forma:

$$f_x(x) = \left(\frac{c}{b}\right) \left[\frac{(x-a)}{b}\right]^{c-1} e^{-\left[\frac{(x-a)}{b}\right]^c}$$

$$a \leq x < \infty$$

$$= 0 \text{ de otra forma}$$

La función de distribución acumulada $F_X(x)$ de una variable aleatoria ' x ' que se distribuye como Weibull con parámetros ' a ', ' b ' y ' c ' está dada por:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}$$

Si se toma el diámetro como la variable aleatoria " X ", la fdp Weibull se puede integrar (mediante la técnica de cambio de variable), para encontrar la proporción de la masa que tiene un diámetro menor o igual al especificado por " x " (siendo " x " un valor particular que puede tomar la variable aleatoria " X ").

Para propósitos de estudios de rendimiento y crecimiento, se puede tomar la variable aleatoria X como una variable tiempo (edad) y F_X como crecimiento o rendimiento del sistema orgánico que aumenta con el aumento de X . Como F_X toma valores entre cero y uno, el crecimiento o el rendimiento del sistema orgánico en la escala real se obtiene al multiplicar por un factor A , obteniendo así el máximo tamaño del organismo, por ejemplo:

$$F_X(x) = A \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^c} \right]$$

La función Weibull es altamente flexible, es capaz de asumir virtualmente todo aumento monotónico de la forma del crecimiento sigmoideal que se encuentra en el universo biológico, es poseedor de algunas características que son de particular interés en la construcción teórica de modelos de crecimiento.

La función acumulativa Weibull puede escribirse así:

$$y=\beta_0[1-e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}]$$

Los modelos de distribución de diámetros reúnen dos características importantes:

1. La primera es proporcionar información sobre la distribución de sujetos en las diferentes clases de tamaño.
2. La segunda consiste en estimar pocas variables que describan los atributos globales del rodal, lo cual se traduce en sencillez y abatimiento de las exigencias de recursos computacionales del modelo.

Bailey y Dell [1973] (citados por Castillo, 1988 y Torres et al 1991), propusieron el uso de la fdp Weibull como modelo de distribución de diámetros, en base a las características que presenta, a saber:

1. Simple y de fácil manipulación matemática.
2. Flexibilidad (se tiene una amplia gama de formas continuas que van desde la "J" invertida, a la forma de "montículo" o "campana", con diversos grados de asimetría, positiva o negativa, dependiendo del valor

que tome su parámetro de forma.

3. Analíticamente se puede integrar, dando como resultado una función de distribución acumulativa (fda), como sigue:

$$F_X(x) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\right]}$$

$$(a \leq x < \infty)$$

= 0, de otra forma

4. Los distintos procedimientos para estimar sus parámetros permiten una selección apropiada de acuerdo a la capacidad de equipo de cómputo con que se cuenta.

Shapiro y Gross (1981) señalaron que el modelo Weibull se ha aplicado extensamente en los años recientes debido a que

1. para muchas situaciones en los cuales los datos de que no pueden ser ajustados por un modelo exponencial, el modelo Weibull puede usarse.
2. el modelo Weibull es uno de los modelos paramétricos más comúnmente usado en análisis de datos. Entonces, la literatura concerniente al tema es desarrollada rápidamente y no es difícil encontrarla.

3. las inferencias relacionadas a dos parámetros desconocidos es más difícil hacerlas con el modelo exponencial que con la Weibull, que ha sido tratada desde hace más de dos décadas.

Se han desarrollado diferentes métodos para estimar los parámetros de la fdp Weibull, donde los estimadores de máxima verosimilitud se consideran generalmente como los mejores, aunque para su ajuste se requieren procesos iterativos laboriosos (Bailey y Dell, 1973; citados por Castillo, 1988).

Los primeros trabajos encaminados a la construcción de modelos de distribución de diámetros fueron realizados por el francés Liocourt en 1898 quién se basó en una progresión geométrica para describir la estructura de rodales incoetáneos (Bailey y Dell, 1973; citados por Castillo, 1988).

Con respecto al enfoque distribucional, se registra que la función Weibull fue desarrollada en 1951 por el autor del mismo nombre y esta ha sido aplicada en estudios de probabilidad en resistencia de materiales. Esta función de probabilidad puede ser fácilmente modificada para formular una función de crecimiento que genere una amplia variedad de curvas de crecimiento sigmoidales; en la silvicultura, son limitados los estudios, generalmente se han hecho para modelar la distribución diamétrica de rodales (Bailey, 1974; Schreuder y Swank, 1974; citados por Yang, Kozak y Smith, 1978).

La función Weibull es superior a otras funciones para describir y predecir la estructura de un rodal coetáneo (Rustagi, 1978; citado por Quispe, 1989); es excelente para cuantificar la distribución del área basal por clase diamétrica, tanto en rodales coetáneos como incoetáneos (Bailey y Dell, 1973; citados por Quispe, 1989).

Los modelos contruidos bajo el enfoque distribucional no son suficientemente flexibles para evaluar rangos amplios de tratamientos silvícolas sobre un rodal (Burkhart, 1981; 1982; citado por Zepeda, 1990), porque la presencia de estructuras defectuosas y alta proporción de mezcla de especies dificulta el modelaje con este enfoque y, sobre todo, porque se considera que muchas de las interacciones biológicas presentes en las comunidades vegetales forestales pueden ser modeladas mejor con modelos de árbol individual (Zepeda, 1990).

La metodología para cuantificar el crecimiento y rendimiento en base a distribuciones diamétricas es una de las técnicas que más se utiliza en el caso de las plantaciones forestales (Bennett y Clutter, 1968; Burkhart y Strub, 1974; Alder, 1977; citados por Zepeda, 1990 y por Montero, 1992).

Para las masas naturales de pino parece ser que los modelos de árboles individuales serían los apropiados, y para plantaciones quizás los modelos que utilizan funciones de distribución de clases de diámetro serían los más útiles (Clutter

y Allison, 1974; Alder, 1977; citados por Adlard, 1983).

El enfoque distribucional debería prepararse más para masas coetáneas, puras, de turnos cortos y, de preferencia, sin cortas intermedias, es decir, para plantaciones de rápido crecimiento con fines industriales (Zepeda, 1992).

Aguirre (1989) con una ligera modificación de la función de Weibull desarrolló curvas polimórficas de índice de sitio. Indica Aguirre que la estimación del parámetro extra de la función Weibull podría producir curvas anamórficas de índice de sitio más exactas y precisas que la ecuación de Chapman-Richards; en un proceso de validación se registró que el modelo de Richards y la Weibull tuvieron la misma dirección de sesgo, pero el nivel de sesgo fue ligeramente más bajo para la función Weibull. Finalmente señala que la función Weibull tiene propiedades flexibles que podrían ser útiles para dar seguimiento al polimorfismo del crecimiento en altura a través del índice de sitio.

Aguilar (1994) al determinar el comportamiento de los modelos Weibull, Schumacher, Gompertz y logístico con información de análisis troncales de Pinus douglasiana Martínez en Atenquique Jalisco, México, encontró que el modelo de Schumacher es el mejor para calidad de estación superando a los demás modelos incluyendo a la función Weibull.

Madrigal y Ramírez (1995) con propósitos similares a los de Aguilar (1994) pero con procedimientos diferentes, compararon los modelos Schumacher, Chapman_Richards y Weibull; emplearon información de análisis troncales de Pinus douglasiana Martínez y P. lawsonii Roetzl en Uruapan, Michoacán, México. Los resultados no indicaron ventaja de la función Weibull sobre los demás modelos.

Zeide (1993) señaló que Yang, Kozak y Smith en 1978 reportaron que esta ecuación es más exacta que las ecuaciones de Gompertz y Bertalanffy. No se comparó en su trabajo con la ecuación de Chapman-Richards. Cuando Dolph en 1991 lo hizo en el proceso de construcción de curvas de índice de sitio para abeto rojo, encontró que la ecuación de Weibull fué más exacta que la ecuación de Chapman-Richards. Distinto a otras funciones, la ecuación de Weibull presenta el aumento del crecimiento como una función potencia de la edad. Este ocupa el cuarto lugar en la categoría de Kiviste de 1988 de las ecuaciones de tres parámetros y es particularmente bueno para el modelado del crecimiento en diámetro de rodales. Zeide en 1989 encontró que la ecuación de Weibull es menos exacta que las ecuaciones de Korf y Chapman-Richards.

4.9 Modelo de Levakovic I.

Este modelo presentado en 1935 es una modificación del modelo de Hossfeld IV propuesto en 1822. Otros modelos como Levakovic III y Yoshida I también son modificaciones del modelo de Hossfeld IV (Peschel, 1938; citado por Zeide, 1993).

El modelo de Hossfeld IV es:

$$y = \frac{t^{\beta_2}}{\left[\beta_1 + \frac{t^{\beta_2}}{\beta_0} \right]}$$

El modelo de Levakovic I es:

$$y = \beta_0 \left[\frac{t^{\beta_3}}{\beta_1 + t^{\beta_3}} \right]^{\beta_2}$$

El modelo de Levakovic III es:

$$y = \beta_0 \left[\frac{t^2}{(\beta_1 + t^2)} \right]^{\beta_2}$$

El modelo de Yoshida I es:

$$y = \frac{\beta_0 t^{\beta_3}}{(\beta_1 + t^{\beta_3})} + \beta_2$$

En 1822 se propuso el modelo de Hossfeld IV para la descripción del crecimiento de árboles (Peschel, 1938; citado por Zeide, 1993). A pesar de su antigüedad, este modelo expresa extraordinariamente bien; fué el tercero más preciso de 31 ecuaciones de tres parámetros cuando las tres principales variables del rodal (altura total del árbol, diámetro y volumen) fueron consideradas al mismo tiempo (Zeide, 1993). Kiviste la estableció en 1988 para ser el mejor modelo para el crecimiento en volumen. El modelo de Hossfeld IV es casi tan precisa como la ecuación de Chapman-Richards, la cual domina en los estudios de crecimiento en los Estados Unidos de América (Zeide, 1993).

Los modelos Levakovic I y III fueron publicados en Serbia hace apenas una mitad de siglo y son poco conocidos en otros países. Como se puede notar, la diferencia entre estos dos modelos es que un parámetro de Levakovic III toma el valor de dos, haciendo con esto que se reduzcan de cuatro a solo tres parámetros. El modelo de Levakovic I es uno de los mejores de cuatro parámetros (Zeide, 1993).

4.10 Modelo de Korf.

El modelo de Korf fué propuesto en 1939 en Checoslovaquia (Keviste, 1988; citado por Zeide, 1993) y ha sido redescubierto varias veces, en particular por Lundquist en 1957 (Zeide, 1993). Zeide, 1972; 1975; y Zeide et al., 1972; citados por Zeide (1993), establecieron que la tasa relativa de crecimiento del diámetro es una potencia, más bien que una función exponencial de la edad y por integración se llegó a la ecuación de Korf (Zeide, 1993).

El modelo de Korf es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 t - \beta_2 t^2}$$

Señaló Zeide (1993) que Lundquist y otros investigadores subsecuentes como Stage en 1963 y Brewer et al. en 1985, aplicaron este modelo al crecimiento en altura de rodales con éxitos regulares. Zarnovican en 1979, también usó la ecuación de Korf en un estudio del crecimiento en altura; fué mejor enterado en la literatura y citó tres artículos de Korf, incluyendo el artículo original de 1939.

Este modelo es ideal especialmente para la descripción del crecimiento en diámetro de un determinado número de árboles; mediante análisis troncales y usando el crecimiento promedio de miles de fustes de diferentes especies de lugares distintos, se

conoció que la ecuación de Korf es sustancialmente más exacto que otras ecuaciones de crecimiento; su error estándar estimado fué de 2.1, 2.3, 3.4 y 4.8 veces menor que el error de las ecuaciones de Chapman_Richards, Weibull, Gompertz y Logística, respectivamente (Zeide, 1993).

Una forma especial del modelo de Korf fué propuesta independientemente por Terazaki en 1915 (Peschel, 1938; Johnson, 1935; y Schumacher, 1939; citados por Zeide, 1993); esta forma consiste en que un parámetro al tomar el valor de uno, el modelo de Korf se convierte en el modelo de Schumacher.

Es decir, si el modelo de Korf es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 t^{-\beta_2}}$$

Pero si:

$$\beta_2 = 1$$

Entonces:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 t^{-1}}$$

que es el modelo de Schumacher.

4.11 Modelo de Sloboda.

El modelo de Sloboda presentado en 1971, difiere del modelo de Gompertz por un parámetro adicional en el primero.

El modelo de Gompertz es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$$

El modelo de Sloboda es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}}$$

La presencia del parámetro adicional probablemente es responsable para la mayor precisión de la ecuación de Sloboda. De acuerdo a Kiviste (1988) citado por Zeide (1993), esta es la segunda mejor ecuación de cuatro parámetros.

Se puede notar que una forma especial del modelo de Sloboda conduce al modelo de Gompertz.

Es decir, si el modelo de Sloboda es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}}$$

Pero si:

$$\beta_3=1$$

Entonces:

$$y=\beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$$

que es el modelo de Gompertz.

Cuadro 2. Modelos de crecimiento y componentes de sustracción y división.

Modelo	Forma integral	Componentes de sustracción		Componentes de división	
		Expansión	Declinación	Expansión	Declinación
V. Bertalanffy	$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^3$	$3\beta_0^{\frac{1}{3}} \beta_1 y^{\frac{2}{3}}$	$3\beta_1 y$	$3\beta_0^{\frac{1}{3}} \beta_1 y^{\frac{2}{3}}$	$e^{\beta_1 t}$
Chapman-Richards	$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2}$	$\beta_0^{\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2 y^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}}$	$\beta_1 \beta_2 y$	$\beta_0^{\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2 y^{\frac{(\beta_2-1)}{\beta_2}}$	$e^{\beta_1 t}$
Monomolecular	$y = \beta_0 (1 - \beta_2 e^{-\beta_1 t})$	$\beta_0 \beta_1$	$\beta_1 y$	$\beta_0 \beta_1 \beta_2$	$e^{\beta_1 t}$
Logístico	$y = \frac{\beta_0}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})}$	$\beta_1 y$	$\frac{\beta_1}{\beta_0} y^2$	$\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_0} y^2$	$e^{\beta_1 t}$
Gompertz	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$	$\beta_2 \ln(\beta_0) y$	$\beta_2 y \ln(y)$	$\beta_1 \beta_2 y$	$e^{\beta_2 t}$
Weibull	$y = \beta_0 [1 - e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}]$	$\beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2-1}$	$\beta_1 \beta_2 y t^{\beta_2-1}$	$\beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2-1}$	$e^{\beta_1 t^{\beta_2}}$
Levakovic I	$y = \beta_0 \left[\frac{t^{\beta_3}}{\beta_1 + t^{\beta_3}} \right]^{\beta_2}$	$\frac{\beta_2 \beta_3 y}{t}$	$\frac{\beta_0^{-\frac{1}{\beta_2}} \beta_2 \beta_3 y^{\frac{\beta_2+1}{\beta_2}}}{t}$	$\beta_0^{-\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2 \beta_3 y^{\frac{\beta_2+1}{\beta_2}}$	t^{β_3+1}
Korf	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}$	$\frac{\beta_2 \ln(\beta_0) y}{t}$	$\frac{\beta_2 y \ln(y)}{t}$	$\beta_1 \beta_2 y$	t^{β_2+1}
Sloboda	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}}$	$\beta_2 \beta_3 t^{\beta_3-1} \ln(\beta_0) y$	$\beta_2 \beta_3 t^{\beta_3-1} y \ln(y)$	$\beta_3 > 1; \beta_1 \beta_2 \beta_3 y t^{\beta_3-1}$	$e^{\beta_2 t^{\beta_3}}$
				$0 < \beta_3 < 1; \beta_1 \beta_2 \beta_3 y$	$t^{1-\beta_3} e^{\beta_2 t^{\beta_3}}$

Cuadro 3. Modelos de crecimiento y puntos de culminación de los incrementos corriente y medio.

Modelo	Forma integral	Forma diferencial	$t_{I.C.}$	$t_{I.M.}$
Von Bertalanffy	$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^3$	$y' = \frac{3\beta_1}{(e^{-\beta_1} - 1)} y$	$\frac{\ln(3)}{\beta_1}$	$t_{IM} > t_{IC}$ Tal que $\frac{e^{\beta_1 t_{IM}}}{\beta_1 t_{IM}} = 3$
Chapman-Richards	$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2}$	$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 - e^{-\beta_1 t})} y$	$\frac{\ln(\beta_2)}{\beta_1}$	$\frac{e^{\beta_1 t_{IM}}}{\beta_1 t_{IM}} = \beta_2$; $t_{IM} > t_{IC}$
Monomolecular	$y = \beta_0 (1 - \beta_2 e^{-\beta_1 t})$	$y' = \beta_2 (\beta_0 - y)$	0	0
Logístico	$y = \frac{\beta_0}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})}$	$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{\beta_0} y^2$	$\frac{\ln(\beta_2)}{\beta_1}$	$t_{IM} > t_{IC}$ Tal que $e^{(\beta_1 t_{IM})} = t_{IM} \beta_1 \beta_2 + \beta_2$ $\beta_2 \geq e^2$
Gompertz	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$	$y' = \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2 t} y$	$\frac{\ln(\beta_1)}{\beta_2}$	$t_{IM} > t_{IC}$ Tal que $\exp(\beta_2 t_{IM}) = \beta_1 \beta_2 t_{IM}$ $\beta_1 \geq e$
Schumacher	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 (\frac{1}{t})}$	$y' = \frac{\beta_1}{t^2} y$	$\frac{\beta_1}{2}$	β_1
Weibull	$y = \beta_0 [1 - e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}]$	$y' = \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2 - 1} (\beta_0 - y)$	$\left[\frac{\beta_2 - 1}{\beta_1 \beta_2} \right]^{\frac{1}{\beta_2}}$	$t_{IM} > t_{IC}$ Tal que $e^{(\beta_1 t_{IM})} = 1 + \beta_1 \beta_2 t_{IM}^{\beta_2}$
Levakovic I	$y = \beta_0 \left[\frac{t^{\beta_3}}{\beta_1 + t^{\beta_3}} \right]^{\beta_2}$	$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{t (\beta_1 + t^{\beta_3})} y$	$\left[\frac{\beta_1 (\beta_2 \beta_3 - 1)}{(\beta_3 + 1)} \right]^{\frac{1}{\beta_3}}$	$(\beta_3 + 1)^{\frac{1}{\beta_3}} t_{IC}$ $\beta_2 \beta_3 > 1$
Korf	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 t^{-\beta_2}}$	$y' = \beta_1 \beta_2 t^{-(\beta_2 + 1)} y$	$\left[\frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_2 + 1)} \right]^{\frac{1}{\beta_2}}$	$(\beta_2 + 1)^{\frac{1}{\beta_2}} t_{IC}$
Sloboda	$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}}$	$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 t^{\beta_3}}{t e^{\beta_2 t^{\beta_3}}} y$		$\frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 t^{\beta_3}}{e^{\beta_2 t^{\beta_3}}} = 1$

t_{IC} : Punto de culminación del Incremento Corriente
 t_{IM} : Punto de culminación del Incremento Medio

5. CONCLUSIONES.

Las conclusiones que se presentan son producto de la revisión bibliográfica y del análisis del mismo.

1. Las leyes o postulados del crecimiento son con frecuencia formulados en pares que reflejan tanto los componentes multiplicativos como limitantes.

2. El crecimiento de las plantas resulta de la interacción de dos fuerzas opuestas, generalmente conocidas como los procesos anabólicos y catabólicos, respectivamente. El componente positivo, el más extenso manifestado en la expansión de un organismo, representa la innata tendencia hacia una multiplicación exponencial; está asociado con el potencial biótico, actividad fotosintética y absorción de nutrientes. El componente opuesto representa las restricciones impuestas por la competencia, escasez de recursos, respiración, stress, reproducción, enfermedades, plagas, disturbios, etc; éste afecta adversamente al crecimiento.

3. La hipótesis sobre el crecimiento de Von Bertalanffy respecto a que los procesos anabólicos son proporcionales a su superficie y los procesos catabólicos son proporcionales a su volumen queda demostrada con los organismos hipotéticos del cubo y del cono.

4. Las curvas de crecimiento pueden representar, entre otros, hábitos de crecimiento de especies, hábitos de crecimiento de genotipos de una especie o manifestación de un genotipo bajo diferentes clases de tratamiento silvícola.

5. Las funciones de crecimiento son comúnmente formuladas en términos de tasas de crecimiento, es decir, el comportamiento de la tasa de crecimiento en el tiempo; aunque a menudo se formula en términos de tasas relativas de crecimiento, es decir, una consideración entre la tasa de crecimiento y el tamaño.

6. En la mayoría de los casos, las ecuaciones de crecimiento se presentan en su forma integral, las cuales describen el tamaño acumulado de un organismo.

7. La compatibilidad de las ecuaciones, es decir, cuando la integral de una ecuación de incremento es la ecuación de crecimiento, y la derivada de la ecuación de crecimiento es la de incremento, permite prescindir de una precisión engañosa indicado en las ecuaciones de crecimiento, conocer acerca de la variabilidad real de los procesos de crecimiento, los componentes básicos de este y las expresiones analíticas apropiadas, y en sí una mayor comprensión del crecimiento.

8. En el proceso de construcción de modelos se deben contemplar por lo menos las etapas siguientes: definición del problema, construcción, validación y utilización del modelo.

9. Los modelos se clasifican por su función, tema, propósito, dimensionalidad o grado de abstracción.

10. Los modelos por su tipo son icónicos, analógicos y simbólicos. Los modelos simbólicos consideran el uso de símbolos; ejemplos: fórmulas químicas, ecuaciones matemáticas y notas musicales; en la ciencia del manejo forestal los modelos matemáticos son los más usuales.

11. La principal dificultad en los intentos que se han realizado para clasificar a los modelos ha sido la enorme versatilidad de la técnica de modelado, tanto en elementos matemáticos de construcción como en estructura interna, complejidad, realismo y características de uso de los modelos.

12. Los modelos analíticos constituyen las herramientas analíticas más utilizadas en la actualidad para la generación de conocimientos en el área del crecimiento y producción de masas forestales, ya que de esta forma, a través de fórmulas matemáticas que deben considerar un determinado horizonte de planeación en el que ocurren regularmente procesos aleatorios, se representan los procesos biológicos que ocurren a nivel de árbol individual o de rodal completo.

13. Se ha iniciado desde hace poco más de dos décadas el trabajo de formación de funciones de producción múltiple, las cuales, además de evaluar el rendimiento maderable de las labores

silvícolas aplicadas sobre una cierta condición de bosque, hacen estimaciones de rendimiento de forraje y otros productos no maderables, así como del impacto ecológico de la actividad (sobre la fauna, el agua y el paisaje principalmente).

14. Las funciones alométricas asumen que la tasa de crecimiento relativo de ' Y ' es igual a la tasa de crecimiento relativo de ' x '; muestran la dependencia entre el crecimiento de una característica de ' Y ' (por decir, volumen) y el crecimiento de otra característica ' x ' (por ejemplo, la variable combinada HD^2).

15. El modelo de Von Bertalanffy derivada de estudios de relaciones alométricas en organismos; supone que en individuos normales la tasa relativa de crecimiento de ' Y ' sostiene una relación constante proporcional a la tasa relativa de crecimiento de ' x '; considera un parámetro ' a ' como la constante alométrica, la cual, caracteriza el tipo particular de organismo y medio ambiente.

16. Richards en 1959 y Chapman en 1961 al realizar estudios en plantas y peces, respectivamente, registraron que la constante alométrica de $2/3$ que estableció Von Bertalanffy en 1951 fué bastante restringida para aplicarse a varias formas de vida. Ambos autores sugirieron que la constante alométrica sea de un valor indefinido y propusieron un modelo generalizado.

17. La ventaja de la ecuación de Chapman-Richards con respecto a Von Bertalanffy es su flexibilidad. Esta ecuación es valorada por su exactitud y es usada más que cualquier otra función en estudios de crecimiento de árboles y rodales. La ecuación de Chapman-Richards fué derivada de la ecuación de Von Bertalanffy "cuando las limitaciones impuestas por su origen teórico son descartadas".

18. La flexibilidad de un modelo depende del número de parámetros de la ecuación. No hay razón entonces, para suponer que la ecuación de Chapman_Richards podría ser más flexible que cualquier otra ecuación con tres parámetros, aunque sí, más apropiado.

19. Para ciertos valores del parámetro del valor alométrico del modelo generalizado de Von Bertalanffy, asume la forma de los modelos monomolecular, logístico y Gompertz.

20. El modelo monomolecular supone que la tasa de crecimiento en un tiempo ' t ' es directamente proporcional a la cantidad potencial de crecimiento (diferencia entre el crecimiento máximo posible y el crecimiento actual); este no tiene punto de inflexión, esto es, no hay cambio en signo de la segunda derivada $[d^2Y/dt^2]$ para cualquier t , y la variable sube a velocidad constante a una tasa decreciente (la tasa de crecimiento declina linealmente respecto al incremento en el tamaño del organismo). El modelo monomolecular, al no declinar,

presenta más bien una descripción no objetiva del crecimiento.

21. El modelo logístico o autocatalítico supone que la tasa de cambio de la variable dependiente es proporcional al valor de ésta multiplicado por una función lineal decreciente de ella misma; otra forma de conceptualizar el modelo es, que la tasa de crecimiento es proporcional al producto entre la dimensión actual y el crecimiento futuro o también que la tasa relativa de crecimiento a la dimensión presente declina linealmente con el incremento del tamaño.

22. El punto de inflexión de la ecuación logística corresponde a un medio del tamaño final.

23. El modelo de Gompertz propuesto en 1825 asume que la función que limita la tendencia al crecimiento exponencial es una función logarítmica e inversa de la variable dependiente; esta fue diseñada para describir la distribución de edad en poblaciones humanas y un siglo más tarde fué aplicada como un modelo de crecimiento, sin embargo, su uso ha sido más para estudios de población y crecimiento animal que para aplicaciones botánicas.

24. El punto de inflexión de la ecuación de Gompertz ocurre en el punto 0.368 del tamaño máximo.

25. El principal supuesto del modelo de Schumacher es que el crecimiento porcentual varía inversamente con la edad, es decir, a medida que aumenta la edad disminuye la tasa de crecimiento.

26. El punto de inflexión del modelo de Schumacher se presenta cuando el incremento corriente alcanza su máximo, exactamente a la mitad del máximo incremento medio.

27. Una distribución de probabilidad tiene valores entre 0 y 1, por lo que al agregar un factor de escala (multiplicador) a la función se puede describir el crecimiento verdadero de un organismo en los estudios de rendimiento y crecimiento. Comúnmente, el factor de escala es el valor superior asintótico que alcanza un organismo en la característica estudiada y determinado por la naturaleza genética y los factores ambientales que la naturaleza le imponen.

28. La función Weibull es altamente flexible, es capaz de asumir virtualmente todo aumento monotónico de la forma del crecimiento sigmoideal que se encuentra en el universo biológico, es poseedor de algunas características que son de particular interés en la construcción teórica de modelos de crecimiento.

29. Para muchas situaciones en las cuales los datos que no pueden ser ajustados por un modelo exponencial, el modelo Weibull puede usarse; las inferencias relacionadas a dos parámetros desconocidos es más difícil hacerlas con el modelo exponencial

que con la Weibull, que ha sido tratada desde hace más de dos décadas.

30. El modelo de Levakovic I propuesta en 1935 al igual que los modelos de Levakovic III y Yoshida I son modificaciones del modelo de Hossfeld IV. El modelo de Levakovic I es uno de los mejores de cuatro parámetros.

31. Al establecer que la tasa relativa de crecimiento del diámetro es una potencia, más que una función exponencial de la edad y al integrar la ecuación se llega a la ecuación de crecimiento de Korf. Este modelo es ideal especialmente para la descripción del crecimiento en diámetro de un determinado número de árboles.

32. Una forma especial del modelo de Korf fué propuesta independientemente por Terazaki en 1915; esta forma consiste en que un parámetro al tomar el valor de uno, el modelo de Korf se convierte en el modelo de Schumacher.

33. El modelo de Sloboda propuesta en 1971 difiere del modelo de Gompertz por un parámetro adicional en el primero. La presencia del parámetro adicional probablemente es responsable para la mayor precisión de la ecuación de Sloboda; es la segunda mejor ecuación de cuatro parámetros.

34. La característica en común de los modelos de crecimiento analizados es que la expansión del crecimiento es proporcional al tamaño actual del organismo, es decir, que la tasa relativa de crecimiento es siempre decreciente, corroborándose así la Ley de Minot.

35. El más significativo logro en materia de funciones de producción ha sido la creación de un cuerpo de teoría sobre silvicultura cuantitativa y apoyo en la capacidad explicativa de los procesos de producción forestal.

36. En la aplicación de los modelos matemáticos se deben considerar los supuestos que les dieron origen, así como de sus propiedades, ya que estos les confieren rangos de validación restringidos; un solo modelo no podría ajustar todos los procesos de crecimiento.

6. BIBLIOGRAFIA CITADA.

- ACOSTA M., M. 1991. Modelo de crecimiento para Pinus montezumae Lamb. en el CEF San Juan Tetla, Puebla. Tesis de M.C. División de Ciencias Forestales, UACH, Chapingo, México. 8p.
- ADLARD P., G. 1983. Clases de modelos de crecimiento de masas forestales y tipos de variables necesarias para su calibración. In Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No.44. pp. 47-53.
- AGUILAR R., M. 1983. La ecuación de Schumacher y su aplicación en estudios del crecimiento y clave de sitio. Premio Nacional de Administración Pública 1982. CIFO-INIF. México. 69 p.
- AGUILAR R., M. 1994. Comparación de cuatro Modelos matemáticos aplicados al crecimiento forestal. Ciencia Forestal (México). 16(70):87-108.
- AGUIRRE B., C. 1984. Preliminary growth and yield study of Pinus patula natural stands. M.S. Thesis. Colorado State Univ. For. and Wood Science Dept. 98 p.
- AGUIRRE C., O.A. 1984. Estimación de índice de sitio para Pinus pseudostrobus Lindl. en la región de Iturbide, Nuevo León. Tesis Ing. Agr. esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo. Departamento de Enseñanza, Investigación y Servicio en Bosques. Chapingo, Méx. 71 p.
- ALDER, D.E. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento; con referencia especial a los trópicos. Vol. 2. Estudio FAO, Montes 22/2. Roma. 118 p. + Apéndices.
- AMO R., S. Del y J. NIETO De P. 1983. Aplicación de ecuaciones y modelos matemáticos en la evaluación de las tasas de crecimiento y determinación de la edad en árboles tropicales. In Bormann, H.F. y G.Berlyn eds. Edad y tasa de crecimiento de los árboles tropicales; nuevos enfoques para la investigación. Traducido por C.A. De La Parra. CECSA. México, D.F. pp. 133-138.
- ARTEAGA M., B. 1985. Índice de sitio para Pinus patula Schl. & Cham., en la región de Chignahuapan-Zacatlán, Puebla. Tesis de M.C. Colegio de Postgraduados, Chapingo, Méx. 181 p.
- AVERY, T.E. 1975. Natural resources measurements. 2nd ed. McGraw-Hill. New York. 339 p.
- AVERY, T.E. and H.E. BURKHART. 1983. Forest Measurements. 3rd. Ed. New York. McGraw-Hill. 331 p.

- BAN, I. 1988. Biomathematics and its applications in plant cultivation. Elsevier Science Publishing Company. New York. p.
- BENAVIDES S., J. De D. 1987. Estimación de la calidad de sitio mediante índices de sitio de Pinus michoacana cornuta y Pinus oocarpa Schiede, para el A.D.F. Tapalpa, Estado de Jalisco. Tesis Ing. Agr. esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Chapingo, México. 80 p.
- BOJORGES S., J.A. 1990. Índice de sitio para oyamel (Abies religiosa H.B.K. Schl. et Cham) en Zoquiapan, México. Tesis Ing. Agr. esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Chapingo, Méx. 57 p.
- BRUCE, D. and F.X. SCHUMACHER. 1950. Forest Mensuration. 3rd ed. McGraw-Hill. USA. 483 p.
- CANO C., J. 1988. El sistema de manejo regular en los bosques de México; fundamentos de silvicultura y su aplicación práctica. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Chapingo, Méx. 221 p.
- CASTILLO S., M.A. 1988. Modelo para estimación de incremento y producción maderable neta en Pinus caribea var. hondurensis Barr. y Golf. de la Sabana, Oax. Tesis Ing. Ftal. Universidad Autónoma Chapingo División de Ciencias Forestales, Chapingo, Méx. 81 p.
- CLUTTER, J.L, J.C. FORSTON, L.V. PIENAAR, G.H. BRISTER and R.L. BAILEY. 1983. Timber Management: A cuantitative approach. Wiley. New York. 333 p.
- CUEVAS G., X., C. PARRAGUIRRE L. y B. RODRIGUEZ S. 1994. Modelos de crecimiento para una plantación de caoba (Swietenia macrophylla King). Ciencia Forestal (México) 17(71):87-102.
- DANIEL, T.W., J.A. HELMES and F.S. BAKER. 1982. Principios de Silvicultura. Trad. por Ramón Elizondo Mata. Ed. McGraw-Hill. México,D.F. 492 p.
- DAVIS, K.P. 1966. Forest Management: Regulation and valuation. McGraw-Hill. 2nd ed. USA. 519 p.
- DRAPER, M.R. and H. SMITH. 1980. Applied regression analysis. 2nd. Ed. New York. Wiley. 709 p.
- DYKSTRA, D.P. 1984. Mathematical programming for natural resource management. McGraw-Hill. New York. 318 p.
- DYM, C.L and E.S. IVEY. 1980. Principles of Mathematical Modeling. Academic Press. New York. 260 p.

- EDWARDS, D. and M. HAMSON. 1992. Guide to Mathematical Modelling. CRC Press. Florida. 277 p.
- FIERROS G., A.M. 1989. Site quality, growth and yield, and growing space occupancy by plantations of Pinus caribaea var. hondurensis in Oaxaca, México. Ph.D. Diessertation. Yale University Graduate School. 213 p.
- FRANCE, J. and H.M. THORNLEY J. 1984. Mathematical models in agriculture. Butterworth. London. 335 P.
- FRANCO B., M.G. 1970. Simulación demográfica y productiva de poblaciones uniespecíficas de árboles. Tesis Biol. Instituto de Biología. UNAM.
- FRANCO B., M.G. 1983. Problemas y métodos en el estudio del crecimiento de árboles. In Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No.44. pp. 55-71.
- GODRON, M. 1994. Algunas reflexiones sobre modelos ecológicos aplicables al manejo del territorio. Trad. por Nieto De P.C. Ciencia Forestal (México). 19(76): 133-139.
- HERNÁNDEZ R., P. De La, M.A. MENDOZA B. y C. RODRÍGUEZ F. 1993. Modelos de incremento en altura para coníferas de Atenquique, Jal., México. Agrociencia Serie Recursos Naturales Renovables (México). 3(1):27-45.
- HUGHELL, D.A. 1991. Lineamientos para el desarrollo de modelos para la predicción del crecimiento y rendimiento de árboles de uso múltiple. Centro Agronómico Tropical de Investigación y Enseñanza (CATIE). Turrialba, Costa Rica. Inédito 146 p. +Anexos.
- HUNT, R. 1990. Basic growth analysis. Unwin Hyman Ltd. London. 112 p.
- ISLAS G., F. y M.A. MENDOZA B. 1992. Arizonica, Modelo de Simulación silvícola para Pinus arizonica Engelm. Agrociencia Serie Recursos Naturales Renovables (México) 2(2):77-91.
- KLEPAC, D. 1983. Crecimiento e incremento de árboles y masas forestales. 2ª ed. Universidad Autónoma Chapingo, Departamento de Enseñanza, Investigación y Servicio en Bosques. Chapingo, Méx. 365 p.
- LANDEROS S., S. 1994. Indices de Sitio para Pinus durangensis y Pinus teocote, en el area de influencia de la Unidad de Administración Forestal "Santiago Papasquiaro" S.C. Tesis Ing. Ftal. Universidad Autónoma Chapingos, División de Ciencias Forestales, Chapingo, México. 46 p.

- LEITHOLD, L. 1992. El cálculo con geometría analítica. 6ª ed. Trad. por Antonio Eroles G. HARLA. México, D.F. pp. 716-718.
- LOPEZ T., J.L. y F. J. ZAMUDIO S. 1995. Comportamiento de la relación superficie mínima-superficie real de la copa, en árboles de vegetación secundaria. Revista Chapingo. Universidad Autónoma Chapingo. Chapingo, Méx. Inédito.
- MADRIGAL H., S. y H. RAMIREZ, M. 1995. Comparación de nueve modelos empíricos para la determinación de índice de sitio en Michoacán. Ciencia Forestal (México) 20(78):35-57.
- MAKI, D.P. and M. THOMPSON. 1973. Mathematical Models and Applications; with emphasis on the social, life, and management sciences. Prentice-Hall. New Jersey. 485p.
- MARTINEZ G., A. 1982. Métodos econométricos. 2ª ed. CEC. Colegio de Postgraduados. pp. 49-50.
- MENDEZ R., I. 1976. Introducción a la metodología estadística. Universidad Autónoma Chapingo, Departamento de Fitotecnia. Chapingo, Méx. 126 p.
- MENDOZA B., M.A. 1983. Conceptos generales sobre modelaje matemático. In Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No.44. pp. 35-45.
- MENDOZA B., M.A. 1993. Conceptos básicos de manejo forestal. UTEHA. México, D.F. 161 p.
- MONTERO M., M. 1992. Modelo de crecimiento para Pinus caribea var. hondurensis Barr. y Golf. en la Sabana, Oaxaca, México. Tesis Ing. Ftal. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Chapingo, México. 95 p.
- ORANTES G., F.R. 1980. Determinación de la calidad de estación para Pinus hartwegii Lind. en Zoquiapan, México. Tesis Ing. Agr. esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, Departamento de Enseñanza, Investigación y Servicio en Bosques, Chapingo, México. 77 p.
- OSMASTON, F.C. 1968. The management of forests. George Allen and Unwin. Londres Inglaterra. 348 p.
- PEREZ V., G. 1990. Determinación de índices de sitio para Pinus arizonica Engelm. en la región Noroeste del estado de Durango. Tesis Ing. Agr. esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Chapingo, México. 96 p.

- PIENAAR, L.V. y TURNBULL, K. J. 1973. The Chapman-Richards Generalization of Von Bertalanffy's Growth Model for Basal Area Growth and Yield in Even-aged Stands. For. Sci. 19:2-22
- PRODAN, M. 1968. Forest biometrics. Trad. por S.H. Gardiner. Oxford, Pergamon. 447 p.
- QUISPE C., F. 1989. Simulación y análisis de regímenes silvícolas con criterio de eficiencia biológica y financiera. Tesis de M.C. Colegio de Postgraduados, Montecillos, México. 84 p. + apéndices
- RAMIREZ M., H. 1983. Diseño de muestreo para estudios de crecimiento con base en un inventario forestal continuo. In Primera Reunión sobre modelos de crecimiento de árboles y masas forestales. SARH-SF-INIF. Publicación especial No.44. pp. 137-139.
- RAMIREZ M., H. 1994. Construcción de modelos de crecimiento y su aplicación en el diseño de regímenes silvícolas. In Memoria Simposio de Manejo y Silvicultura. Colegio de Postgraduados. Montecillos, México. pp. 25-31.
- RICHARDS, F.J. 1959. A flexible growth function for empirical use. Journal of Experimental Botany 10: 290-300.
- RODRÍGUEZ F., C. 1982. Determinación de la calidad de estación de Pinus montezumae Lamb. a través de análisis troncal en el C.E.F. San Juan Tetla, Puebla. Tesis de M.C. Colegio de Postgraduados, Chapingo, México. 134 p.
- RODRIGUEZ F., C. 1987. Development of a competition index for Pinus montezumae Lamb. in a temperate forest of México. Yale Univ. School of For. Doctor of Forestry Diss. 200 p.
- SCHUMACHER, F.J. 1939. A new growth curve and its applications to timber yield studies. J. For. 37: 819-820
- SHAPIRO, S.S. and A.J. GROSS. 1981. Statistical modeling techniques. Marcel Dekker. New York. 367 p.
- SPURR, S.H. y V. BARNES B. 1982. Ecología Forestal. AGT. México, D.F. 690 p.
- TAHA, A.H. 1986. Investigación de Operaciones; una introducción. 2ª ed. INGRAMEX. México, D.F. 647 p.
- TORRES R., J.M. 1987. Economic analysis of several alternatives of forest management for Pinus hartwegii. Oregon State University. M.S: Thesis. 126 p.

- TORRES R., J.M. et al** 1991. Simulación de la producción y rendimiento de Pinus rudis en Aloapan, Oaxaca. In Cuarta Reunión Científica Forestal y Agropecuaria. Oaxaca, Oax., México. pp. 74-81.
- TORRES R., J.M., M. ACOSTA M. y O. MAGAÑA T.** 1992. Métodos para estimar los parámetros de la función Weibull y su potencial para ser predichos a través de atributos de rodal. Agrociencia Serie Recursos Naturales Renovables (México) 2(2): pp. 57-76.
- VELAZQUEZ P., J.** 1979. Análisis dasométrico de un bosque de coníferas, sometido a tratamiento silvícola de selección. Tesis Ing. Agr. esp. en Bosques. Universidad Autónoma Chapingo, Departamento de Enseñanza, Investigación y Servicio en Bosques, Chapingo, México. 144 p.
- YANG, R.C., A.KOZAK and J.H.G.SMITH.** 1978. The potential of Weibull type functions as flexible growth curves. Can. J. For. Res. 8:424-431.
- ZEIDE, B.** 1993. Analysis of Growth Equations. Forest Sci. 39(3): 594-616.
- ZEPEDA B., E.M.** 1990. Predictor de rendimientos maderables probables de Pinus patula Schiede y Deppe., de Perote, Ver. México. Tesis de M. C. Colegio de Postgraduados Montecillos, México. 331p.
- ZEPEDA B., E.M.** 1992. Modelos para estimar incremento y rendimiento maderable en México; Evolución, situación actual y perspectivas. In Arteaga, M.B., ed. Memoria Primer Foro Nacional sobre Manejo Integral Forestal. Universidad Autónoma Chapingo, Chapingo, Méx. pp. 418-446.

7. APENDICE.

La tasa de crecimiento en forma más general, pero basada en las fuerzas anabólica y catabólica, se puede explicar por la sustracción de estas dos componentes o por la división que ellas representan a través del tiempo.

A continuación se desarrollan los métodos de sustracción y división sugeridos por Zeide (1993) para los modelos de Von Bertalanffy, Chapman-Richards, monomolecular, logístico, Gompertz, Weibull, Levakovic I, Korf y Sloboda.

A. SUSTRACCION

Modelo de Von Bertalanffy

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^3 \quad (1)$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{3}} = (1 - e^{-\beta_1 t})$$

$$e^{-\beta_1 t} = 1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2)$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{3}} = (1 - e^{-\beta_1 t}) \quad (3)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned}
 y' &= 3\beta_0\beta_1 e^{-\beta_1 t} (1 - e^{-\beta_1 t})^2 \\
 &= 3\beta_1 e^{-\beta_1 t} \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^2 \frac{(1 - e^{-\beta_1 t})}{(1 - e^{-\beta_1 t})} \\
 &= \frac{3\beta_1 e^{-\beta_1 t}}{(1 - e^{-\beta_1 t})} \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^3 \\
 &= 3\beta_1 y \frac{e^{-\beta_1 t}}{(1 - e^{-\beta_1 t})} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en (4), se tiene:

$$\begin{aligned}
 y' &= 3\beta_1 y \left[\frac{1 - \left(\frac{y}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{y}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{3}}} \right] \\
 &= \frac{3\beta_1 y}{\left(\frac{y}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{3}}} - 3\beta_1 y \\
 &= \frac{3\beta_1 y}{\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\beta_0^{\frac{1}{3}}}} - 3\beta_1 y
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3\beta_1 y \beta_0^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} - 3\beta_1 y$$

$$= 3\beta_1 y^{\frac{2}{3}} \beta_0^{\frac{1}{3}} - 3\beta_1 y$$

$$y' = 3\beta_0^{\frac{1}{3}} \beta_1 y^{\frac{2}{3}} - 3\beta_1 y$$

Modelo de Chapman-Richards.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} = 1 - e^{-\beta_1 t}$$

$$e^{-\beta_1 t} = 1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}$$

$$\frac{e^{-\beta_1 t}}{1 - e^{-\beta_1 t}} = \frac{1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}}{\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}}$$

$$e^{-\beta_1 t} (1 - e^{-\beta_1 t})^{-1} = \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{-\frac{1}{\beta_2} - 1} \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= \beta_2 \beta_0 \beta_1 e^{-\beta_1 t} (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2 - 1} \\ &= \beta_2 \beta_1 e^{-\beta_1 t} \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2} (1 - e^{-\beta_1 t})^{-1} \\ &= \beta_2 \beta_1 e^{-\beta_1 t} y (1 - e^{-\beta_1 t})^{-1} \end{aligned}$$

$$y' = \beta_1 \beta_2 y e^{-\beta_1 t} (1 - e^{-\beta_1 t})^{-1} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$\begin{aligned}
 y' &= \beta_1 \beta_2 y \left[\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{-\frac{1}{\beta_2}} - 1 \right] \\
 &= \beta_1 \beta_2 y \left[\frac{(y)^{-\frac{1}{\beta_2}}}{(\beta_0)^{-\frac{1}{\beta_2}}} - 1 \right] \\
 &= \beta_1 \beta_2 y (y)^{-\frac{1}{\beta_2}} \beta_0^{\frac{1}{\beta_2}} - \beta_1 \beta_2 y \\
 y' &= \beta_0^{\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2 y^{\frac{(\beta_2-1)}{\beta_2}} - \beta_1 \beta_2 y
 \end{aligned}$$

Modelo Monomolecular.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 (1 - \beta_2 e^{-\beta_1 t}) \quad (1)$$

$$y = \beta_0 - \beta_0 \beta_2 e^{-\beta_1 t}$$

$$\beta_0 - y = \beta_0 \beta_2 e^{-\beta_1 t} \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}$$

$$y' = \beta_1 [\beta_0 \beta_2 e^{-\beta_1 t}] \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$y' = \beta_1 (\beta_0 - y)$$

$$y' = \beta_0 \beta_1 - \beta_1 y$$

Modelo Logístico.

La forma integral del modelo es:

$$y = \frac{\beta_0}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} \quad (1)$$

$$1 = \frac{\beta_0}{y(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})}$$

$$1 = \frac{\beta_0}{y + y\beta_2 e^{-\beta_1 t}}$$

$$y + y\beta_2 e^{-\beta_1 t} = \beta_0$$

$$y\beta_2 e^{-\beta_1 t} = \beta_0 - y$$

$$e^{-\beta_1 t} = \frac{\beta_0 - y}{\beta_2 y} \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t} (1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})^{-2}$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})^2}$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})}$$

$$= \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} y$$

$$= \left[\frac{\beta_0}{1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t}} \right] \left[\frac{1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{\beta_0} \right] \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} y$$

$$= \left[\frac{1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{\beta_0} \right] \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} y^2$$

$$= \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{\beta_0} y^2$$

$$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 y^2}{\beta_0} e^{-\beta_1 t} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 y^2}{\beta_0} \left[\frac{\beta_0 - y}{\beta_2 y} \right]$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2 y^2 - \beta_1 \beta_2 y^3}{\beta_0 \beta_2 y}$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2 y^2}{\beta_0 \beta_2 y} - \frac{\beta_1 \beta_2 y^3}{\beta_0 \beta_2 y}$$

$$y' = \beta_1 y - \frac{\beta_1 y^2}{\beta_0}$$

Modelo de Gompertz.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}} \quad (1)$$

$$\ln(y) = \ln(\beta_0) - \beta_1 e^{-\beta_2 t}$$

$$\ln(y) - \ln(\beta_0) = -\beta_1 e^{-\beta_2 t}$$

$$e^{-\beta_2 t} = \frac{\ln(\beta_0) - \ln(y)}{\beta_1} \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2 t} e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$$

$$= \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}} \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2 t}$$

$$y' = y \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2 t} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$y' = \beta_1 \beta_2 y \left[\frac{\ln(\beta_0) - \ln(y)}{\beta_1} \right]$$

$$y' = \beta_2 \ln(\beta_0) y - \beta_2 y \ln(y)$$

Función Weibull.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}) \quad (1)$$

$$y = \beta_0 - \beta_0 e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}$$

$$\beta_0 - y = \beta_0 e^{-\beta_1 t^{\beta_2}} \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= \beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2-1} e^{-\beta_1 t^{\beta_2}} \\ &= \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2-1} [\beta_0 e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}] \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2-1} [\beta_0 - y] \\ y' &= \beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2-1} - \beta_1 \beta_2 y t^{\beta_2-1} \end{aligned}$$

Modelo Levakovic I.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 \left[\frac{t^{\beta_3}}{(\beta_1 + t^{\beta_3})} \right]^{\beta_2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} = \frac{t^{\beta_3}}{(\beta_1 + t^{\beta_3})}$$

$$t^{\beta_3} = \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 + \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} t^{\beta_3}$$

$$\beta_1 \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} = t^{\beta_3} - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} t^{\beta_3}$$

$$\beta_1 \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} = t^{\beta_3} \left[1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \right]$$

$$t^{\beta_3} = \frac{\beta_1 \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}}{\left[1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \right]} \quad (2)$$

La derivada de la ecuación (1) es:

$$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t(\beta_1 + t^{\beta_3})} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t \left[\beta_1 + \frac{\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}}{1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}} \right]} \\
 &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t \left[\frac{\beta_1 \left(1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \right) + \beta_1 \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}}{1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}} \right]} \\
 &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t \left[\frac{\beta_1 - \beta_1 \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} + \beta_1 \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}}{1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}} \right]} \\
 &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t \left[\frac{\beta_1}{1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}}} \right]} \\
 &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t \beta_1} \left[1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \right] \\
 &= \frac{\beta_2 \beta_3 y}{t} \left[1 - \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \right] \\
 y' &= \frac{\beta_2 \beta_3 y}{t} - \frac{\beta_0^{-\frac{1}{\beta_2}} \beta_2 \beta_3 y^{\frac{(\beta_2+1)}{\beta_2}}}{t}
 \end{aligned}$$

Modelo de Korf.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 t^{-\beta_2}} \quad (1)$$

$$\ln(y) = \ln(\beta_0) - \beta_1 t^{-\beta_2}$$

$$\beta_1 t^{-\beta_2} = \ln(\beta_0) - \ln(y)$$

$$t^{-\beta_2} = \frac{\ln(\beta_0) - \ln(y)}{\beta_1} \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{-\beta_2-1} e^{-\beta_1 t^{-\beta_2}}$$

$$= \beta_1 \beta_2 t^{-\beta_2-1} \beta_0 e^{-\beta_1 t^{-\beta_2}}$$

$$= \beta_1 \beta_2 t^{-\beta_2-1} y$$

$$= \beta_1 \beta_2 t^{-\beta_2} t^{-1} y$$

$$y' = \frac{\beta_1 \beta_2}{t} y t^{-\beta_2} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 y}{t} \left[\frac{\ln(\beta_0) - \ln(y)}{\beta_1} \right]$$

$$y' = \frac{\beta_2 \ln(\beta_0) y}{t} - \frac{\beta_2 y \ln(y)}{t}$$

Modelo de Sloboda.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}} \quad (1)$$

$$\ln(y) = \ln(\beta_0) - \beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}$$

$$\beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} = \ln(\beta_0) - \ln(y) \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_1 \beta_2 \beta_3 y t^{\beta_3 - 1} e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}$$

$$y' = \beta_2 \beta_3 y t^{\beta_3 - 1} \beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$y' = \beta_2 \beta_3 y t^{\beta_3 - 1} [\ln(\beta_0) - \ln(y)]$$

$$y' = \beta_2 \beta_3 t^{\beta_3 - 1} \ln(\beta_0) y - \beta_2 \beta_3 t^{\beta_3 - 1} y \ln(y)$$

B. DIVISION

Modelo de Von Bertalanffy.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^3 \quad (1)$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{3}} = (1 - e^{-\beta_1 t})$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0}\right)^{\frac{2}{3}} = (1 - e^{-\beta_1 t})^2 \quad (2)$$

La derivada de la ecuación (1) es:

$$y' = 3\beta_0\beta_1 e^{-\beta_1 t} (1 - e^{-\beta_1 t})^2 \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$y' = 3\beta_0\beta_1 e^{-\beta_1 t} \left(\frac{y}{\beta_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3\beta_0\beta_1}{e^{\beta_1 t}} \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\beta_0^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = \frac{3\beta_0^{\frac{1}{3}}\beta_1 y^{\frac{2}{3}}}{e^{\beta_1 t}}$$

$$\ln(y') = \ln(3\beta_0^{\frac{1}{3}}\beta_1) + \frac{2}{3}\ln(y) - \beta_1 t$$

$$=k+\frac{2}{3}\ln(y)+qt$$

Donde :

$$k=\ln(3\beta_0^{\frac{1}{3}}\beta_1)$$

$$q=-\beta_1$$

Modelo de Chapman-Richards.

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2}$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} = (1 - e^{-\beta_1 t})$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}} = (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2-1} \quad (1)$$

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t} (1 - e^{-\beta_1 t})^{\beta_2-1}$$

Sustituyendo la ecuación (1), se tiene:

$$= \beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t} \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}}$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_0^{-(\frac{\beta_2-1}{\beta_2})} \beta_2 \beta_1 y^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}}}{e^{\beta_1 t}}$$

$$= \frac{\beta_0^{\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2 y^{\frac{\beta_2-1}{\beta_2}}}{e^{\beta_1 t}}$$

$$\ln(y') = \ln(\beta_0^{\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2) + \frac{\beta_2-1}{\beta_2} \ln(y) - \beta_1 t$$

$$= k + p \ln(y) + q t$$

Donde:

$$k = \ln(\beta_0^{\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2)$$

$$p = \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2}$$

$$q = -\beta_1$$

Modelo Monomolecular.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0(1 - \beta_2 e^{-\beta_1 t}) \quad (1)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2}{e^{-\beta_1 t}}$$

$$\ln(y') = \ln(\beta_0 \beta_1 \beta_2) - \beta_1 t$$

$$= k + qt$$

Donde:

$$k = \ln(\beta_0 \beta_1 \beta_2)$$

$$q = -\beta_1$$

Modelo Logístico.

La forma integral del modelo es:

$$y = \frac{\beta_0}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} \quad (1)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})^2} \\ &= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t}) (1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} y \\ &= \left[\frac{\beta_0}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} \right] \left[\frac{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})}{\beta_0} \right] \left[\frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} y \right] \\ &= \left[\frac{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})}{\beta_0} \right] \left[\frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{(1 + \beta_2 e^{-\beta_1 t})} y^2 \right] \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 e^{-\beta_1 t}}{\beta_0} y^2 \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_0} y^2 e^{-\beta_1 t} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 y^2}{e^{\beta_1 t}} \end{aligned}$$

$$\ln(y') = \ln\left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_0}\right) + 2\ln(y) - \beta_1 t$$

$$= k + 2\ln(y) + qt$$

Donde :

$$k = \ln\left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_0}\right)$$

$$q = -\beta_1$$

Modelo de Gompertz.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}} \quad (1)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2 t} e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$$

$$= \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2 t} \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$$

$$= \beta_1 \beta_2 e^{-\beta_2 t} y$$

$$= \frac{\beta_1 \beta_2 y}{e^{\beta_2 t}}$$

$$\ln(y') = \ln(\beta_1 \beta_2 y) - \beta_2 t$$

$$= \ln(\beta_1 \beta_2) + \ln(y) - \beta_2 t$$

$$= k + \ln(y) + qt$$

Donde:

$$k = \ln(\beta_1 \beta_2)$$

$$q = -\beta_2$$

Modelo de Weibull.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 (1 - e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}) \quad (1)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2 - 1} e^{-\beta_1 t^{\beta_2}}$$

$$= \frac{\beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{\beta_2 - 1}}{e^{\beta_1 t^{\beta_2}}}$$

$$\ln(y') = \ln(\beta_0 \beta_1 \beta_2) + (\beta_2 - 1) \ln(t) - \beta_1 t^{\beta_2}$$

$$= k + p \ln(t) + q t^{p+1}$$

Donde:

$$k = \ln(\beta_0 \beta_1 \beta_2)$$

$$p = \beta_2 - 1$$

$$q = -\beta_1$$

Modelo de Levakovic I.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 \left[\frac{t^{\beta_3}}{(\beta_1 + t^{\beta_3})} \right]^{\beta_2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} = \frac{t^{\beta_3}}{(\beta_1 + t^{\beta_3})} \quad (2)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t(\beta_1 + t^{\beta_3})} \\ &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t(\beta_1 + t^{\beta_3})} \frac{t^{\beta_3}}{t^{\beta_3}} \\ y' &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t^{\beta_3+1}} \frac{t^{\beta_3}}{\beta_1 + t^{\beta_3}} \end{aligned} \quad (3)$$

Sustituyendo el valor de la ecuación (2) en (3), se tiene:

$$\begin{aligned} &= \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t^{\beta_3+1}} \left(\frac{y}{\beta_0} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \\ &= \frac{\beta_0^{-\left(\frac{1}{\beta_2}\right)} \beta_1 \beta_2 \beta_3 y^{\frac{(\beta_2+1)}{\beta_2}}}{t^{\beta_2+1}} \\ \ln(y') &= \ln(\beta_0^{-\frac{1}{\beta_2}} \beta_1 \beta_2 \beta_3) + \frac{(\beta_2+1)}{\beta_2} \ln(y) - (\beta_3+1) \ln(t) \\ &= k + p \ln(y) + q \ln(t) \end{aligned}$$

$$k=\ln(\beta_0^{-\frac{1}{\beta_2}}\beta_1\beta_2\beta_3)$$

$$p=\frac{(\beta_2+1)}{\beta_2}$$

$$q=-(\beta_3+1)$$

Modelo de Korf.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 t^{-\beta_2}} \quad (1)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_0 \beta_1 \beta_2 t^{-\beta_2-1} e^{-\beta_1 t^{-\beta_2}}$$

$$= \beta_1 \beta_2 t^{-\beta_2-1} y$$

$$= \frac{\beta_1 \beta_2 y}{t^{\beta_2+1}}$$

$$\ln(y') = \ln(\beta_1 \beta_2) + \ln(y) - (\beta_2 + 1) \ln(t)$$

$$= k + \ln(y) + q \ln(t)$$

Donde:

$$k = \ln(\beta_1 \beta_2)$$

$$q = -(\beta_2 + 1)$$

Modelo de Sloboda.

La forma integral del modelo es:

$$y = \beta_0 e^{-\beta_1 e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}} \quad (1)$$

Derivando la ecuación (1), se tiene:

$$y' = \beta_1 \beta_2 \beta_3 y t^{\beta_3 - 1} e^{-\beta_2 t^{\beta_3}}$$

Si $\beta_3 > 1$:

$$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y t^{\beta_3 - 1}}{e^{\beta_2 t^{\beta_3}}}$$

$$\ln(y') = \ln(\beta_1 \beta_2 \beta_3) + [\ln(y) + (\beta_3 - 1) \ln(t)] - \beta_2 t^{\beta_3}$$

$$= k + [\ln(y) + (\beta_3 - 1) \ln(t)] + q t^{\beta_3}$$

Donde:

$$k = \ln(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$$

$$q = -\beta_2$$

Si $0 < \beta_3 < 1$:

$$y' = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 y}{t^{1 - \beta_3} e^{\beta_2 t^{\beta_3}}}$$

$$\ln(y') = \ln(\beta_1 \beta_2 \beta_3) + \ln(y) - (1 - \beta_3) \ln(t) - \beta_2 t^{\beta_3}$$

$$=k+\ln(y)+[(\beta_3-1)\ln(t)+qt^{\beta_3}]$$

Donde:

$$k=\ln(\beta_1\beta_2\beta_3)$$

$$q=-\beta_2$$

