

---

---

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS ECONÓMICO-ADMINISTRATIVAS**

**“BALANCE OFERTA-DEMANDA DEL FRIJOL EN MÉXICO  
MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL”**

**TESIS**

**QUE COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL  
GRADO DE:**

**DOCTOR EN CIENCIAS EN ECONOMÍA AGRÍCOLA**



**PRESENTA:**

**M.C. LUIS FÉLIX GUTIÉRREZ**

**CHAPINGO, EDO. MÉXICO, ENERO DE 2017.**

---

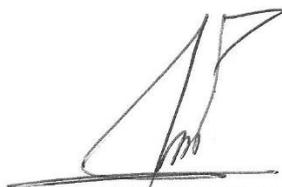
---

**BALANCE OFERTA-DEMANDA DEL FRIJOL EN MÉXICO MEDIANTE  
PROGRAMACIÓN LINEAL**

Tesis realizada por el C. Luis Félix Gutiérrez, bajo la dirección del comité asesor  
indicado, aprobada por el mismo y aceptada como requisito parcial para obtener  
el grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS EN ECONOMÍA AGRÍCOLA**

**DIRECTOR:**



**Dr. Marcos Portillo Vázquez**

**CODIRECTOR:**



**Dr. Sergio Ernesto Medina Cuéllar**

**ASESOR:**



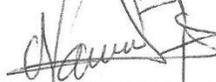
**Dr. Manuel del Valle Sánchez**

**ASESOR:**



**Dr. Francisco Pérez Soto**

**LECTOR EXTERNO:**



**Dra. Nancy Vianey Cruz Cruz**

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el financiamiento otorgado que me permitió realizar los estudios de doctorado.

Al Instituto Tecnológico de Huejutla del Tecnológico Nacional de México que me otorgó la Beca Comisión para realizar los estudios de posgrado.

A la División de Ciencias Económico Administrativas de la Universidad Autónoma Chapingo, por permitirme realizar los estudios de doctorado en economía agrícola.

Al Dr. Marcos Portillo Vázquez por la acertada dirección que hizo posible el desarrollo y culminación de la presente tesis.

Al Dr. Sergio Ernesto Medina Cuéllar por sus correcciones y sugerencias a la presente.

Al Dr. Manuel del Valle Sánchez, por su apoyo y observaciones al presente trabajo.

Al Dr. Francisco Pérez Soto por su asesoría y aportaciones a la presente tesis.

A la Dra. Nancy Vianey Cruz Cruz por sus comentarios, sugerencias y el tiempo dedicado a la revisión de la presente.

## BIOGRAFÍA



### Datos personales

Nombre: Luis Félix Gutiérrez  
Fecha de nacimiento: 19 de agosto de 1969  
Lugar de nacimiento: Tampamolón Corona, S.L.P.  
No. de cartilla militar: B-6377523  
CURP: FEGL690819HSPLTS04  
Profesión: Ingeniero Agrónomo especialista en Economía Agrícola  
Cédula profesional: 1893800

### Desarrollo Académico

Licenciatura: Ingeniero Agrónomo Departamento de Economía especialista en Economía Agrícola. Universidad Agrícola. Autónoma Chapingo. 1988 - 1992.

Maestría: Maestría en Ciencias en Departamento de Economía Economía del Desarrollo Agrícola. Universidad Rural. Autónoma Chapingo. 1993-1995.

Doctorado: Doctorado en Ciencias en División de Ciencias Económico Economía Agrícola. Administrativas. Universidad Autónoma Chapingo. 2012-2016.

Ocupación: Profesor de educación superior de tiempo completo titular C, adscrito al Instituto Tecnológico de Huejutla del Tecnológico Nacional de México.

# BALANCE OFERTA-DEMANDA DEL FRIJOL EN MÉXICO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL

## SUPPLY-DEMAND BALANCE OF BEANS IN MEXICO DETERMINED BY LINEAR PROGRAMMING

Luis Félix Gutiérrez<sup>1</sup>

Marcos Portillo Vázquez<sup>2</sup>

### RESUMEN

A nivel nacional el frijol es el segundo cultivo más importante, por superficie sembrada, además de ser uno de los principales platillos de la alimentación mexicana. El objetivo de esta investigación fue determinar el balance oferta - demanda del frijol en México mediante un modelo de distribución óptima, en el que se identificaron las zonas de producción estratégicas, junto con su producción potencial, para abastecer a los centros de consumo a un costo mínimo. Para determinar si un estado era oferente o demandante, a su producción anual de 2014 se le restó su consumo interno. Se utilizó la programación lineal y el programa LINDO para minimizar las distancias entre las zonas de producción y los centros de consumo. Los estados oferentes fueron Chiapas; Chihuahua, Durango, Nayarit, San Luis Potosí, Sinaloa y Zacatecas. Los estados demandantes fueron Aguascalientes; Baja California, Baja California Sur, Campeche, Coahuila, Colima, Ciudad de México, Estado de México, Guanajuato, Guerrero, Hidalgo, Jalisco, Michoacán, Morelos, Nuevo León, Oaxaca, Puebla, Querétaro, Quintana Roo, Sonora, Tabasco, Tamaulipas, Tlaxcala, Veracruz y Yucatán. Los estados a los que la oferta actual no satisfacen su demanda, sino únicamente con la producción potencial, fueron Quintana Roo y Yucatán. Con la producción potencial de los estados deficitarios y de Chiapas y San Luis Potosí que son excedentarios, se alcanza el equilibrio del mercado nacional de frijol. Se recomienda que para futuras investigaciones se incluyan los costos de transporte (flete) como una variable complementaria del modelo.

**Palabras clave:** balance, demanda, frijol, oferta, optimización, programación.

### ABSTRACT

At the national level, beans are the second most important crop, per planted area, in addition to being one of the main dishes of the Mexican diet. The objective of this research was to determine the supply-demand balance of beans in Mexico through an optimal distribution model, in which the strategic production areas were identified, together with their potential production, to supply consumption centers at a minimum cost. In order to determine whether a state was a supplier or demander, its internal consumption was reduced from its annual production in 2014. Linear programming and the LINDO program were used to minimize distances between production areas and consumption centers. The supplier states were Chiapas, Chihuahua, Durango, Nayarit, San Luis Potosí, Sinaloa and Zacatecas. The demander states were Aguascalientes, Baja California, Baja California Sur, Campeche, Coahuila, Colima, Mexico City, State of Mexico, Guanajuato, Guerrero, Hidalgo, Jalisco, Michoacán, Morelos, Nuevo Leon, Oaxaca, Puebla, Querétaro, Quintana Roo, Sonora, Tabasco, Tamaulipas, Tlaxcala, Veracruz and Yucatan. The states for which the current supply does not satisfy their demand, but only with the potential production, were Quintana Roo and Yucatan. With the potential production of deficit states and Chiapas and San Luis Potosí that are in a surplus situation, the balance of the national bean market is reached. It is recommended that for future research the costs of transportation (freight) should be included as a complementary variable of the model.

**Keywords:** balance, demand, beans, supply, optimization, programming.

---

<sup>1</sup> Tesista

<sup>2</sup> Director de tesis

<b>ÍNDICE GENERAL</b>	
<b>ÍNDICE GENERAL</b> .....	<b>1</b>
<b>ÍNDICE DE CUADROS</b> .....	<b>3</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b> .....	<b>4</b>
<b>ABREVIATURAS UTILIZADAS</b> .....	<b>5</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>6</b>
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
JUSTIFICACIÓN .....	8
OBJETIVOS.....	9
HIPÓTESIS .....	9
<b>CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO</b> .....	<b>10</b>
1.1. EQUILIBRIO DE MERCADO.....	10
1.2. <i>Tipos de equilibrio de mercado</i> .....	12
1.2.1. TEORÍA DEL EQUILIBRIO.....	13
1.2.2. <i>Equilibrio bajo competencia perfecta</i> .....	13
1.2.3. <i>Equilibrio Walrasiano</i> .....	14
1.2.4. <i>Equilibrio parcial</i> .....	14
1.2.5. <i>Equilibrio general: intercambio</i> .....	15
1.3. <i>Equilibrio general: producción</i> .....	15
1.2.6. <i>Competencia imperfecta y equilibrio de Nash</i> .....	16
1.2.7. <i>Juegos en forma normal</i> .....	16
1.2.8. <i>Equilibrio de Nash</i> .....	17
1.2.9. <i>Juegos en forma extensiva</i> .....	18
1.3. OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA .....	18
1.3.1. <i>El problema de Optimización Matemática</i> .....	19
1.4. PROGRAMACIÓN LINEAL .....	21
1.4.1. <i>Formulación matemática empleada en la Programación Lineal</i> .....	22
1.4.2. <i>Modelación de un problema de Programación Lineal</i> .....	24
1.5. MÉTODO GRÁFICO DE PROGRAMACIÓN LINEAL .....	24
1.6. MÉTODO SIMPLEX.....	27
1.7. MÉTODO DE TRANSPORTE .....	29
1.8. <i>Modelo de asignación</i> .....	30
1.9. APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN LINEAL Y EL MÉTODO DE TRANSPORTE .....	30
<b>CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA</b> .....	<b>36</b>
2.1. ZONA DE ESTUDIO.....	36
2.2. BASE DE DATOS.....	37
2.3. TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE DATOS .....	37
<b>CAPÍTULO 3. MERCADO MUNDIAL DE FRIJOL (2000-2014)</b> .....	<b>43</b>

3.1. PAÍSES PRODUCTORES DE FRIJOL SECO.....	43
3.2. PAÍSES EXPORTADORES DE FRIJOL SECO .....	44
3.3. PAÍSES IMPORTADORES DE FRIJOL SECO.....	45
3.4. RENDIMIENTO MUNDIAL DE FRIJOL SECO .....	46
<b>CAPÍTULO 4. MERCADO NACIONAL DE FRIJOL (2000-2014).....</b>	<b>48</b>
4.1. SUPERFICIE SEMBRADA NACIONAL DE FRIJOL SECO.....	48
4.2. VOLUMEN DE PRODUCCIÓN NACIONAL DE FRIJOL SECO.....	49
4.3. RENDIMIENTO NACIONAL DE FRIJOL SECO.....	49
4.4. PRECIO NACIONAL OBTENIDO DE FRIJOL SECO .....	50
4.5. CONSUMO NACIONAL PER CÁPITA DE FRIJOL.....	51
4.6. PANORAMA ESTATAL DEL MERCADO DE FRIJOL SECO.....	51
4.6.1. Principales estados productores de frijol seco por superficie sembrada... 51	
4.6.2. Principales estados productores de frijol seco por volumen de producción .....	52
4.6.3. Principales estados productores de frijol seco por rendimiento obtenido . 53	
4.6.4. Principales estados productores de frijol seco por precios obtenidos..... 54	
4.7. PRINCIPALES ESTADOS CONSUMIDORES DE FRIJOL, 2014.....	55
<b>CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>57</b>
5.1. ESTADOS OFERENTES Y DEMANDANTES DE FRIJOL.....	57
5.2. PARTICIPACIÓN PORCENTUAL POR ESTADO (OFERENTE O DEMANDANTE) DE FRIJOL . 58	
5.3. MATRIZ DE DISTANCIAS ORIGEN-DESTINO Y LAS CANTIDADES DEMANDADAS Y OFRECIDAS .....	59
5.4. PLANTEAMIENTO DEL MODELO DE ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE LA PRODUCCIÓN Y LA DEMANDA NO SATISFECHA: PRIMER MODELO .....	60
5.5. ESTADOS CON PRODUCCIÓN POTENCIAL DISPONIBLE .....	63
5.6. ASIGNACIÓN DEL PRODUCTO POTENCIAL.....	63
5.7. REPLANTEAMIENTO DEL MODELO DE ASIGNACIÓN: SEGUNDO MODELO .....	64
5.8. ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE LA PRODUCCIÓN POTENCIAL DISPONIBLE.....	65
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>66</b>
CONCLUSIONES.....	66
RECOMENDACIONES .....	67
<b>ANEXOS .....</b>	<b>75</b>
ANEXO A: PRIMER MODELO.....	75
ANEXO B: SEGUNDO MODELO.....	91

## ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1. Estados oferentes y demandantes de frijol, 2014. ....	57
Cuadro 2. Participación porcentual en el mercado nacional del frijol. ....	58
Cuadro 3. Matriz de distancias origen-destino y las cantidades demandadas y ofrecidas. ....	59
Cuadro 4. Asignación óptima de la producción y la demanda no satisfecha. ....	62
Cuadro 5. Producción potencial disponible. ....	63
Cuadro 6. Asignación del producto potencial. ....	64
Cuadro 7. Matriz de distancias, demanda insatisfecha y oferta potencial. ....	64
Cuadro 8. Asignación óptima de la producción potencial disponible. ....	65

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Clasificación fundamental de la Optimización Matemática.....	21
Figura 2. Ejemplo del Método Gráfico. ....	27
Figura 3. Principales países productores de frijol seco. ....	44
Figura 4. Principales países exportadores de frijol seco, 2013. ....	45
Figura 5. Principales países importadores de frijol seco, 2013. ....	46
Figura 6. Países con los mayores rendimientos de frijol seco a nivel mundial (Promedio 2000-2014).....	47
Figura 7. Superficie sembrada nacional de frijol seco. ....	48
Figura 8. Volumen de producción nacional de frijol seco. ....	49
Figura 9. Rendimiento nacional de frijol seco.....	50
Figura 10. Precio nacional de frijol seco.....	50
Figura 11. Consumo nacional per cápita. ....	51
Figura 12. Principales estados productores de frijol seco por superficie sembrada (Promedio 2000-2014).....	52
Figura 13. Principales estados productores de frijol seco por volumen de producción (Promedio 2000-2014).....	53
Figura 14. Principales estados productores de frijol seco por rendimiento (Promedio 2000-2014).....	54
Figura 15. Principales estados productores de frijol seco por precios obtenidos, 2014. .....	55
Figura 16. Principales estados consumidores de frijol, 2014.....	56

## **ABREVIATURAS UTILIZADAS**

ECM	Excedente del Consumidor de Marshall
EEUU	Estados Unidos de Norteamérica
FAO	Food and Agriculture Organization of the United Nations
INEGI	Instituto Nacional de Estadística y Geografía
LINDO	Linear, Interactive, and Discrete Optimizer
MINLP	Mixed Integer Nonlinear Programming
MPEC	Mathematical Program With Equilibrium Constraints
PLE	Programación Lineal Entera
PVC	Policloruro de Vinilo
SIACON	Sistema de Información Agrícola y de Consulta
SLP	San Luis Potosí
TCMA	Tasa de Crecimiento Media Anual

## INTRODUCCIÓN

El frijol es uno de los cultivos más importantes en México, ya que es el complemento de muchos platillos de la cocina mexicana y se le destina aproximadamente el 11.3 % del total de superficie sembrada nacional. El frijol junto con otros cultivos como el maíz y el chile cubren alrededor del 60 % de la superficie sembrada nacional.

El frijol es originario de América Latina (Mesoamérica y los Andes), en México se encuentran 50 especies y cuatro de estas son las más comunes, frijol común, frijol comba, frijol ayocote y frijol tepari. Las variedades más consumidas son azufrado, mayocoba, negro Jamapa, peruano, flor de mayo y flor de junio, también se ha comenzado el uso de otras variedades como frijol blanco y frijol negro provenientes de Estados Unidos de Norteamérica (EEUU) y de Sudamérica principalmente.

El frijol, el maíz y el chile han protagonizado históricamente la alimentación del mexicano; el frijol como platillo principal o complementario es una importante fuente de proteínas con un precio más accesible que el de otros alimentos. Los diferentes estudios realizados demuestran la enorme importancia de la leguminosa en razón de su alto valor nutricional y las cualidades saludables de quienes lo consumen. Es un producto de amplia relevancia social en estratos de bajos ingresos y de trascendencia económica para quienes lo cultivan (Reyes, 2008).

A nivel nacional se consideran a Zacatecas, Sinaloa, Durango, Chihuahua, Chiapas, Nayarit, Guanajuato, San Luis Potosí (SLP), Puebla e Hidalgo como los principales productores de frijol, con más del 80 % del volumen producido de frijol, por tanto, se le considera al resto de los estados como estados consumidores, a pesar de existir una

producción constante existen déficit en la demanda que se ha compensado con importaciones de la leguminosa.

Al ser el frijol un cultivo de importancia económica y cultural se requiere garantizar el abastimiento de los centros de consumo a partir de las zonas de producción, considerando dejar satisfechos tanto a oferentes como a los demandantes y establecer un programa de distribución que minimice los costos de transporte considerando distancias mínimas y sólo cantidades solicitadas.

En Programación Lineal existe el Método de Transporte, el cual es ampliamente conocido por sus diferentes aplicaciones en la industria y en la economía, como en la disminución de costos de transporte y la asignación de tareas en la industria manufacturera, entre otras. El Método de Transporte es un método iterativo cuyo paso inicial es obtener una solución posible la cual procede a mejorarse hasta que ya no sea viable mejorar dicha solución, llegando así a la solución óptima.

Por lo anterior, la presente investigación se basa en un modelo de minimización de costos de transporte, costos que son representados por la distancia que existe entre el probable origen y el probable destino. Este modelo de minimización de costos garantiza al menos la colación de la oferta total a un costo mínimo, faltando cubrir una pequeña demanda que se propone satisfacer mediante la producción potencial de los propios estados con demanda insatisfecha y los estados oferentes por excelencia, y con ello lograr el balance oferta demanda de la leguminosa en México.

## **Planteamiento del problema**

Dada la importancia económica y alimenticia del frijol en México, se requiere de una adecuada planeación de su producción y comercialización a fin de que los productores encuentren mercado a su producto y que los consumidores del mismo satisfagan su demanda, de tal forma que los costos de distribución sean óptimos y se identifiquen las zonas productoras estratégicas para cada centro de consumo. Además, es necesario identificar la producción potencial de los estados productores y los estados de mayor demanda insatisfecha para lograr la autosuficiencia y el equilibrio de mercado del frijol.

## **Justificación**

El frijol es un producto que se cultiva y consume a lo largo y ancho del país, sin embargo, exceptuando la producción para autoconsumo el producto es concentrado por los comercializadores para posteriormente ser enviados a los mayoristas y de ahí a los minoristas. En ocasiones, la distancia desde la zona de producción hasta el centro de consumo es considerable, incurriendo en altos costos de arrastre que impactan en el precio al consumidor. Por lo que es necesario buscar alternativas para que la producción satisfaga completamente primero a la demanda local y posteriormente a los centros de consumo más alejados, de tal forma que la oferta satisfaga a la demanda incurriendo en costos de distribución mínimos.

El consumo nacional de la leguminosa es prácticamente cubierto con la producción nacional y sólo el 1.5% de la demanda es satisfecha con importaciones, para alcanzar el autoconsumo es necesario localizar las zonas de producción estratégicas para cada centro de producción a fin de incentivar su producción potencial para cubrir la demanda insatisfecha y así lograr el equilibrio oferta demanda del frijol en México.

## **Objetivos**

Determinar el balance oferta demanda del frijol mediante un modelo de optimización en la distribución en el que se contemplen los siguientes objetivos específicos:

- Elaborar un modelo de transporte para optimizar la distribución de frijol desde las zonas de producción a los centros de consumo.
- Identificar las zonas de producción estratégicas que abastecerían los centros de consumo deficitarios a un costo mínimo.
- Calcular la producción potencial de los estados oferentes y de los estados con demanda insatisfecha a fin de que esta producción satisfaga la demanda y así balancear el mercado nacional de frijol.

## **Hipótesis**

- Se puede reducir el costo de distribución del frijol mediante un modelo de optimización generado mediante la programación lineal.
- Los centros de consumo deficitarios se localizan en las ciudades más densas y alejadas de las grandes zonas de producción.
- Las zonas de producción excedentarias se localizan en el norte del país, por destinarse grandes superficies a su cultivo.
- La producción potencial es suficiente para cubrir la demanda interna del frijol, por lo que permitirá el balance del mercado de frijol a nivel nacional.

## **CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO**

### **1.1. Equilibrio de mercado**

Lesourne, Orléan & Walliser (2006) definieron al equilibrio económico como un estado ideal del cual ninguno de los actores participantes quiere desviarse de él, es un estado idóneo que sobrevive en ausencia de los efectos de factores externos con la característica de estar en un punto fijo y estacionario.

Por su parte Velasco, Scuriatti y Velasco (2011) expresaron la importancia del equilibrio en el desarrollo de la economía como ciencia, ejemplificando al equilibrio, desde el punto de vista newtoniano, como aquella situación en la que existen fuerzas contrarias y de la misma magnitud que mientras no cambien, la situación o el equilibrio no cambiará y de forma contraria, si las fuerzas cambian se verá afectado el equilibrio. En el sentido económico, el equilibrio de mercado se verá afectado por las fuerzas de la demanda y las fuerzas de la oferta.

Los elementos que determinan las fuerzas de la demanda de un bien no son únicamente los deseos de adquirir dicho bien además se tiene que considerar que al adquirirlo, el demandante, tiene la posibilidad de dar suficientes bienes a cambio, digamos la capacidad adquisitiva, y se constituya así la “demanda efectiva”. Es decir, las necesidades y los deseos de las personas para satisfacerlas son la base de la demanda de bienes. La función de demanda individual expresa las cantidades de un bien (variable dependiente) que adquirirá el consumidor en función de los determinantes que inducen a tal actitud (variables independientes).

Los elementos que componen las fuerzas de la oferta de un bien involucran la producción del mismo considerando que existen recursos escasos y el principio de la

optimización, el costo de oportunidad. La oferta de un bien asocia cantidades máximas que un vendedor tratará de colocar en el mercado (variable dependiente) en un periodo determinado en función de algunas características (variables independientes) como el precio del bien; los recursos existentes para producirlo, los precios de los demás bienes que se pueden producir con dichos recursos y la tecnología. Así, la función de oferta expone la cantidad ofrecida dependiente de la cantidad y calidad de los factores disponibles.

Dentro de los fundamentos de la fuerza de mercado se encuentra el principio de optimización tanto en los demandantes como en los oferentes al optimizar sus decisiones, la variable principal que afecta a estas es el precio (o precios relativos) donde los participantes toman al precio como dado pues ninguno de los miembros puede determinarlo.

Es el mercado, la institución a través de la cual interactúan los agentes económicos y determinan los precios y las cantidades intercambiadas. La demanda de mercado se compone de la agregación de las funciones de demanda individual de todos los participantes. La oferta de mercado es semejante y es la suma de las funciones individuales de oferta, siendo la fuerza opuesta, ambas constituyen el mercado.

Reafirmando, en el mercado existe un precio único en el periodo con el que, si las cantidades demandadas y ofrecidas no coinciden, se producirán excedentes que implican la insatisfacción por algunos agentes del mercado. Cuando exista exceso de oferta habrá unidades que se podrán ofrecer a un precio más bajo y cuando haya exceso de demanda se comprarían a un precio más alto, ajustándose los precios bajo las fuerzas de mercado, los precios se dejan de mover cuando no induzcan a los

agentes económicos a modificarlos lo que ocurrirá a un precio tal en el que coincidan las cantidades ofrecidas y demandadas que es el llamado precio de equilibrio.

## **1.2. Tipos de equilibrio de mercado**

Velasco, Scuriatti y Velasco (2011) describieron distintos casos posibles de equilibrio, el equilibrio determinado por las fuerzas de la demanda y las fuerzas de la oferta, con el análisis estático y el análisis dinámico. El tipo de análisis de tendencia hacia el equilibrio donde no se establecen tiempos de ajuste ni descripción precisa de la secuencia de los valores de las variables en el proceso se llama análisis estático, en cambio cuando se realiza una descripción de la secuencia de cómo los valores de una variable en un momento determinado afectan sobre los valores de otras variables (o de la misma) en los momentos siguientes se dice que es un análisis dinámico.

El análisis estático incluye una variante llamada estática comparativa donde existen variaciones de posición, de un equilibrio a otro, debido a cambios exógenos en las variables. Cuando no existe el equilibrio y las fuerzas de mercado lo llevan a él se trata de un equilibrio estable, por el contrario se refiere a un equilibrio inestable cuando la posición de equilibrio se logra, las fuerzas de mercado no lo modificaran espontáneamente, pero si por alguna razón no se parte de la posición de equilibrio las fuerzas de mercado no lo llevarán nuevamente a la posición de equilibrio. Entonces, en el análisis estático sucederán casos de equilibrio estable e inestable y lo mismo sucederá en el análisis de modelos dinámicos donde son más comunes los casos de inestabilidad.

Los modelos de equilibrio deben considerarse como análisis de tendencia y no como un dato observable en un momento dado ya que en periodos largos, donde puede

haber ajustes, el precio observado se acerca más al precio de equilibrio. El valor predictivo de los modelos de equilibrio es mayor en la observación de los desequilibrios y del tipo de mercado de tal manera que permitan estimar el movimiento de las variables significativas y su cuantificación.

### **1.2.1. Teoría del equilibrio**

Por otro lado Vial y Zurita (2006) realizaron una introducción a la Teoría del Equilibrio considerando el equilibrio bajo competencia perfecta; el equilibrio Walrasiano, el equilibrio parcial, el equilibrio general (intercambio) y el equilibrio general (producción). También, el equilibrio bajo competencia imperfecta incluyendo el monopolio, el monopsonio, la Teoría de juegos y el oligopolio.

### **1.2.2. Equilibrio bajo competencia perfecta**

En una economía de mercado, el mecanismo de decisión radica en el establecimiento de los derechos de propiedad (cada persona es dueña de determinados bienes y tiene derechos, de acuerdo a la ley, sobre su uso y los beneficios que le generen) y el intercambio voluntario (negociación voluntaria y beneficiosa). Así que una economía bajo estos principios enfrenta precios dados de los bienes e insumos alcanzando un equilibrio competitivo o walrasiano.

Una propiedad fundamental del equilibrio walrasiano se establece en el Primer Teorema del Bienestar, que dice que la asignación de recursos de una economía en equilibrio walrasiano es eficiente en el sentido de Pareto.

### 1.2.3. Equilibrio Walrasiano

En competencia perfecta hay un único precio al cual todos los individuos intercambian y ninguno de los agentes con deseos de intercambiar a dicho precio está excluido. En el equilibrio de un mercado competitivo las cantidades ofrecidas y demandadas convergen porque de otra manera habría alguien que deseaba intercambiar a ese precio sin lograrlo. De tal forma que, si  $x_1(p)$ ,  $x_2(p), \dots, x_n(p)$  son las demandas de los  $n$  consumidores y  $q_1(p)$ ,  $q_2(p), \dots, q_m(p)$  las ofertas de los  $m$  productores o vendedores y el precio al que intercambian es  $p^*$ , se cumple:

$$\sum_{i=1}^n x_i(p^*) = \sum_{j=1}^m q_j(p^*)$$

Por lo tanto, un mercado está en equilibrio walrasiano si al precio  $p^*$  no hay exceso de demanda. También, el equilibrio walrasiano de un mercado es un precio  $p^*$  y una asignación de cantidades consumidas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entre los  $n$  consumidores y de cantidades producidas  $q_1, q_2, \dots, q_m$  entre los vendedores, donde la cantidad que cada participante recibe es la que querría comprar o vender al precio actual, y la suma de las cantidades consumidas coincide con la de las cantidades producidas.

### 1.2.4. Equilibrio parcial

Un análisis de equilibrio parcial se concentra en el mercado de un solo bien,  $x$ , suponiendo que el precio de los demás bienes es constante donde el Excedente del Consumidor de Marshall (ECM) se emplea para analizar los cambios en el bienestar de dichos consumidores y donde es más atractivo aquel bien cuyo mercado representa

una porción pequeña de la economía al que no le afectan los cambios de precio de los otros bienes o le afecta muy poco, en este caso el efecto ingreso le afecta poco por lo que el ECM es una buena aproximación de otras medidas de bienestar.

En el contexto de equilibrio parcial, el equilibrio competitivo se define como un precio  $p_x^*$  y una asignación de cantidades consumidas entre los  $n$  consumidores y de cantidades producidas entre los  $m$  productores, con las características de que la cantidad que cada agente consume o produce es la que quería consumir o producir al precio actual y la suma de las cantidades producidas converge con las cantidades consumidas, por lo que la demanda agregada al precio  $p_x^*$  es igual a la oferta agregada a dicho precio.

#### **1.2.5. Equilibrio general: intercambio**

El equilibrio general es el equilibrio competitivo existente en todos los mercados de manera simultánea, una herramienta útil para su análisis es la caja de Edgeworth. En el caso de una economía de intercambio se cumple una propiedad que es su optimalidad en el sentido de Pareto, el conjunto de Pareto o curva de contrato es el conjunto de todas las asignaciones factibles que son óptimas en el sentido de Pareto.

#### **1.3. Equilibrio general: producción**

En economía abierta los precios se determinan externamente y se pueden suponer constantes y el consumo se determina separadamente de la producción. No obstante, el equilibrio walrasiano en una economía cerrada los precios de los bienes se determinan endógenamente y se tienen que tomar en cuenta las preferencias de los

consumidores para verificar la inexistencia de excesos de oferta o demanda en el mercado de bienes.

### **1.2.6. Competencia imperfecta y equilibrio de Nash**

La competencia imperfecta es cuando la interrelación entre los agentes económicos no es adecuada como el caso del monopolio, del monopsonio y del oligopolio.

Monopolio es cuando existe un único vendedor y este puede fijar el precio al cual vende, no hay una relación única entre precio y cantidad por lo que no se puede encontrar una función de oferta. Monopsonio es cuando hay un único comprador y escoge el precio para comprar, en ambos casos no son tomadores de precios y dichos precios dependen directamente de las cantidades que decidan comprar o vender. En el oligopolio hay muchos productores y el comportamiento de estos está interrelacionado es decir, de manera “dependiente” por las elecciones que hagan los competidores.

La Teoría del Equilibrio, en casos de interacción estratégica entre agentes de mercado, es la encargada de lidiar con este tipo de situaciones a través de la teoría de juegos, el equilibrio de Nash y otros refinamientos.

Existen dos formas importantes (juegos) de representar modelos para situaciones con interacción estratégica; la normal o estratégica y la extensiva o dinámica.

### **1.2.7. Juegos en forma normal**

Este juego requiere conocer todo lo necesario para entender una situación social, saber quiénes intervienen en ella, sus funciones de utilidad y sus acciones o estrategias disponibles ya que estas dependen de las acciones de todos y no solo de

las individuales de cada agente. Un ejemplo muy conocido es el dilema del prisionero, este considera dos prisioneros sospechosos de un crimen, la policía no tiene evidencia suficiente para sentenciarlos. Basta con que uno confiese para que ambos queden sentenciados, aunque si uno confiesa se le rebajará la condena y nada al que no confiesa. Si ninguno confiesa, ambos quedarán libres.

Existen otros ejemplos donde se presentan situaciones parecidas como la batalla de los sexos o como el duopolio de Cournot en donde dos empresas producen un bien homogéneo y por alguna razón no es posible para ellas saber cuánto producirá el otro. Entonces en ninguno de los casos anteriores, se sabe cómo van actuar cada uno de los individuos y lo que se quiere es predecir el comportamiento del grupo.

### 1.2.8. Equilibrio de Nash

El equilibrio de Nash es la principal noción de equilibrio en este tipo de juegos, de forma normal, el cual es un perfil de estrategias con la característica que ningún jugador quiere cambiar unilateralmente su decisión, esto es, un par de estrategias (posiblemente mixtas)  $(\alpha_1^*, \alpha_2^*)$  tal que:

$$U_1(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \geq U_1(\alpha_1', \alpha_2^*) \quad \forall \alpha_1'$$

$$U_2(\alpha_1^*, \alpha_2^*) \geq U_2(\alpha_1^*, \alpha_2') \quad \forall \alpha_2'$$

El propósito es que ningún jugador tenga incentivos para desviarse de lo que está haciendo, lo que ocurriría si su estrategia fuera subóptima. El equilibrio entonces, trata de cierta manera de una noción de estabilidad.

### **1.2.9. Juegos en forma extensiva**

En este juego considera no solo la lista de participantes o jugadores, sino también sus funciones de utilidad y sus conjuntos de acciones posibles además de la secuencia de las decisiones que tomen, un ejemplo de este caso es el árbol. El árbol comienza con la decisión de un jugador o nodo, con sus posibles decisiones o las decisiones de otros jugadores las cuales tomaron de acuerdo a acciones previas, del primer jugador. El conjunto de ramas contiene las acciones posibles del jugador en turno. Al final toda secuencia de ramas indica el pago o la utilidad que recibe cada jugador bajo acciones tomadas, es decir bajo la historia del juego.

### **1.3. Optimización Matemática**

Meneu, Pérez-Salamero y Ventura (1999) enmarcaron a la Optimización Matemática explicando su sintaxis, del problema de optimización matemática, su clasificación a través de la demostración matemática, la descripción teórica y gráfica de la misma, expusieron que una de las principales dificultades presentes en la economía es la asignación de recursos entre los diferentes sectores participantes siendo más difícil la asignación de aquellos recursos que son escasos, donde el equilibrio de la oferta y la demanda es siempre un estado deseable, sin embargo, para llegar a ese estado se tienen que tomar decisiones idóneas, es decir se trata de la solución a problemas de optimización.

La optimización matemática dentro del análisis económico se encuadra de la misma manera, la asignación eficiente de recursos escasos entre usos alternativos, donde las matemáticas dotan a la Economía de una lógica deductiva formal y coherente con el axioma de la racionalidad. La aplicación de la optimización matemática va más allá de

la economía per se, abarca áreas de Econometría y Economía aplicada donde se requieren procedimientos computacionales especializados, que no siempre dan solución concreta a todos los problemas económicos propiciando así el nacimiento de la Economía computacional dentro de la cual se ubica la optimización económica.

Judd citado por (Meneu, Pérez-Salamero y Ventura, 1999) expuso que la optimización económica trata de manera explícita los problemas de optimización propios de la ciencia económica con la finalidad de obtener la mejor respuesta considerando los datos disponibles y las restricciones pertinentes.

### **1.3.1. El problema de Optimización Matemática**

El término “optimal” fue introducido por Leibnitz en 1710 en su obra Theodicee para designar la mejor alternativa de entre un número posible de estados de un caso, de ahí que cuando se refiere a optimización se está hablando de la mejor elección (una sobre el resto) existiendo dos o más alternativas.

Entonces un problema de optimización se reduce a una decisión donde se seleccionan valores para un conjunto de variables interrelacionadas, basándose en objetivos específicos, para cuantificar el rendimiento y medir la calidad de la decisión. Así que optimizar se refiere a maximizar o minimizar el objetivo considerando ciertas restricciones que limitan o enmarcan la selección de valores de las variables de decisión.

Los problemas de optimización pueden formalizarse a través de la optimización matemática de manera general como sigue:

$$\text{Opt. } f(x)$$

$$\text{s.a. } x \in S,$$

donde  $f: D = \bigcap_k D_k \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , con  $n \geq 1$  y  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ , es la *función objetivo* que se maximiza o minimiza respecto al vector de variables de decisión,  $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ , siendo

$S = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ satisface todas las restricciones}\}$ , el conjunto de *soluciones factibles* (*región factible o conjunto de oportunidades*) que recoge aquellos valores de las variables de decisión que describen al sistema objeto de estudio mediante una serie de relaciones establecidas entre las mismas.

En general se entiende que  $S \subseteq D$ ; entonces  $\forall x \in S$  exista  $f(x)$ . Así pues, el conjunto imagen (conjunto de valores alcanzables) de  $f$  sobre  $S$ , se define como:

$$f(S) = \{y \in \mathbb{R}^p / y = f(x), x \in S\},$$

Y la solución óptima (solución a un problema de optimización) radica en la identificación del conjunto de valores de las variables de decisión factibles (satisfaciendo las restricciones) conducen al valor óptimo de la función objetivo: aquellos  $y \in f(S)$  que son más deseables.

Cuando la relación funcional entre las variables que definen la función objetivo y las restricciones se desconocen se recurre a la optimización experimental aunque es una técnica no muy practicada en Economía.

Meneu et al. (1999) expusieron, en la Figura 1 la clasificación de la Optimización Matemática como sigue:

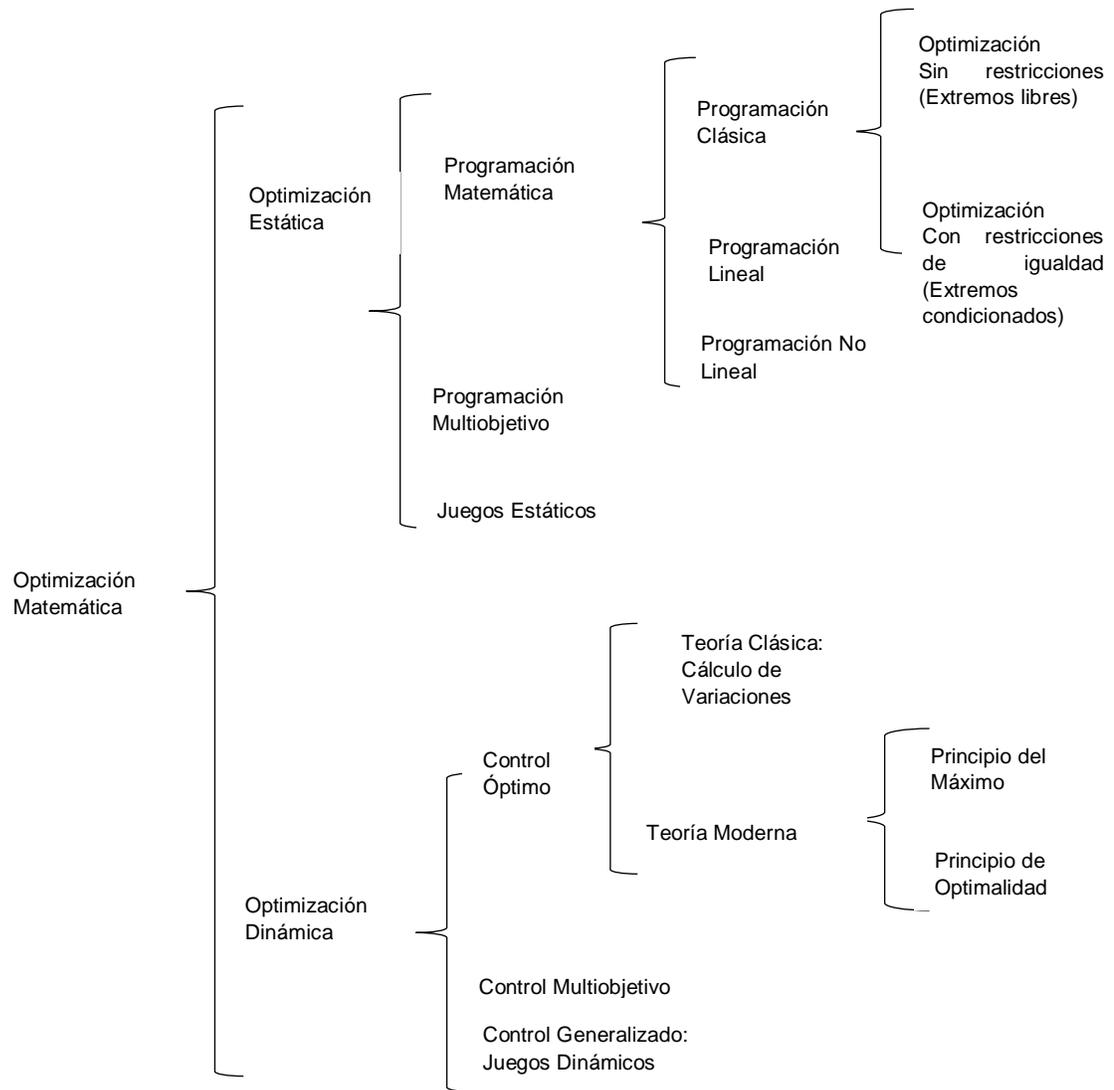


Figura 1. Clasificación fundamental de la Optimización Matemática.

#### 1.4. Programación Lineal

La importancia de la elaboración de modelos para la toma de decisiones en diversas áreas de la sociedad como la economía, la política, la industria, entre otras, es que permite la toma de decisiones más acertadas aplicando la optimización, mediante el análisis y resolución de problemas donde se toma una decisión o solución factible, de entre  $n$  soluciones (aunque la solución puede no ser única).

Dentro de la optimización matemática está la optimización estática que engloba a la programación matemática y esta a su vez a la Programación Lineal. Los objetivos clásicos de la Programación Lineal son diversos como la maximización de beneficios y minimización de pérdidas o costos; los de eficiencia (asignación de recursos), los de optimización de espacio-temporal (disminución de tiempo y distancia), los de equidad (minimización de diferencias entre individuos).

#### 1.4.1. Formulación matemática empleada en la Programación Lineal

Meneu et al. (1999) argumentaron que los problemas que abarca la Programación Lineal se basan en la optimización, es decir en la maximización o minimización de una función objetivo que está sujeta a restricciones lineales de igualdad o desigualdad. Mostraron que de manera estándar (con igualdades) se puede expresar un problema de Programación Lineal de forma estándar como:

$$\max z = cx$$

$$s.a \ Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Donde:

$cx$  es la función objetivo a maximizar (ó minimizar)

$x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de variables a determinar

$c \in \mathbb{R}^n$  es el vector de costos asociado a las variables

$A \in M_{mn}$  es la matriz de coeficientes

$b \in \mathbb{R}^{+m}$  es el vector de términos independientes relativos a las restricciones

La versión equivalente del problema anterior en forma extendida sería:

$$\text{maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeto a } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Entonces se llama región factible del problema al conjunto de posibles valores que satisfacen todas las restricciones,  $R = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ . Una solución del problema anterior se dice que es factible si satisface todas sus restricciones que  $x \in R$ , a su vez, se dice que es una solución factible óptima si otorga el valor más favorable a la función objetivo planteada que,  $x^* \in R$  es óptima si  $\forall x \in R, cx^* \geq cx$ .

La función objetivo puede representar un problema de maximización o minimización cuyas restricciones pueden estar en forma de igualdades o desigualdades, las variables pueden ser no negativas, no restringidas o acotadas.

Cuando el problema de optimización se presente de forma estándar, se pueden hacer transformaciones sobre la función objetivo; sobre las restricciones y sobre las variables.

Los problemas de optimización pueden clasificarse de acuerdo a la naturaleza de las variables, problemas lineales generales (cuando todas sus variables de decisión son continuas, que toman valores en el espacio de los números reales  $\mathbb{R}$ ), problemas enteros (si todas sus variables de decisión son enteras, toman valores en el espacio de números enteros  $\mathbb{Z}$ ) y problemas mixtos (cuando tienen variables de decisión continuas como enteras).

#### **1.4.2. Modelación de un problema de Programación Lineal**

Sánchez y Quintas (2012) resumieron en seis pasos la forma de modelar un problema de Programación Lineal:

1. Identificar las variables de decisión
2. Identificar el objetivo y escribir la función objetivo
3. Escribir la ecuación por cada restricción o condición
4. Agregar las restricciones de no negatividad
5. Resolver el sistema
6. Interpretar los resultados

#### **1.5. Método Gráfico de Programación Lineal**

Sánchez y Quintas (2012) explicaron que los problemas de Programación Lineal que solo tengan dos variables de decisión son los que pueden resolverse gráficamente; una ecuación de dos variables corresponde a una recta en el plano y una desigualdad de dos variables a una región en el plano.

La representación gráfica permite entender diferentes casos de problemas de Programación Lineal, a pesar de que la mayoría de estos tengan más de dos variables,

a través de este método se pueden apreciar los conceptos básicos que permitirá generalizarlos a otras dimensiones.

Mocholi y Sala (1993) recomendaron el método gráfico solo cuando el número de variables sea reducido, además de conocer la representación del conjunto de oportunidades  $K$  que viene dada por la intersección de los semiespacios definidos por las restricciones, la gráfica de la familia de líneas de nivel definida por la función objetivo, que serán hiperplano paralelos. A la dirección de máximo crecimiento (decrecimiento) se le denomina de preferencia o dirección de óptimo.

Considerando lo anterior, el vector (o vectores) solución es el punto (o puntos) de tangencia entre un hiperplano de la función objetivo y el conjunto de oportunidades. El hiperplano ha de tomar el mayor valor en la solución si el problema es de maximización y el menor valor si es de minimización.

Un programa de maximización con 2 variables y 2 restricciones se escribiría como sigue:

$$\text{Max } F(x) = 4x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a } 2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Así, en la Figura 2 está representado el conjunto de oportunidades definido por dos restricciones y las condiciones de no-negatividad de las variables. La familia de líneas

de nivel responde a la ecuación  $F(x) = k$  para distintos valores de  $k$ . Al ser no vacío el conjunto de oportunidades y lineal la función  $F(x)$  siempre se producirán intersecciones entre aquél y las líneas de nivel. En el punto  $(0,0)$  del conjunto de oportunidades se verifica  $F(0,0) = 0$  y es el menor valor que puede tomar  $F(x)$  en la región admisible.

Tanto el punto  $(0,0)$  como el B son puntos de tangencia entre el conjunto de oportunidades y una de las líneas de nivel. La solución al problema planteado es  $(x_1 = 3/2, x_2 = 5)$  que son las coordenadas del punto B.

Los puntos de tangencia  $(0,0)$  y B son puntos extremos del conjunto de oportunidades.

La dirección de preferencia viene dada por el vector gradiente de la función objetivo:

$$F' = \begin{bmatrix} F'x_1 \\ F'x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

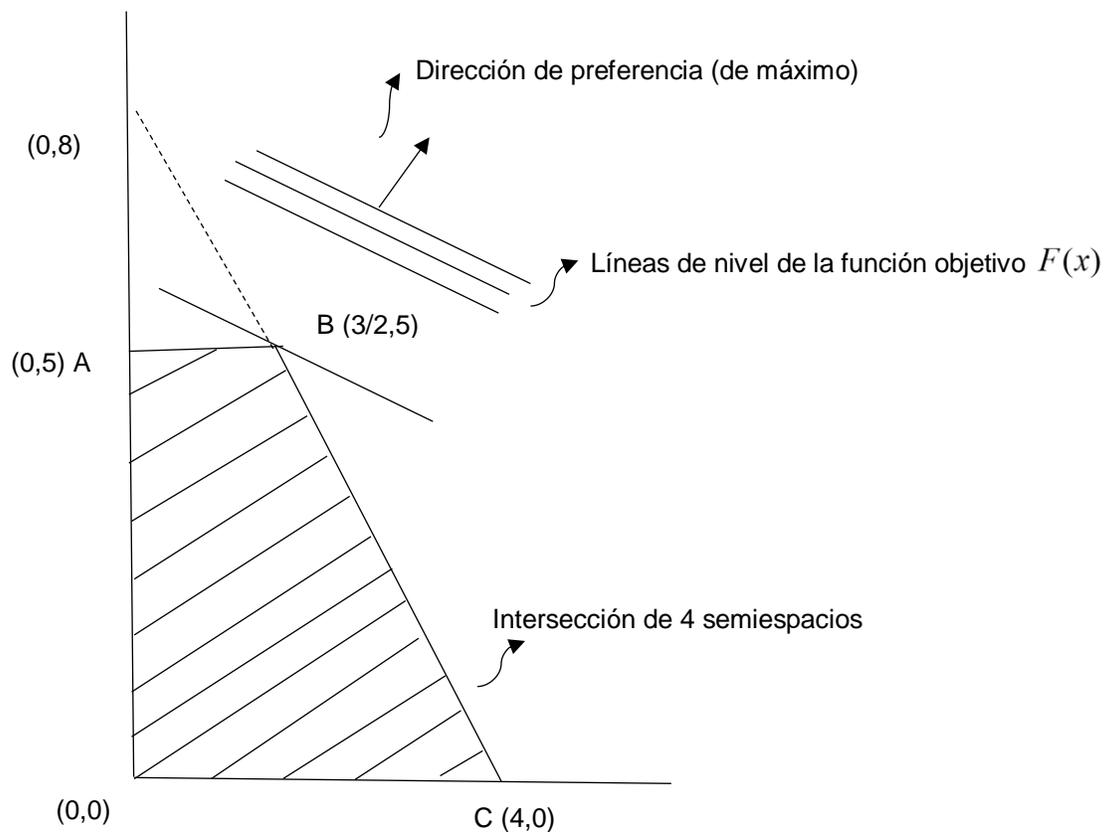


Figura 2. Ejemplo del Método Gráfico.

### 1.6. Método Simplex

Sánchez y Quintas (2012) describieron diversos métodos de Programación Lineal, entre ellos el Método Simplex, el Método de Transporte así como el Modelo de Asignación.

En 1947 George Dantzing desarrolló el Método Simplex que encuentra la solución óptima entre muchas soluciones posibles analizando solo algunas de las soluciones básica [sic] (o sea, vértices): parte de una solución básica inicial y continua inspeccionando soluciones adyacentes que permiten mejorar el objetivo del problema,

este método apoyado con el desarrollo de la computadora digital construida por Eckert, Wilkes y Von Neumann permitió el proceso de miles de datos en poco tiempo.

El método Simplex es un algoritmo iterativo que a partir de un paso inicial realiza el cálculo para encontrar una solución posible y verifica si esta solución es mejorable, si es así, vuelve a calcular para obtener una solución mejor a la previa, lo que se llama iteración, cuando la solución ya no es mejorable entonces se obtuvo la solución óptima.

Las premisas del método Simplex son las siguientes:

1. Todo sistema de la forma  $Ax=b$ , o no tiene solución o el conjunto de las soluciones factibles forman un conjunto convexo (polígono convexo en  $R^2$ ).
2. Si un problema de Programación Lineal tiene solución óptima, ésta es un punto extremo o de la frontera del conjunto de soluciones del sistema de restricciones del problema. Si más de un punto es óptimo, entonces lo son todos los puntos en combinación lineal de los dos anteriores.

El método simplex construye una solución inicial factible a partir de llevar el modelo de Programación Lineal a la forma estándar agregando variables de holgura y asegurándose de que los valores del lado derecho  $b$  sean positivos para identificar la solución inicial factible. Una vez que el modelo está en la forma estándar o aumentada, se construye la tabla Simplex y sobre ella se verifica si la solución es óptima o no lo es; en el primer caso el problema está solucionado, en el segundo, hay que mejorar la solución mediante operaciones sobre la tabla Simplex. Este algoritmo consta de tres fases:

1. Inicialización: construcción de una solución inicial factible.

2. Criterio de optimización: Verificar si la solución es óptima. Aquí el modelo está resuelto.
3. Paso interactivo: mejorar la solución.

El método simplex se puede construir también de forma tabular y de otra manera puede adaptarse a problemas no estándar (cuando las restricciones son “mayor o igual que” e “igual que”).

### **1.7. Método de Transporte**

Los problemas de transporte son problemas de Programación Lineal con una estructura particular de la matriz de los coeficientes de las restricciones donde sus elementos valen cero o uno. Estos problemas también se pueden resolver con el método Simplex; sin embargo, el Método de Transporte permite simplificar la búsqueda de la solución óptima.

Las características principales de los problemas de transporte es que buscan satisfacer la demanda de un producto, un producto homogéneo y único, desde varios puntos de origen hacia distintos lugares de destino. Se establece la hipótesis de que dicho producto cuesta lo mismo cualquiera que sea su origen y donde el costo de transportarlo es diferente, de cada origen a cada destino, en algunos casos interesa en lugar del costo, el tiempo de entrega o la distancia que recorre dicho producto, lo que interesa es minimizar el costo de satisfacer la demanda requerida por los distintos destinos.

El Método de Transporte es una simplificación del Método Simplex y para poder aplicarlo es necesario que la oferta y la demanda se igualen, si estas no son iguales

es necesario agregar un origen o un destino ficticio que absorba esta diferencia. La demanda total es la suma de todas las demandas, entonces es necesario equilibrar la oferta con la demanda.

El Método de Transporte se realiza sobre una tabla, por ser un método iterativo, tiene un paso inicial en el que se obtiene una solución posible, se pregunta si esta solución puede mejorarse y si es así se procede a obtener una solución mejor hasta que ya no es posible mejorarla, es entonces cuando se llega a la solución óptima.

### **1.8. Modelo de asignación**

Este es un caso especial del Método de Transporte, este modelo es idóneo para representar problemas de asignación, por ejemplo maestros a grupos de alumnos, vendedores a ciertas zonas de la ciudad, etc. Es asignar  $n$  personas a  $n$  puestos de trabajo con la condición de que a cada persona se le asignara una y una sola tarea y que serán cubiertas cada una de las plazas con una persona a la cual se le pagará dependiendo de sus aptitudes y del trabajo que desempeñara.

### **1.9. Aplicaciones de Programación Lineal y el Método de Transporte**

Feitó, Cespón y Rubio (2016) construyeron un Modelo de Programación No Lineal Entera Mixto (Mixed Integer Nonlinear Programming [MINLP]), combinando objetivos económicos y ambientales para obtener un diseño de cadena de suministros para la recuperación de múltiples productos y facilitar una gestión sostenible del reciclaje específicamente de dos tipos de plásticos. Se inició describiendo el modelo propuesto mediante el planteamiento de supuestos, parámetros, funciones objetivos, restricciones, la ejecución y aplicación del modelo. El modelo cumplió con tres objetivos, la satisfacción del cliente, la reducción de costos de operación y la reducción

del impacto ambiental del sistema, algunas de las restricciones más importantes fueron garantizar que ningún flujo de materiales tuviera un valor por encima del posible a recuperar o que no hayan entrado a la planta; no exceder las capacidades de producción de las plantas y limitar el número de viajes por medio de transporte como la cantidad máxima de viajes de un camión en cierto periodo. Siendo un problema multiobjetivo se detectaron un conjunto de soluciones eficientes, no solución única, que para determinarlas se usó el método de las restricciones. Las decisiones seleccionadas dependieron de las estrategias de la empresa, la más importante fue preferir la eficiencia en el logro ambiental con buenos indicadores a bajos costos de operación.

Gutiérrez (2015) elaboró un programa modelo de transporte de costo mínimo de sorgo en grano en México, a fin de encontrar las rutas que sean las de menor costo para el transporte de la producción de cada centro de producción a los centros de consumo, con el afán de que los precios al consumidor final disminuyan, ya que al no existir una buena planeación se siguen rutas que no son las más adecuadas lo cual provoca que se hagan gastos innecesarios, lo que se refleja en precios más elevados al consumidor final. También realiza recomendaciones a través del potencial de cada estado para tener una mayor producción y no depender de las importaciones.

Rojas (2011) formuló un modelo lineal para optimizar distribución del trigo y minimizar el costo de transporte, recomienda considerar a la programación lineal no como un método para hallar soluciones óptimas a problemas aislados, sino como un instrumento de gran precisión que permite analizar la toma de decisiones con criterios técnicos y económicos, establecer con rigor las interrelaciones entre los factores de

producción, determinar los óptimos en función de criterios variables, prever y planificar el futuro y cuantificar los efectos de los cambios que se produzcan en los datos utilizados al establecer los sistemas que se han optimizado

Toxqui (2013) formuló un modelo de optimización para la distribución de maíz blanco en México que permite minimizar el costo de transporte, utilizando el modelo de transporte de la programación lineal. Sus resultados muestran rutas óptimas de distribución, identificando las entidades mejor ubicadas para abastecer la demanda del grano.

Reyes (2013) analizó la distribución de la cebolla en México, con un modelo que permite minimizar el costo de transporte, identifica los lugares con potencialidad productiva que están mejor ubicados con respecto a los centros consumidores y recomienda donde y en qué cantidades debe producirse este bien, para mantener un equilibrio entre oferta y demanda.

Gómez y García (2013) aplicaron un modelo de equilibrio espacial para determinar la estructura del mercado de maíz blanco en México. Se usó un modelo de transporte en dos escenarios, uno para economía cerrada y otro para economía abierta. El objetivo fue minimizar los costos de distribuir el maíz a varios destinos tomando en cuenta la oferta de los centros de origen y la cantidad demandada de los centros destino. Los datos considerados fueron estados origen y estados destino, costos de transporte y las restricciones de oferta y demanda. En el mercado cerrado, se redujeron los estados óptimos de producción donde Sinaloa fue el mayor productor de maíz blanco teniendo excedentes que pudieran destinarse a la exportación o a la industria. En el mercado

abierto se quedaron las mismas zonas productoras definidas y aumentaron las zonas destino en puntos frontera como Cd. Juárez, Matamoros, Mazatlán, Tuxpan y Acapulco donde se destinaría el excedente de Sinaloa o bien para exportación.

Guzmán, Sánchez y Calderón (2012) elaboraron un modelo de transporte, a una empresa productora de productos químicos, para minimizar el costo de transportación de un producto termoplástico para la fabricación de Policloruro de Vinilo (PVC) de sus diferentes plantas a distintos almacenes, dicha empresa contrató a una empresa de transporte de mercancía. Las restricciones fueron que la suma de los envíos desde una fuente no puede ser mayor que la oferta y que la suma de los envíos a un destino satisfaga su demanda, aunque en la vida real no suceda así el modelo puede balancearse. El modelo sugirió hacer modificaciones en las cantidades transportadas de las plantas resultando en un ahorro para la empresa.

López, Olguín y Camargo (2008) propusieron un modelo matemático de transporte para una empresa dedicada a la manufactura de juguetes. El modelo buscó minimizar el número de viajes, realizados en la distribución del juguete, con dos posibilidades, flotilla limitada e ilimitada y como restricción la capacidad de peso, volumen o número de paletas por vehículo. Se usó el programa Linear, Interactive, and Discrete Optimizer (LINDO) y la Programación Lineal Entera (PLE) y un algoritmo heurístico llamado lanzamiento (dispatching) a aplicar en casos donde la PLE no resultó adecuada debido al tamaño de estudio. El modelo anterior resultó apropiado para obtener el óptimo porcentaje elevado de ejemplares para horizontes de tiempo que son utilizados por la empresa.

Medina, Raya y Contreras (2007) utilizaron un modelo de transporte para la asignación de trabajos a maquinas considerando prioridades. El objetivo fue asignar tiempos de trabajos a máquinas de manera que se maximizara la fabricación de los trabajos de las maquinas principales cuyas variables fueron los tiempos de trabajos asignados a las máquinas para cada componente y las restricciones fueron la capacidad limitada de las máquinas y no asignar tiempos que excedieran los tiempos de los trabajos requeridos. Se utilizó Premium Solver de Excel, con una prueba piloto inicial. El modelo arrojó una tabla óptima de asignación de trabajos a las maquinas considerando las prioridades de administración, sin utilizar un software especializado, con una reducción del 94 % de tiempo en la asignación de trabajos por máquina.

Jansson & Heckelei (2004) estimaron un modelo de transporte usando un programa matemático con restricciones de equilibrio que se empleó en el transporte de cultivos agrícolas en Benin, África Occidental. Se mostró como el programa matemático con restricciones de equilibrio (Mathematical Program With Equilibrium Constraints [MPEC]) puede ser usado para estimar los parámetros de un modelo de transporte usando una serie inconsistente de precios observados y costos de transporte. Los resultados de esta investigación fueron que por formular estimaciones de modelos de optimización como MPEC, los parámetros de ese modelo pueden ser estimados en una forma consistente completamente con el modelo por el cual ellos están yendo a ser usados, se confirma que MPEC's son difíciles de resolver y que cada problema podría necesitar un modelo de solución hecho a la medida.

López y Arana (2002) describieron las aplicaciones económicas de la dualidad en el problema de transporte donde la idea de la dualidad en Programación Lineal es que

todo programa lineal llamado primal lleva asociado un programa dual. Para resolver el programa lineal de origen se obtiene una solución para su programa dual y lo mismo para los problemas económicos, es decir el modelo de transporte tiene aplicaciones en diferentes ámbitos, de una empresa, que no tienen exactamente que ver con el transporte como la formulación de dietas.

## **CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA**

### **2.1. Zona de estudio**

La investigación contempló a los principales estados productores y receptores de frijol a nivel nacional. Para determinarlos se calculó la disponibilidad de la leguminosa por estado, diferencia entre la producción y el consumo, las cantidades positivas indicaron que estos cubren su demanda interna considerándolos como oferentes, las cantidades negativas indicaron que no alcanzaron a cubrir su demanda interna considerándolos como demandantes.

Los estados oferentes fueron Chiapas (Ocosingo); Chihuahua (Namiquipa), Durango (Guadalupe Victoria), Nayarit (Santiago Ixcuintla), SLP (Villa de Ramos), Sinaloa (Guasave), Zacatecas (Sombrerete).

Los estados demandantes fueron Aguascalientes (Aguascalientes); Baja California (Tijuana), Baja California Sur (BCS) (La Paz), Campeche (Champotón), Coahuila (Torreón), Colima (Colima), D. F. (Iztapalapa) y Estado de México, Guanajuato (León), Guerrero (Acapulco), Hidalgo (Pachuca), Jalisco (Guadalajara), Michoacán (Morelia), Morelos (Cuautla), Nuevo León (San Nicolás de los Garza), Oaxaca (Oaxaca), Puebla (Puebla), Querétaro (Querétaro), Quintana Roo (Cancún), Sonora (Hermosillo), Tabasco (Villahermosa), Tamaulipas (Tampico), Tlaxcala (Apizaco).

El Distrito Federal y el Estado de México por su cercanía se consideraron como un solo centro de consumo.

## **2.2. Base de datos**

La información empleada en esta investigación correspondió al mercado mundial y nacional de frijol, se obtuvo a través de bases de datos como The Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO), del Sistema de información agrícola y de consulta (SIACON) e información de empresas transportistas de frijol, entre otras fuentes.

Para el mercado mundial se consideraron los principales países productores y consumidores de frijol, los principales importadores, exportadores y los rendimientos mundiales.

Para el mercado nacional se consideraron los principales estados productores y consumidores de frijol, la superficie sembrada, el volumen de producción, el rendimiento nacional, los precios por año agrícola, así como el consumo per cápita nacional y el consumo total a nivel estatal.

Los datos empleados se refirieron al periodo 2000 al 2014, principalmente, tanto a nivel mundial como nacional.

## **2.3. Técnicas de análisis de datos**

A los datos obtenidos, de las bases de datos consultadas, se les calcularon porcentajes (%), la Tasa de Crecimiento Media Anual (TCMA), promedios, además se elaboraron figuras y cuadros para facilitar el análisis de la información.

Posterior a la definición de los centros de origen y destino de frijol, se tabuló la información de distancias desde los diferentes orígenes a los diversos destinos,

colocando en cada origen la cantidad ofrecida y en cada destino la cantidad demandada.

Para la formulación del modelo, se emplearon técnicas de Programación Lineal, en concreto el Método de Transporte que consistió en minimizar las distancias que se tienen que recorrer para satisfacer la demanda de los centros de consumo a partir de la oferta de los centros de producción. Para la solución del modelo planteado se utilizó el programa LINDO específico para resolver problemas de programación y optimización.

Para alcanzar el objetivo planteado se usó la Programación Lineal, la cual es un procedimiento que permite asignar recursos escasos entre fines competitivos (alternativos), es una excelente herramienta para determinar un plan de transporte que permita satisfacer la demanda en varios destinos a partir de varios orígenes a un costo mínimo.

Si la oferta en el origen  $i$  es  $a_i$ , la demanda en el destino  $j$  es  $b_j$ , el costo de transporte unitario desde el origen  $i$  hasta el destino  $j$  es  $c_{ij}$  y la cantidad transportada de  $i$  a  $j$  es  $x_{ij}$ , entonces, el modelo de transporte en términos analíticos, sería (Taha, 1995):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } X_0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} & \text{Función objetivo} \\
 \text{Sujeta a } \left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \end{array} \right\} & \text{Restricciones: de oferta y demanda}
 \end{array}$$

Con  $X_{ij} \geq 0$  Condición de no negatividad

donde  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, n$

En especial, cuando  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ , se dice que el modelo está equilibrado.

La función objetivo indica una minimización del costo de transporte desde todos los orígenes hasta todos los destinos, considerando el costo unitario de transporte y la cantidad transportada.

La restricción de oferta indica que la cantidad transportada desde esa fuente (origen) a los diferentes destinos, no debe ser mayor que a lo que allí se produce (oferta). La restricción de demanda implica que la cantidad transportada a un destino debe ser a lo mucho igual a la cantidad demandada, o menos, si la oferta total es menor a la demanda.

La condición de no negatividad impide obtener resultados negativos, ya que carecen de interpretación económica alguna.

Del resultado obtenido se puede hacer un análisis de sensibilidad para determinar las variaciones en los costos o cambios en el valor óptimo obtenido, los conceptos que se manejan son:

Precios sombra. Se distinguen los precios sombra de las actividades que se conocen como costos reducidos y los precios sombra de los recursos, que se conocen como precios duales.

Costo reducido. En un problema de minimización expresa el demérito en el valor óptimo (incremento del costo) por incluir en el programa una actividad excluida, o bien,

expresa la magnitud en la que debe disminuir el valor unitario (costo) para que la actividad sea incluida en la solución óptima. Solo tienen costo reducido las actividades excluidas en la solución óptima (Valdovinos, 1995).

Precio Dual. Expresa en términos generales el cambio en el valor óptimo ante un cambio unitario del requerimiento (recurso). En un problema de minimización, el precio dual expresa el incremento que tendría el valor óptimo al aumentar en una unidad adicional el requerimiento o bien, expresa el decremento en el valor óptimo ante una baja de una unidad en el requerimiento. Sólo tienen precio dual los recursos que se agotan en el proceso.

Para determinar los estados oferentes y demandantes fue necesaria información sobre producción, población y consumo per cápita por estado. Con base en ella se estableció el consumo estatal y de la diferencia de este con la producción estatal se determinaron los estados oferentes y demandantes: Aquellos estados excedentarios, es decir, aquellos que satisfacen su demanda y les sobra producto se les considera como oferentes y en el programa de asignación se les conoce como orígenes. Los estados deficitarios son aquellos que no alcanzan a satisfacer su demanda interna y se tornan en estados demandantes y en un programa de asignación se les conoce como destinos.

Para establecer las rutas se consideraron la ciudad más grande del distrito de desarrollo rural de mayor producción del estado como la zona de producción (origen), y la ciudad en donde se ubica la central de abasto como el centro de consumo

(destino), posteriormente se determinó la distancia desde cada origen a cada uno de los destinos mediante la herramienta de la página web Yotellevo.mx.

En el programa lineal se consideró minimizar las distancias desde los orígenes hasta todos los destinos, considerando las restricciones de oferta y demanda. Como la demanda supera a la oferta se consideró a las restricciones de oferta como iguales a su lado derecho, es decir, como una condición necesaria de que toda la oferta se colocara; mientras que a la demanda no se le forzó a cumplir esta condición ya que la oferta insuficiente no lo permitía.

Como la demanda es mayor a la oferta, el programa dejó a varios estados con satisfacción parcial o sin asignación alguna. Por lo que se calculó la producción potencial de los estados a fin de ver si se alcanza el equilibrio oferta-demanda. El modelo de matemático establecido se resolvió con el programa computacional llamado LINDO.

Para el cálculo de la producción potencial se multiplicó la máxima superficie y el máximo rendimiento por estado durante el periodo **2000-2013**. La diferencia entre la producción potencial y la producción de 2013 arrojó la producción potencial disponible que satisfizo parte de la demanda no satisfecha en la primera asignación por el mismo estado demandante.

Como esta segunda asignación tampoco cubrió totalmente la demanda, se procedió a formular y resolver otro programa de minimización, en el cual la función objetivo es minimizar los costos reducidos del primer programa de optimización, como orígenes se consideraron a los estados oferentes del programa inicial y su oferta la producción

potencial disponible; se consideró como destinos a aquellos estados que después de la segunda asignación seguían mostrando demanda insatisfecha.

Se interpretaron los resultados del modelo planteado, se elaboraron las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

## **CAPÍTULO 3. MERCADO MUNDIAL DE FRIJOL (2000-2014)**

### **3.1. Países productores de frijol seco**

La Food and Agriculture Organization of the United Nations [FAO] (1999) definió al frijol seco como la legumbre más importante para consumo directo en el mundo, con los más altos niveles de variación en hábitat, características de la semilla, madurez y adaptación además de contar con más de 40,000 variedades a nivel mundial cultivadas en diversos sistemas de producción en regiones como América Latina; África, Este Medio, China, Europa, EEUU y Canadá.

Como se muestra en la Figura 3, India se ubicó como el país con la mayor producción mundial promedio de frijol seco con 3,454,500.0 toneladas (t), esto es alrededor del 15 % de la producción mundial, en segundo lugar se ubicó Brasil con 3,133,196.30 t que es aproximadamente el 14 % del total mundial, en tercer lugar se ubicó Birmania con 2,696,971.90 t que es cerca del 12 % mundial, China y China Continental ocuparon el cuarto y quinto lugar, con 1,549,587.20 t y 1,540,726.70 t ambas sumaron el 14 % de la producción en el mundo. EEUU, México, Tanzania, Uganda y Kenia ocuparon los lugares subsecuentes. En total estos diez países produjeron cerca del 72 % del frijol producido en el mundo (FAO, 2016).

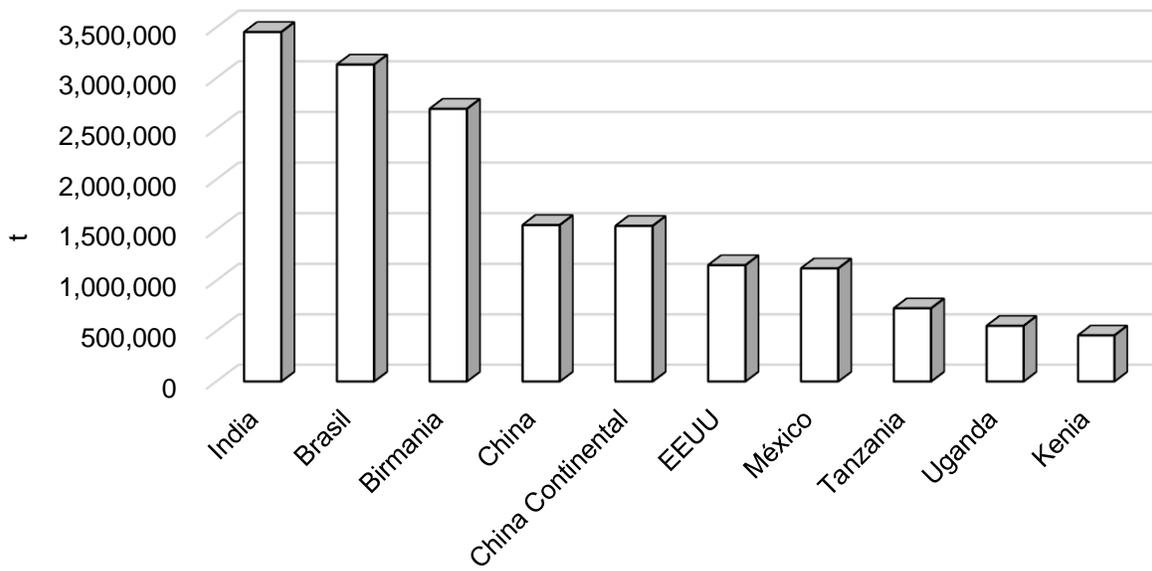


Figura 3. Principales países productores de frijol seco.

### 3.2. Países exportadores de frijol seco

Algunos de los principales países productores de frijol forman parte de los principales países exportadores del grano. En la Figura 4 se observa que en el año 2013, Birmania fue el país que registró las exportaciones más grandes de frijol con 1,370,000.0 t esto fue alrededor del 28 % de las exportaciones totales a nivel mundial, le siguieron China y China Continental que exportaron 800,872.0 t y 799,918.0 t, es de mencionarse que en dichos países el frijol es parte de su alimentación aunque no de manera primordial como lo es el arroz. EEUU, Canadá y Etiopía también son grandes exportadores del grano, juntos exportaron el 20 % de frijol en el mundo. Argentina, Egipto, Australia y Nicaragua exportaron alrededor del 6 % de frijol a nivel mundial (FAO, 2016).

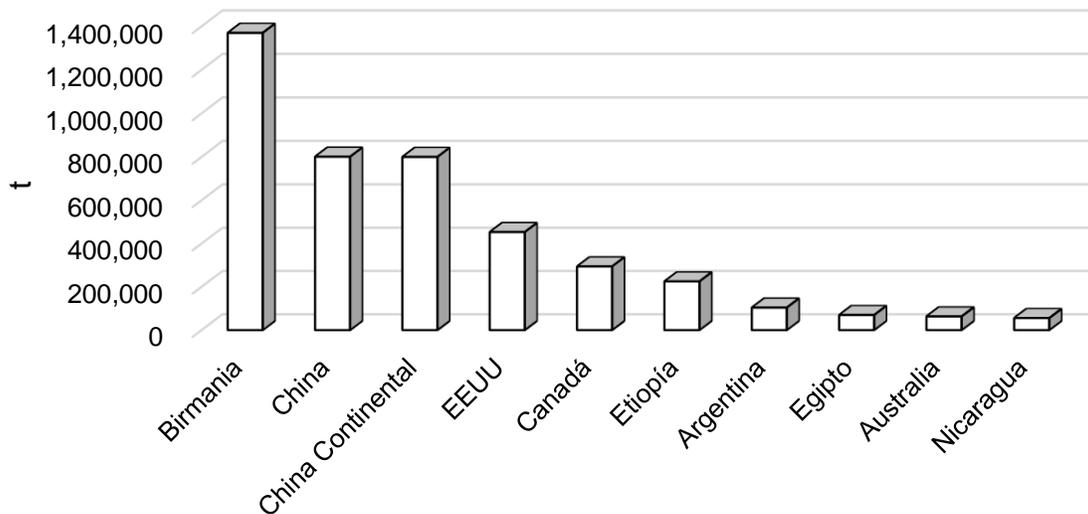


Figura 4. Principales países exportadores de frijol seco, 2013.

### 3.3. Países importadores de frijol seco

Los países demandantes de frijol lo destinan a diferentes usos, para los países en desarrollo como India; Brasil, México, entre otros, el frijol es parte de su dieta por tanto las importaciones del grano las destinan principalmente para consumo humano por el contrario, los países desarrollados como EEUU, Italia, Reino Unido, Japón y Canadá lo destinan de manera incipiente al consumo humano y predominantemente al sector industrial para la generación de biocombustibles.

La Figura 5 muestra los principales países importadores de frijol donde India ocupó el primer lugar con 885,754.0 t siendo aproximadamente el 25 % de las importaciones totales en el mundo, Brasil importó alrededor del 9 % de las importaciones del total mundial, EEUU; México, Italia, Reino Unido, Japón, Indonesia, Pakistán y Canadá importaron cada uno menos del 5 % a nivel mundial (FAO, 2016).

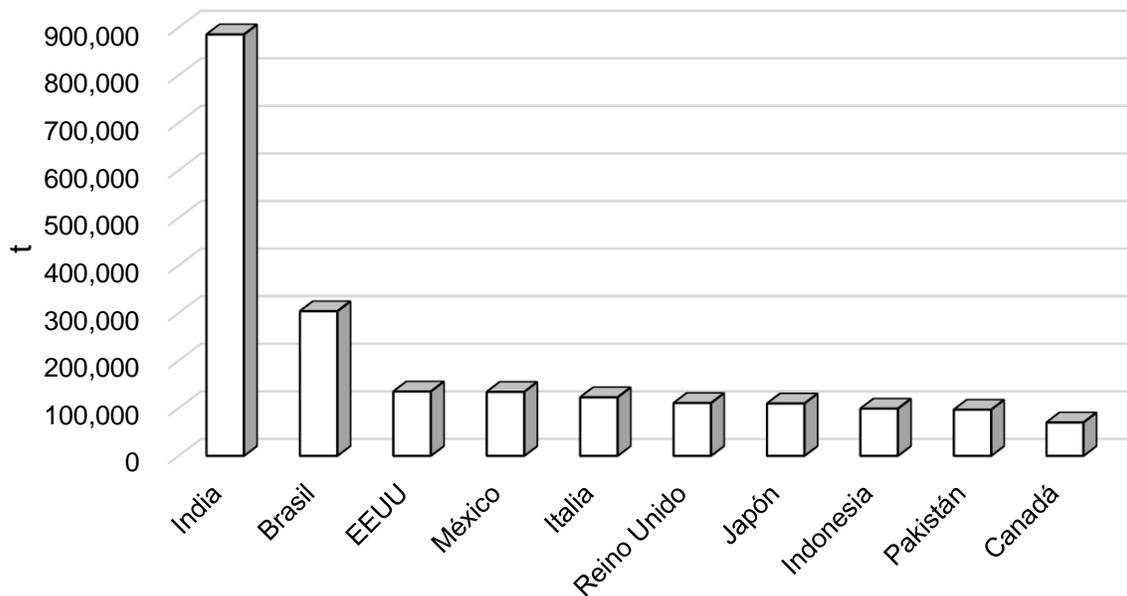


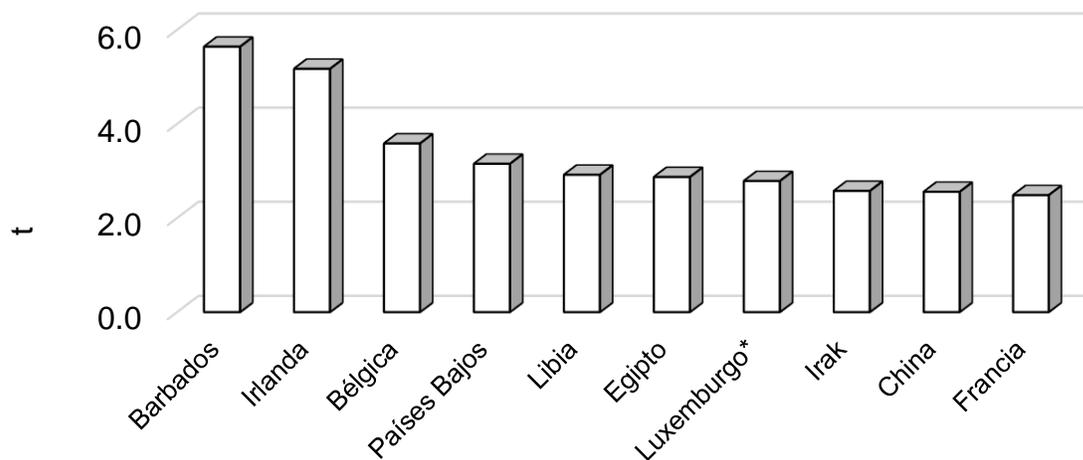
Figura 5. Principales países importadores de frijol seco, 2013.

### 3.4. Rendimiento mundial de frijol seco

El rendimiento promedio de frijol a nivel mundial durante el periodo 2000 al 2014 fue de 1.3 toneladas por hectárea (t/ha) que no es ni la mitad del obtenido por el país con mayor rendimiento. En la Figura 6, Barbados obtuvo el mayor rendimiento con 5.6 t/ha, Irlanda obtuvo un rendimiento semejante de 5.2 t/ha. Le continuaron Bélgica y Países Bajos con rendimientos por arriba de las 3 t/ha. El resto de los países, Libia; Egipto, Luxemburgo, Irak, China y Francia obtuvieron rendimientos menores a las 3 t/ha.

Los países con los más bajos rendimientos a nivel mundial obtuvieron 300 kilogramos (kg) por ha en promedio, la mayor parte de estos se localizan en África, Asia y Sudamérica; India, Panamá, Togo, Angola, Ecuador, Swazilandia, Mozambique, Djibouti, Somalia y Eritrea. Cabe mencionar que India es uno de los mayores productores de frijol seco a nivel mundial; sin embargo, sus rendimientos son muy

bajos que compensan con las grandes extensiones que destinan a la producción del grano (FAO, 2016).



*Figura 6.* Países con los mayores rendimientos de frijol seco a nivel mundial (Promedio 2000-2014).

\*Nota: Promedio apartir de 2002.

**CAPÍTULO 4. MERCADO NACIONAL DE FRIJOL (2000-2014)**

La importancia del frijol a nivel nacional radica en que este grano se cultiva en diversas zonas agroecológicas y en diversos sistemas de producción además de sus virtudes proteicas le hacen parte indispensable de la canasta básica, por ser complemento y a veces sustituto de la carne, mayormente en países en desarrollo como México donde el acceso a la carne se ve limitado por el ingreso de la población inclinándose hacia el consumo de granos.

**4.1. Superficie sembrada nacional de frijol seco**

A nivel nacional, durante el periodo 2000-2014, la superficie sembrada de frijol por hectáreas (ha) no creció de la misma manera que el rendimiento ni que el volumen de producción. Como se muestra en la Figura 7, la superficie sembrada nacional registró una TCMA de -1.2 %, es decir disminuyó (Sistema de información Agroalimentaria de Consulta [SIACON], 2014).

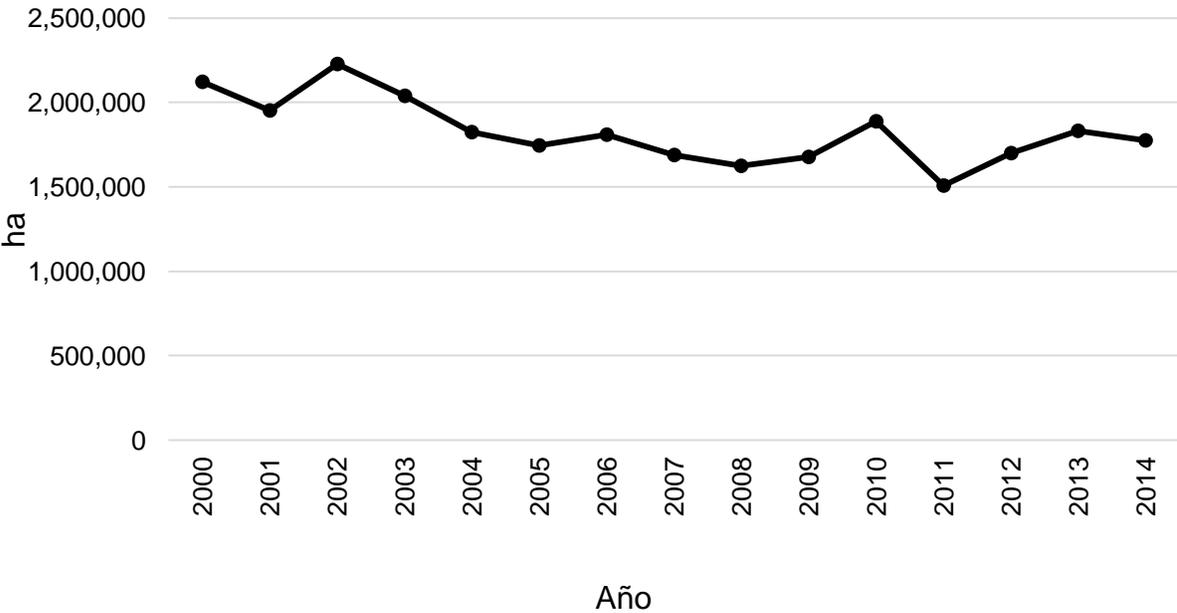


Figura 7. Superficie sembrada nacional de frijol seco.

## 4.2. Volumen de producción nacional de frijol seco

Por el lado del volumen de producción nacional, este mostró comportamiento variable, pero con producción a la alza como se muestra en la Figura 8, este creció a una TCMA de 2.4 % (SIACON, 2014).

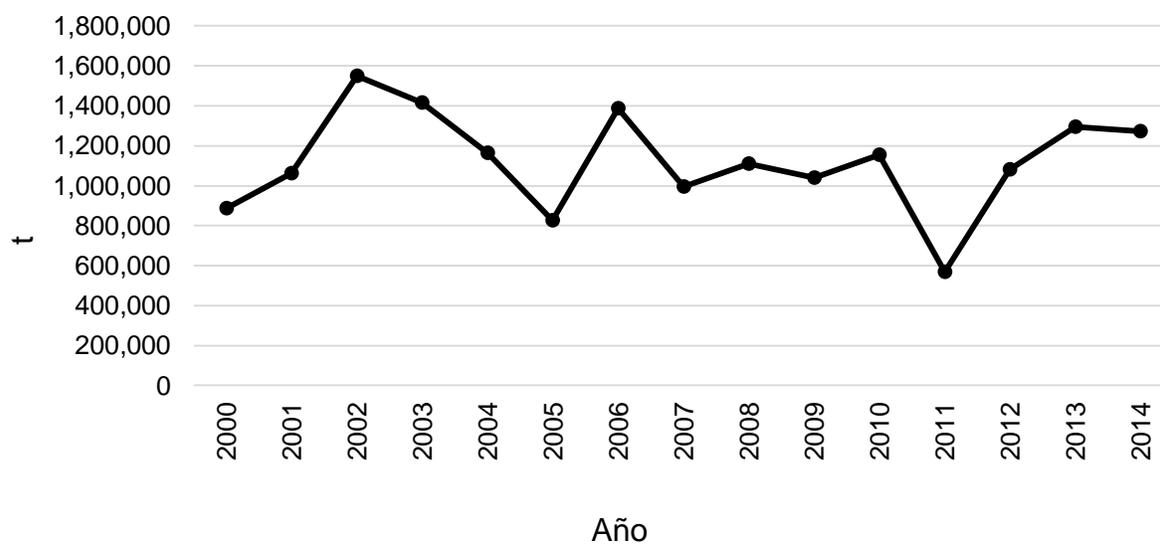


Figura 8. Volumen de producción nacional de frijol seco.

## 4.3. Rendimiento nacional de frijol seco

El aumento en el volumen de producción se explicó por el aumento en el rendimiento obtenido, en la Figura 9, se aprecian aumentos aunque poco significativos, durante dicho periodo el rendimiento obtenido registró una TCMA de 1.7 % (Presidencia de la República, 2014).

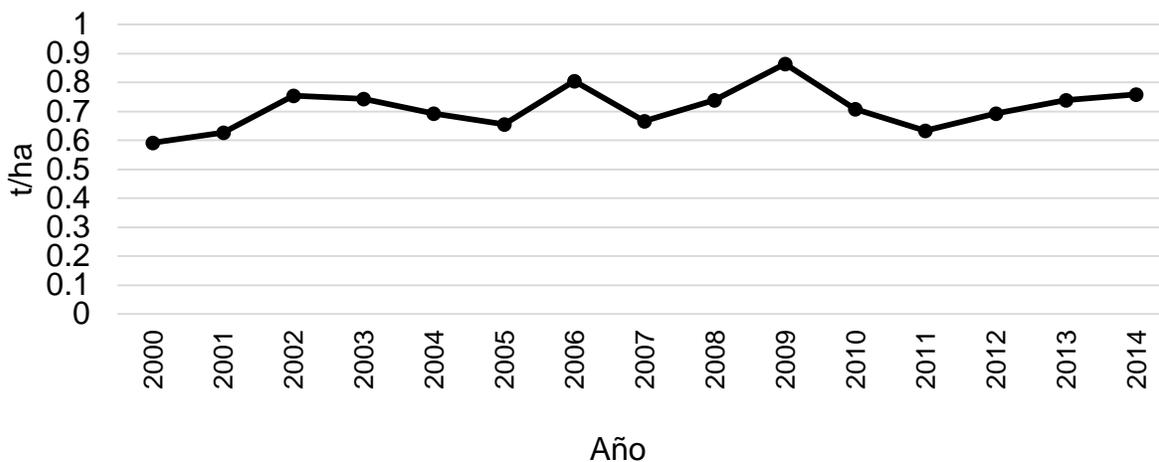


Figura 9. Rendimiento nacional de frijol seco.

#### 4.4. Precio nacional obtenido de frijol seco

A nivel nacional los precios se han mostrado con una tendencia creciente principalmente hacia la mitad del periodo, a partir de 2007, como se aprecia en la Figura 10, estos crecieron a una TCMA de 3.5 % (SIACON, 2014).

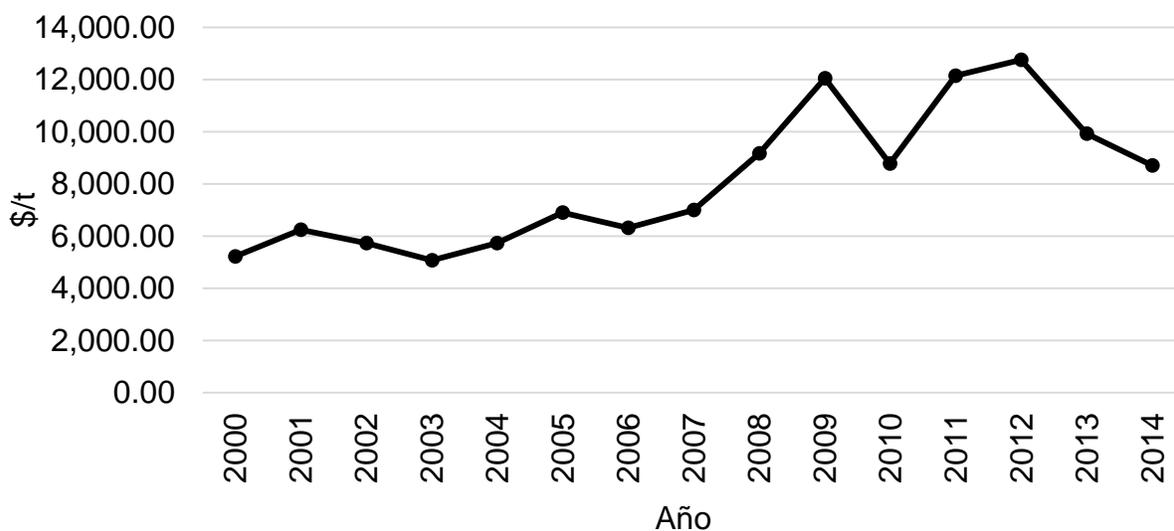


Figura 10. Precio nacional de frijol seco.

#### 4.5. Consumo nacional per cápita de frijol

A nivel nacional, aunque el consumo per cápita decreció ligeramente de 2000 a 2014, Figura 11 con una TCMA de -1.2 %, el consumo nacional aparente presentó crecimiento positivo, cabe mencionar que en años recientes se ha fomentado la producción de otras leguminosas como la soya que han diversificado el consumo de los mexicanos (Presidencia de la República, 2014).

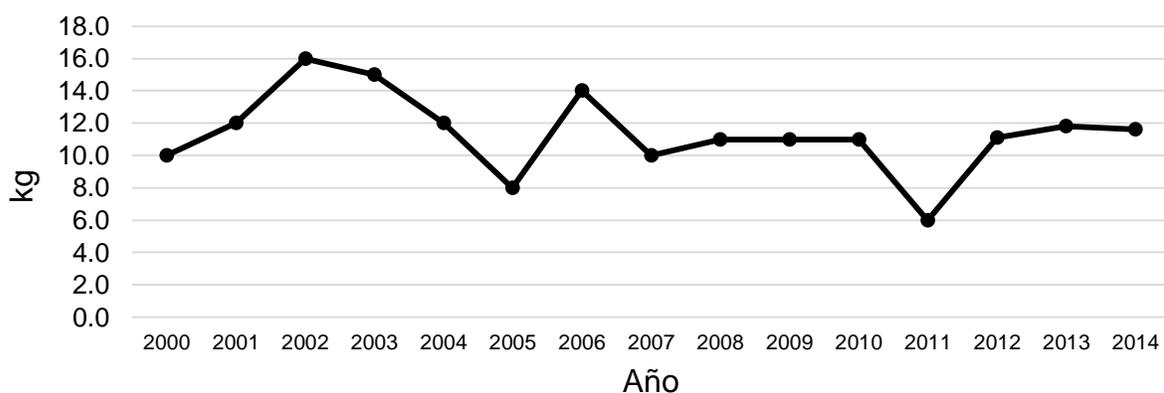
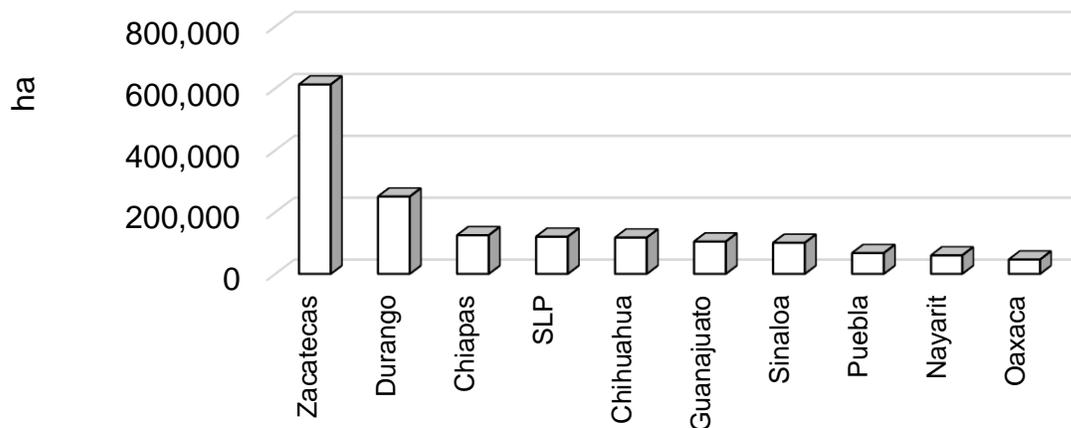


Figura 11. Consumo nacional per cápita.

#### 4.6. Panorama estatal del mercado de frijol seco

##### 4.6.1. Principales estados productores de frijol seco por superficie sembrada

En la Figura 12 se muestran los estados principales que destinaron grandes superficies a la siembra de frijol, siendo Zacatecas el que destinó mayor superficie para la siembra del grano con 612, 270 ha sembradas, le siguieron Durango, Chiapas, SLP, Chihuahua, Guanajuato y Sinaloa con arriba de las 100, 000 ha sembradas. Puebla, Nayarit y Oaxaca destinaron gran superficie para la siembra, pero menor a las 100,000 ha (SIACON, 2014).



*Figura 12.* Principales estados productores de frijol seco por superficie sembrada (Promedio 2000-2014).

#### 4.6.2. Principales estados productores de frijol seco por volumen de producción

Se encontraron algunas coincidencias entre los grandes productores por superficie sembrada y los grandes productores por volumen de producción, Figura 13, Zacatecas obtuvo el más grande volumen de producción con 318251.3 t, le siguieron Sinaloa y Durango con volumen de producción arriba de los 100,000 t. Chiapas, Nayarit, Guanajuato, SLP, Puebla e Hidalgo obtuvieron volúmenes menores de las 100,000 t (SIACON, 2014).

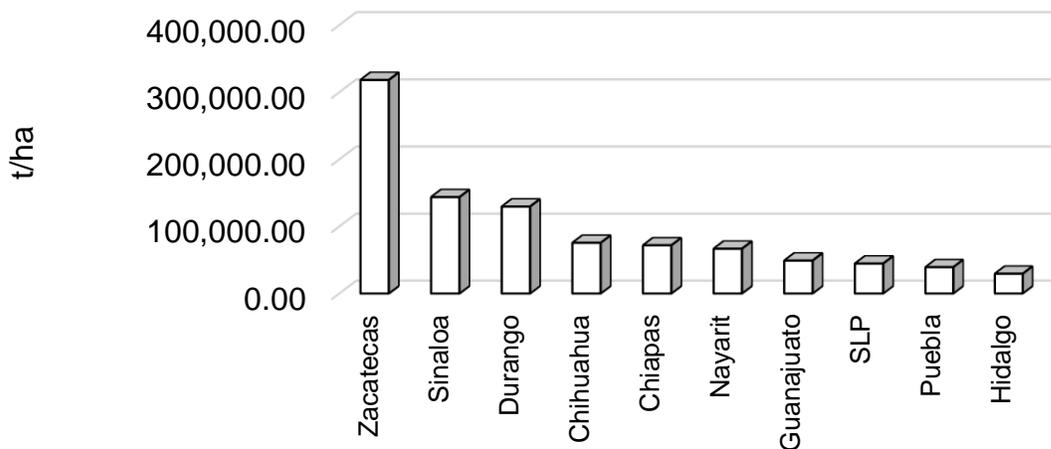


Figura 13. Principales estados productores de frijol seco por volumen de producción (Promedio 2000-2014).

#### 4.6.3. Principales estados productores de frijol seco por rendimiento obtenido

En general a nivel nacional, el rendimiento promedio obtenido de frijol es bajo, lo que constituye un reto para la investigación y desarrollo para el sector agrícola. Se obtuvieron en promedio, durante 2000-2014, 0.7 t/ha dato menor al de la media mundial de 1.3 t/ha.

En la Figura 14 se muestran los estados con los mayores rendimientos obtenidos de frijol, siendo Sinaloa, Sonora y BCS los que superaron ligeramente al rendimiento promedio mundial obtenido, por el contrario, Morelos; Nayarit, Colima, Michoacán, BC, Jalisco y Tlaxcala que obtuvieron altos rendimientos a nivel nacional, pero menores de la media mundial (SIACON, 2014).

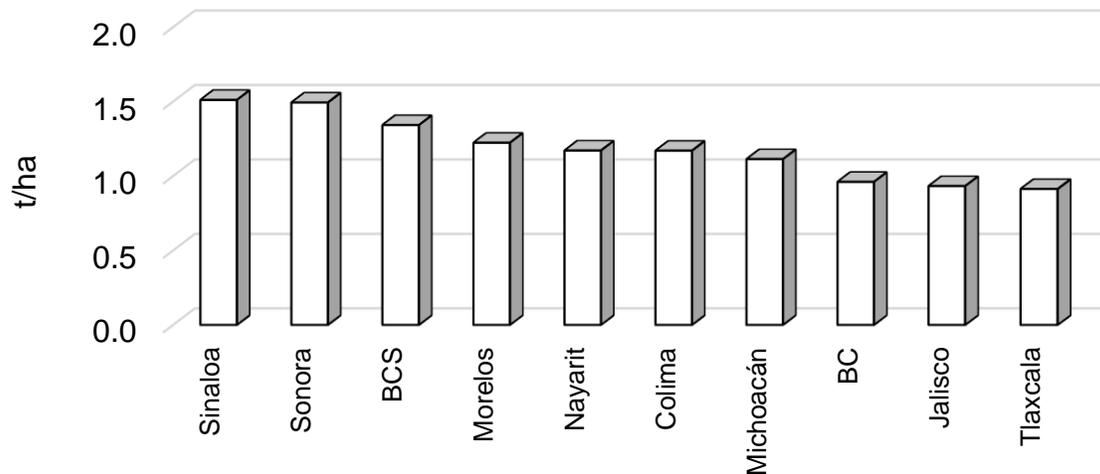


Figura 14. Principales estados productores de frijol seco por rendimiento (Promedio 2000-2014).

#### 4.6.4. Principales estados productores de frijol seco por precios obtenidos

La tendencia nacional respecto a precios obtenidos por frijol es a la alza; en la Figura 15 se muestran los estados que obtuvieron los mejores precios durante 2014, pesos por tonelada \$/t, dicha lista la encabezó Tabasco con 15,015.68 \$/t, le continuaron Cd. De México; BC, Campeche, Quintana Roo, Colima, Sonora, Sinaloa Edo. México y Veracruz.

Los estados con los precios más bajos pagados al productor fueron Morelos; Chihuahua, Durango, Guanajuato, Tlaxcala, Querétaro, Zacatecas, entre otros, con precios de hasta la mitad del mayor precio obtenido (SIACON, 2014).

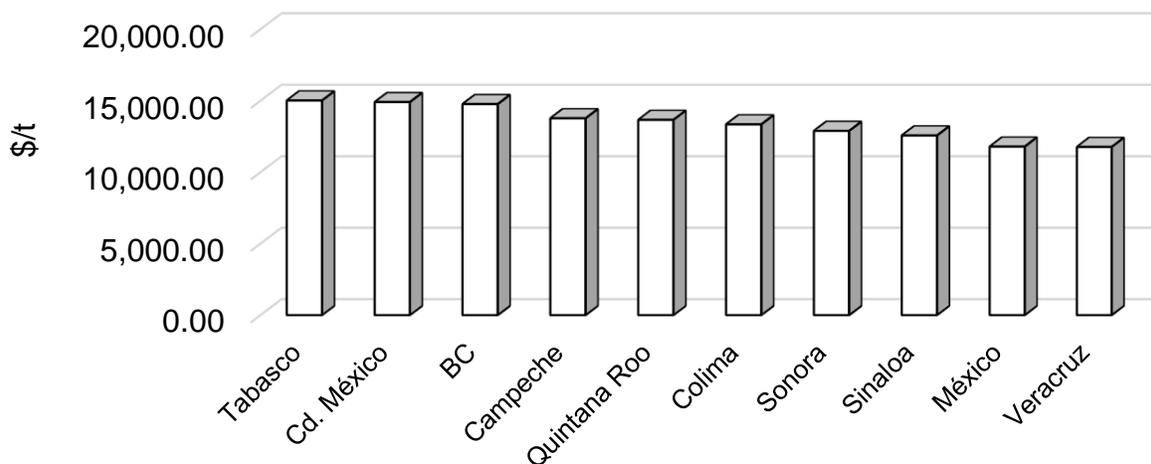


Figura 15. Principales estados productores de frijol seco por precios obtenidos, 2014.

#### 4.7. Principales estados consumidores de frijol, 2014

Los estados con mayor tradición en el consumo de frijol en 2014, Figura 16, fueron en primer lugar Morelos con alrededor del 13 % de las t consumidas, el Edo. de México con 12 % y Tlaxcala con 9 %, les continuaron la Cd. De México; Veracruz, Jalisco, Guanajuato, Chiapas, Nuevo León y Michoacán con menos de 6 %. El resto de los estados registraron menos del 3 % del total de t consumidas (Presidencia de la República, 2014).

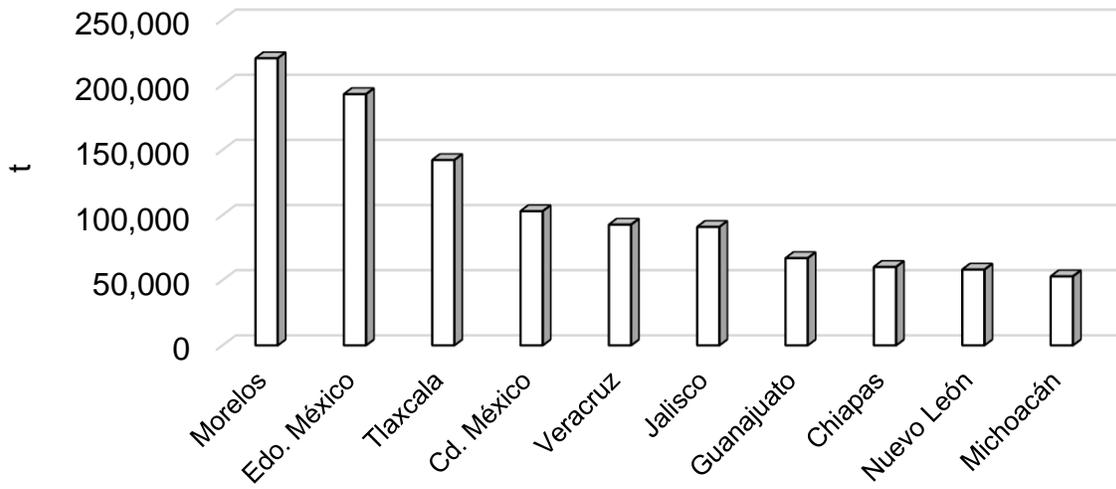


Figura 16. Principales estados consumidores de frijol, 2014.

## CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 5.1. Estados oferentes y demandantes de frijol

Para determinar los estados oferentes y demandantes del frijol en México se calculó la disponibilidad del producto para cada estado, en el Cuadro 1 se muestra este procedimiento, lo cual fue la diferencia entre la producción y el consumo de cada estado, las cantidades positivas indicaron que los estados cubrieron su demanda interna y que aún les quedó para satisfacer la de demanda de otros estados, son estados excedentarios y se les considera como oferentes, orígenes o zonas de producción en un programa de transporte. Las cantidades negativas indicaron que no alcanzaron a cubrir su demanda interna y por lo tanto, en un programa de transporte se les considera como demandantes, destinos o centros de consumo. El Distrito Federal y el Estado de México por su cercanía se consideraron como un solo centro de consumo (INEGI, y Presidencia de la República, 2015; SIACON, 2014).

Cuadro 1. *Estados oferentes y demandantes de frijol, 2014.*

Estado	Producción (t) 2014	Población (miles) 2014	Consumo per cápita 2014	Consumo estatal (t)	Disponibilidad
Aguascalientes	5,399.75	1,270.2	10.8	13,718.16	-8,318.41
Baja California	15.75	3,432.9	10.8	37,075.32	-37,059.57
Baja California Sur	2,494.03	741.0	10.8	8,002.80	-5,508.77
Campeche	1,965.16	894.1	10.8	9,656.28	-7,691.12
Chiapas	61,412.08	5,186.6	10.8	56,015.28	5,396.80
Chihuahua	124,764.0	3,673.3	10.8	39,671.64	85,093.26
Coahuila	2,737.30	2,925.6	10.8	31,596.48	-28,859.18
Colima	44.5	711.0	10.8	7,678.80	-7,634.30
Cd. de México	93.86	8,874.7	10.8	95,846.76	-95,752.90
Durango	192,157.7	1,746.8	10.8	18,865.44	173,292.31
Guanajuato	57,023.82	5,769.5	10.8	62,310.60	-5,286.78
Guerrero	12,387.93	3,546.7	10.8	38,304.36	-25,916.43
Hidalgo	25,219.10	2,842.8	10.8	30,702.24	-5,483.14

Jalisco	10,220.92	7,838.0	10.8	84,650.40	-74,429.48
Michoacán	7,701.74	4,563.8	10.8	49,289.04	-41,587.30
Morelos	1,455.32	1,897.4	10.8	20,491.92	-19,036.60
México	8,776.09	16,618.9	10.8	179,484.12	-170,708.03
Nayarit	54,756.49	1,201.2	10.8	12,972.96	41,783.53
Nuevo León	2,509.00	5,013.6	10.8	54,146.88	-51,637.88
Oaxaca	27,873.94	3,986.2	10.8	43,050.96	-15,177.02
Puebla	43,075.68	6,131.5	10.8	66,220.20	-23,144.52
Querétaro	8,676.93	1,974.4	10.8	21,323.52	-12,646.59
Quintana Roo	1,240.15	1,529.9	10.8	16,522.92	-15,282.77
San Luis Potosí.	59,818.46	2,728.2	10.8	29,464.56	30,353.90
Sinaloa	161,520.4	2,958.7	10.8	31,953.96	129,566.49
Sonora	11,931.05	2,892.5	10.8	31,239.00	-19,307.95
Tabasco	1,859.02	2,359.4	10.8	25,481.52	-23,622.50
Tamaulipas	2,192.33	3,502.7	10.8	37,829.16	-35,636.83
Tlaxcala	4,597.40	1,260.6	10.8	13,614.48	-9,017.08
Veracruz	24,077.07	7,985.9	10.8	86,247.72	-62,170.65
Yucatán	77.01	2,091.5	10.8	22,588.20	-22,511.19
Zacatecas	355,882.6	1,563.3	10.8	16,883.64	338,998.52

## 5.2. Participación porcentual por estado (oferente o demandante) de frijol

En el Cuadro 2 se muestra la participación porcentual como estado oferente o demandante de frijol a nivel nacional, donde el estado de México y la Ciudad de México, Jalisco, Michoacán, Baja California, Coahuila y Guerrero son los estados con la mayor demanda porcentual de frijol, los estados con mayor oferta porcentual son Zacatecas, Durango, Sinaloa y Chihuahua.

Cuadro 2. *Participación porcentual en el mercado nacional del frijol.*

Estado demandante	%	Estado demandante	%	Estado oferente	%
Aguascalientes	1.0	Morelos	2.3	Chiapas	0.7
Baja California	4.5	Nuevo León	6.3	Chihuahua	10.6
Baja California Sur	0.7	Oaxaca	1.8	Durango	21.5

Campeche	0.9	Puebla	2.8	Nayarit	5.2
Coahuila	3.5	Querétaro	1.5	San Luis Potosí	3.8
Colima	0.9	Quintana Roo	1.9	Sinaloa	16.1
Edo. y Cd. de México	32.4	Sonora	2.3	Zacatecas	42.1
Guanajuato	0.6	Tabasco	2.9		
Guerrero	3.1	Tamaulipas	4.3		
Hidalgo	0.7	Tlaxcala	1.1		
Jalisco	9.0	Veracruz	7.6		
Michoacán	5.1	Yucatán	2.7		

### 5.3. Matriz de distancias origen-destino y las cantidades demandadas y ofrecidas

Con la definición de estados oferentes y demandantes, en el Cuadro 3 se procedió a tabular la información de distancias desde los diferentes destinos (de 1 a 24) a los diversos orígenes (de A a G), colocando en cada origen la cantidad ofrecida y en cada destino la cantidad demandada (Yotellevo, 2016).

Las distancias más grandes se hacen, generalmente, de los orígenes A y B (Chiapas y Chihuahua) a la mayoría de los destinos, ya que son los estados productores localizados en los extremos opuestos del país.

Cuadro 3. *Matriz de distancias origen-destino y las cantidades demandadas y ofrecidas.*

Origen Destino	A	B	C	D	E	F	G	Demanda (t).
1	1,484	1,198	402	479	142	994	281	8,318.4
2	3,780	1,263	2,055	1,976	2,355	1,402	2,121	37,059.6
3	2,649	1,061	972	884	1,278	313	1,029	5,508.8

4	414	2,745	1,947	1,866	1,619	2,419	1,828	7,691.1
5	1,959	719	174	662	474	829	368	28,859.2
6	1,715	1,558	760	444	554	997	640	7,634.3
7	978	1,701	903	815	575	1,368	783	266,460.9
8	1,360	1,324	526	482	257	1,040	410	5,286.8
9	1,098	2,065	1,267	1,124	939	1,691	1,147	25,916.4
10	1,005	1,698	896	819	572	1,376	780	5,483.1
11	1,523	1,419	571	264	362	824	498	74,429.5
12	1,286	1,520	723	549	463	1,107	601	41,587.3
13	976	1,790	992	894	664	1,462	871	19,036.6
14	1,896	1,074	537	1,024	494	1,191	613	51,637.9
15	690	2,136	1,338	1,257	1,010	1,810	1,218	15,177.0
16	869	1,812	1,014	932	686	1,486	893	23,144.5
17	1,190	1,487	689	611	342	1,164	569	12,646.6
18	952	3,281	2,483	2,402	2,155	2,955	2,363	15,282.8
19	2,872	641	1,195	1,107	1,501	536	1,252	19,307.9
20	264	2,424	1,626	1,545	1,298	2,098	1,506	23,622.5
21	1,174	1,585	901	999	573	1,495	781	35,636.8
22	915	1,783	985	904	657	1,458	865	9,017.1
23	805	1,939	1,141	1,060	813	1,613	1,021	62,170.6
24	655	2,991	2,193	2,104	1,865	2,666	2,073	22,511.2
Oferta (t).	5,396.8	85,093.1	173,292.3	41,783.5	30,353.9	129,566.5	338,998.5	

#### 5.4. Planteamiento del modelo de asignación óptima de la producción y la demanda no satisfecha: primer modelo

Se formuló un modelo de optimización de transporte, buscando minimizar las distancias que se tienen que recorrer para satisfacer la demanda de los centros de consumo a partir de la oferta de los centros de producción. Se resolvió el modelo mediante el programa LINDO generando los resultados observados en el Cuadro 4.

También, se observa que la totalidad de la cantidad ofrecida es asignada, quedando cubierto el requisito de colocar toda la oferta. Así, Chiapas asigna su producción excedentaria a cubrir una parte de la demanda de Yucatán; Chihuahua satisface el

requerimiento total de Baja California y parcialmente los requerimientos de Nuevo León y Sonora; Durango satisface completamente la demanda de Coahuila, Guanajuato, Hidalgo, Nuevo León, Tabasco y Tamaulipas y parcialmente las necesidades de Oaxaca y Veracruz; Nayarit satisface completamente a Guerrero y parcialmente a Jalisco; SLP cubre la demanda de los estados de Campeche, Querétaro, Tlaxcala y junto con Durango satisface la demanda de Veracruz; Sinaloa asigna su producción excedentaria a cubrir la demanda de BCS, Colima y Michoacán, y junto con Nayarit satisface a Jalisco y junto con Chihuahua satisface a Sonora; Zacatecas satisface la demanda de Aguascalientes, Distrito Federal, Estado de México, Morelos y Puebla, su producción restante se asigna a Yucatán, a quien no se le cubre la demanda en su totalidad en esta primera asignación. Los estados que quedan sin satisfacer la totalidad de su demanda son Quintana Roo y Yucatán.

Son cuatro estados del norte del país los grandes productores y proveedores de frijol al resto de los estados, esto debido a sus grandes extensiones agrícolas y a su baja densidad poblacional comparado con la media nacional, se observa que tan solo Zacatecas y Durango aportan más del 60% de la producción nacional. Zacatecas es una región productora estratégica para satisfacer el mercado nacional más grande: la Ciudad de México y el Estado de México, no obstante que la distancia que los separa es levemente mayor que el de SLP, el modelo asigna la producción de este último a satisfacer las necesidades de los estados deficitarios del centro: Querétaro y Tlaxcala y a Campeche y Veracruz, que quedan más distantes de Zacatecas.

Nayarit y Sinaloa se encargan de satisfacer la demanda de la región occidente de México. Ver Anexo A.

Cuadro 4. *Asignación óptima de la producción y la demanda no satisfecha.*

Origen	Oferta (t)	Destino	Demanda (t)	Asignado (t)	Demanda no satisfecha <sup>a/</sup> (t)
A	5396.8	24	22,511.19	5,396.80	17,114.39 <sup>b/</sup>
B	85093.26	2	37,059.57	37,059.57	0.00
		14	51,637.88	44,999.48	6,638.40 <sup>b/</sup>
		19	19,307.95	3,034.21	16,273.74 <sup>b/</sup>
C	173292.31	5	28,859.18	28,859.18	0.00
		8	5,286.78	5,286.78	0.00
		10	5,483.14	5,483.14	0.00
		14	6,638.40	6,638.40	0.00
		15	15,177.02	6,593.94	8,583.08 <sup>b/</sup>
		20	23,622.50	23,622.50	0.00
		21	35,636.83	35,636.83	0.00
		23	62,170.65	61,171.54	999.11 <sup>b/</sup>
D	41783.53	9	25,916.43	25,916.43	0.00
		11	74,429.48	15,867.10	58,562.38 <sup>b/</sup>
E	30353.9	4	7,691.12	7,691.12	0.00
		17	12,646.59	12,646.59	0.00
		22	9,017.08	9,017.08	0.00
		23	999.11	999.11	0.00
F	129566.49	3	5,508.77	5,508.77	0.00
		6	7,634.30	7,634.30	0.00
		11	58,562.38	58,562.38	0.00
		12	41,587.30	41,587.30	0.00
		19	16,273.74	16,273.74	0.00
G	338998.52	1	8,318.41	8,318.41	0.00
		7	266460.93	266,460.93	0.00
		13	19,036.60	19,036.60	0.00
		15	8,583.08	8,583.08	0.00
		16	23,144.52	23,144.52	0.00
		24	17,114.39	13,454.98	3,659.41
		18	15,282.77		15,282.77
<b>Total</b>	<b>804,484.81</b>		<b>823,426.99</b>	<b>804,484.81</b>	<b>18,942.18</b>

Notas: a/ Es la diferencia de las columnas 4 y 5.

b/ Se cubre el faltante desde otro origen.

## 5.5. Estados con producción potencial disponible

De la primera asignación óptima los estados que quedan sin satisfacer la totalidad de su demanda son Quintana Roo y Yucatán, a estos se les buscó cubrir el déficit mediante su producción potencial disponible.

En el Cuadro 5 se observa que de los estados analizados (los oferentes y los que presentan demanda insatisfecha) los que mayor producción potencial presentan son: Zacatecas, Sinaloa y SLP; no obstante, los estados deficitarios en cuestión también presentan una producción potencial.

Cuadro 5. *Producción potencial disponible.*

Estado	Superficie máxima sembrada (ha)	Rendimiento máximo (t/ha)	Producción potencial <sup>a/</sup> (t)	Producción 2014 (t)	Producción potencial disponible <sup>b/</sup> (t)
Chiapas	119,972.55 (2009)	0.62 (2004)	74,382.98	61,412.08	12,970.90
Chihuahua	166,666.00 (2001)	0.97 (2005)	161,666.02	124,764.90	36,901.12
Durango	291,240.46 (2001)	0.82 (2006)	238,817.18	192,157.75	46,659.43
Nayarit	58,749.77 (2013)	1.61 (2006)	94,587.13	54,756.49	39,830.64
Q. Roo	3,560.50 (2011)	1.2 (2001)	4,272.60	1,240.15	3,032.45
S. L. P.	134,586.30 (2002)	1.08 (2009)	145,353.20	59,818.46	85,534.74
Sinaloa	146,658.57 (2010)	1.73 (2009)	253,719.33	161,520.45	92,198.88
Yucatán	955 (2010)	2.94 (2004)	2,807.70	77.01	2,730.69
Zacatecas	768,105.00 (2002)	0.79 (2009)	606,802.95	355,882.16	250,920.79

Notas: a/ es el producto de la superficie máxima por el rendimiento máximo.

b/ Es la diferencia entre la producción potencial y la producción de 2014.

## 5.6. Asignación del producto potencial

En el Cuadro 6 se muestra la asignación del producto potencial de Quintana Roo y Yucatán. Quintana Roo con su producción potencial disponible reduce su déficit a 12,250.32 ton, mientras que a Yucatán tan solo le faltarían 928.72 ton para satisfacer su demanda.

Cuadro 6. *Asignación del producto potencial.*

Destino	Demanda (t)	Producción potencial disponible (t)	Faltante (t)
18. Q. Roo	15,282.77	3,032.45	12,250.32
24. Yucatán	3,659.41	2,730.69	928.72
Total	18,942.18	5,763.14	13,179.04

### 5.7. Replanteamiento del modelo de asignación: segundo modelo

Una vez incorporada la producción potencial de los estados deficitarios a su demanda insatisfecha y ver que aún falta demanda por cubrir, se propuso realizar un nuevo modelo de asignación para hacer una asignación óptima de la producción potencial a los estados que después de dos asignaciones aún no satisfacen su demanda al 100%, en el Cuadro 7, involucrando la producción potencial disponible de los estados oferentes iniciales, a fin de satisfacer la demanda que no se alcanzó a cubrir con la producción potencial de los estados de Quintana Roo y Yucatán. Ver Anexo B.

Cuadro 7. *Matriz de distancias, demanda insatisfecha y oferta potencial.*

Destino \ Origen	18. Quintana Roo	24. Yucatán	Oferta potencial disponible
A. Chiapas	952	655	12970.9
B. Chihuahua	3281	2991	36901.12
C. Durango	2483	2193	46659.43
D. Nayarit	2402	2104	39830.64
E. San Luis Potosí.	2155	1865	85534.74
F. Sinaloa	2955	2666	92,198.88
G. Zacatecas	2363	2073	250920.79
Demanda Insatisfecha	12250.32	928.72	

### 5.8. Asignación óptima de la producción potencial disponible

En el Cuadro 8 se observa que la oferta potencial de Chiapas cubre la totalidad de la demanda insatisfecha de Yucatán y una parte de la demanda de Quintana Roo, a este último se le cubre el déficit con una parte de la oferta potencial de SLP, de esta forma queda balanceada la oferta y demanda del mercado de frijol en México.

Cuadro 8. *Asignación óptima de la producción potencial disponible.*

Origen	Oferta (t)	Destino	Demanda (t)	Asignado (t)	Faltante (t)
A	12970.9	18	12250.32	12042.18	208.14 <sup>a/</sup>
		24	928.72	928.72	0
B	36901.12				
C	46659.43				
D	39830.64				
E	85534.74	18	208.14	208.14	0
F	92,198.88				
G	250920.79				

Nota: a/ se satisface con la oferta del origen E.

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

### **Conclusiones**

México es uno de los grandes productores de frijol a nivel mundial, además tiene potencial productivo para aumentar el rendimiento actual y disminuir las importaciones realizadas de dicha leguminosa.

Después del maíz, el frijol es uno de los cultivos más importantes de México por su inclusión en la cocina mexicana y por la cantidad de superficie sembrada, esto reviste importancia cultural, nutricional y económica de la leguminosa en el país.

El Método de transporte de la Programación Lineal es una excelente herramienta para establecer modelos de distribución que minimicen los costos de operación de cubrir la demanda de los centros de consumo a partir de las zonas de producción, que en su mayoría son distantes y dispersas.

Dada la dificultad de obtener información de los costos de transporte unitarios, optimizar la distribución basada en distancias es una buena aproximación que lleva a generar un buen modelo de asignación óptima.

Los estados productores de frijol caracterizados como centros origen de la zona norte de México, con excepción de Durango y Chihuahua, son los principales proveedores de la demanda interna de frijol del centro y sur del país. La región productora de Chihuahua encuentra mercado en los estados del norte y noroeste del país, mientras que Durango reparte su producción al norte, noreste centro y sur de México.

La producción de Sinaloa y Nayarit es importante en cantidad y estrategia, ya que cubre la demanda de la zona occidente y noreste de México.

A nivel nacional, Zacatecas es el centro de origen con la mayor oferta disponible de frijol satisfaciendo gran parte de la demanda interna del frijol.

Todos los estados de la República tienen una producción potencial disponible, sobre todo los estados productores de frijol por excelencia, si se produjera con base a esta capacidad potencial se cubriría la demanda nacional sin problema alguno.

### **Recomendaciones**

Que la política agrícola induzca incentivando la producción potencial del frijol en los estados con demanda insatisfecha y en aquellos que tienen vocación productiva y recursos para ello.

Para contribuir a lo establecido en el Plan Nacional de Desarrollo, en particular en los objetivos de superación de la pobreza, la promoción en el uso de frijol, por su alto contenido proteico, permitirá abatir la desnutrición y marginación social de la población mexicana.

Se recomienda crear programas de mejora de imagen del frijol, de información y desmitificación como un cultivo “de no adinerados”, para el provecho de sus propiedades proteicas y económicas en el país.

El modelo de distribución óptimo se debe considerar como base en la toma de decisiones en materia de política agrícola.

Se sugiere que para futuras investigaciones el modelo de distribución óptima de frijol también incluya los costos de traslado (flete) de las zonas de producción a los centros de consumo a fin de formular un modelo más completo.

## LISTA DE REFERENCIAS

- Feitó M., Cespón, R., y Rubio, M. A. (2016). Modelos de optimización para el diseño sostenible de cadenas de suministros de reciclaje de múltiples productos. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 24(1), pp. 135-148. Recuperado de <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-33052016000100013>
- Food and Agriculture Organization of the United Nations. (1999). Phaseolus vean: Post-harvest operations. Recuperado de <http://www.fao.org/documents/card/es/c/f961bcd6-85db-405e-af70-3ed044f1b1d7/>
- Food and Agriculture Organization of the United Nations. (2016a). Production. Recuperado de <http://fenix.fao.org/faostat/beta/en/#data/QC>
- Food and Agriculture Organization of the United Nations. (2016b). Export quantity. Recuperado de <p://fenix.fao.org/faostat/beta/en/?#data/TP>
- Food and Agriculture Organization of the United Nations. (2016c). Import quantity. Recuperado de <http://fenix.fao.org/faostat/beta/en/?#data/TP>
- Food and Agriculture Organization of the United Nations. (2016d) Yield. Recuperado de <http://fenix.fao.org/faostat/beta/en/#data/QC>
- Gómez, A. A. y García, N. G. (2013). Aplicación de un modelo de equilibrio espacial para determinar la estructura del mercado de maíz blanco en México. *TECSISTECATL. Revista electrónica de Ciencias Sociales*, 4(1), pp. 1-9. Recuperado [www.eumed.net/rev/tecsistecatln15/maiz-blanco.pdf](http://www.eumed.net/rev/tecsistecatln15/maiz-blanco.pdf)

- Gutiérrez, Z. J. A. (2015). *Elaboración de un modelo de transporte de costo mínimo para sorgo en grano (Sorghum vulgare), en México* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma Chapingo, Estado de México.
- Guzmán, E. V., Sánchez, S. y Calderón, C. (2012). Estudio de caso de la empresa Celanese Corporation y el uso del modelo de transporte para minimizar costos. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *n.d.*(8), pp. 1-16. Recuperado de <http://ride.org.mx/1-11/index.php/RIDASECUNDARIO/article/viewFile/1/1>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (2015). Población en México. <http://www.inegi.org.mx/>
- Jansson, T., & Heckelei, T. (2004). Estimation of a transportation model using a mathematical program with equilibrium constraints. Artículo presentado en The 7th anual conference on global economic analysis. The World Bank, Washington D. C. Recuperado de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.528.1151&rep=rep1&type=pdf>
- Lesourne, J., Orléan, A., & Walliser, B. (2006). *Evolutionary Microeconomics*. Heidelberg, Alemania: Springer Berlin.
- López, F., y Arana, G. (2002). La dualidad en el problema de transporte. Artículo presentado en la II Conferencia de Ingeniería de Organización. España. Recuperado de [https://www.researchgate.net/profile/German\\_Arana/publication/266890753\\_La\\_Dualidad\\_en\\_el\\_Problema\\_de\\_Transporte/links/547852180cf2a961e4852d53.pdf](https://www.researchgate.net/profile/German_Arana/publication/266890753_La_Dualidad_en_el_Problema_de_Transporte/links/547852180cf2a961e4852d53.pdf)

- López, J. A., Olgún, J. E., y Camargo, C. (2008). Modelo matemático de transporte aplicado a una compañía dedicada a la manufactura y distribución de juguetes, usando programación lineal entera. *Revista Ingeniería Industrial*, *n.d.*(2), pp. 65-72. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5010385.pdf>
- Medina, S. V., Raya, K., y Contreras, M. R. (2007). Utilización del modelo de transporte para la asignación de trabajos a máquinas considerando prioridades. *Ingeniería*, 11(2), pp. 47-55. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/467/46711206.pdf>
- Meneu, R., Pérez-Salamero, J. M., y Ventura, M. (1999). *Fundamentos de optimización matemática en Economía. Programación no lineal*. España: Repro-exprés, S. L.
- Mocholi, M., y Sala, R. (1993). *Programación lineal metodología y problemas*. España: Tebar Flores, S. L.
- Presidencia de la República (2014). Anexo estadístico del 2do. Informe de gobierno. Recuperado de <http://www.presidencia.gob.mx/segundoinforme/>
- Presidencia de la República. (2015). Anexo estadístico del 3er. Informe de gobierno. Recuperado de <http://www.presidencia.gob.mx/tercerinforme/>
- Reyes, A. M.O. (2013). *Modelo de transporte de costo mínimo para cebolla en México* (Tesis de doctorado). Universidad Autónoma Chapingo, Estado de México.
- Reyes, R. E. (2008). Historia, naturaleza y cualidades alimentarias del frijol. *Revista Investigación Científica*, Vol. 4, No.3, Nueva época, septiembre-diciembre 2008, ISSN 1870-8196.

- Rojas, A. A. (2011). Distribución del trigo en México mediante el modelo de transporte, Capítulo de libro en “Investigación en Economía, Matemáticas, Física y sus Aplicaciones”. ISBN 978-607-12-0231-4, México (Págs. 337-345).
- Sánchez, I., y Quintas, I. (2012). Programación lineal: El modelo, las aplicaciones y la interpretación. Recuperado de [http://bidi.xoc.uam.mx/tabla\\_contenido\\_libro.php?id\\_libro=361](http://bidi.xoc.uam.mx/tabla_contenido_libro.php?id_libro=361)
- Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014a). Superficie sembrada nacional de frijol. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>
- Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014b). Volumen de producción nacional de frijol. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>
- Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014c). Rendimiento nacional de frijol. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>
- Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014d). Precio nacional de frijol seco. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>
- Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014e). Principales estados productores de frijol seco por superficie sembrada. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>
- Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014f). Principales estados productores de frijol seco por volumen de producción. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>

Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014g). Principales estados productores de frijol seco por rendimiento obtenido. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>

Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014h). Principales estados productores de frijol seco por precios obtenidos. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>

Sistema de información Agroalimentaria de Consulta. (2014i). Principales estados consumidores de frijol, 2014. Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>

Sistema de información Agroalimentaria de Consulta (2014j). Producción nacional por estados Recuperado de <http://www.gob.mx/siap/optestadisticasiacon2014parcialasiacon-zip/>

Taha, H. A. (2001). *Operations research: An Introducion*. Recuperado de <https://jrvargas.files.wordpress.com/2009/01/investigacion-de-operaciones-9na-edicion-hamdy-a-taha-fl.pdf>

Toxqui, T. O. (2013). *Modelo de transporte de maíz blanco (Zea mays L.) en México* (Tesis de doctorado) Universidad Autónoma Chapingo, Estado de México.

Valdovinos, C. V. R. (1995). *Elementos de programación matemática*: Universidad Autónoma Chapingo, Estado de México.

Velasco, O. P., Scuriatti, L. E., y Velasco, P. I. (2011). *Notas en Turismo y Economía: Equilibrio y fuerzas de mercado*. Recuperado de [http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/27080/Documento\\_completo.pdf?sequence=1](http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/27080/Documento_completo.pdf?sequence=1)

Vial, B. y Zurita, F. (2006). Microeconomía Intermedia. Recuperado de <http://docplayer.es/1438825-Microeconomia-intermedia-bernardita-vial-felipe-zurita-trabajo-docente-no-73-version-revisada-santiago-julio-2007.html>

Yotellevo (2016, Noviembre). Rutas por carretera. Recuperado de <http://www.yotellevo.mx/>

## ANEXOS

### Anexo A: primer modelo.

MIN C 1484XA1 + 3780XA2 + 2649XA3 + 414XA4 + 1959XA5 + 1715XA6 + 978XA7 + 1360XA8 + 1098XA9 + 1005XA10 + 1523XA11 + 1286XA12 + 976XA13 + 1896XA14 + 690XA15 + 869XA16 + 1190XA17 + 952XA18 + 2872XA19 + 264XA20 + 1174XA21 + 915XA22 + 805XA23 + 655XA24 + 1198XB1 + 1263XB2 + 1061XB3 + 2745XB4 + 719XB5 + 1558XB6 + 1701XB7 + 1324XB8 + 2065XB9 + 1698XB10 + 1419XB11 + 1520XB12 + 1790XB13 + 1074XB14 + 2136XB15 + 1812XB16 + 1487XB17 + 3281XB18 + 641XB19 + 2424XB20 + 1585XB21 + 1783XB22 + 1939XB23 + 2991XB24 + 402XC1 + 2055XC2 + 972XC3 + 1947XC4 + 174XC5 + 760XC6 + 903XC7 + 526XC8 + 1267XC9 + 896XC10 + 571XC11 + 723XC12 + 992XC13 + 537XC14 + 1338XC15 + 1014XC16 + 689XC17 + 2483XC18 + 1195XC19 + 1626XC20 + 901XC21 + 985XC22 + 1141XC23 + 2193XC24 + 479XD1 + 1976XD2 + 884XD3 + 1866XD4 + 662XD5 + 444XD6 + 815XD7 + 482XD8 + 1124XD9 + 819XD10 + 264XD11 + 549XD12 + 894XD13 + 1024XD14 + 1257XD15 + 932XD16 + 611XD17 + 2402XD18 + 1107XD19 + 1545XD20 + 999XD21 + 904XD22 + 1060XD23 + 2104XD24 + 142XE1 + 2355XE2 + 1278XE3 + 1619XE4 + 474XE5 + 554XE6 + 575XE7 + 257XE8 + 939XE9 + 572XE10 + 362XE11 + 463XE12 + 664XE13 + 494XE14 + 1010XE15 + 686XE16 + 342XE17 + 2155XE18 + 1501XE19 + 1298XE20 + 573XE21 + 657XE22 + 813XE23 + 1865XE24 + 994XF1 + 1402XF2 + 313XF3 + 2419XF4 + 829XF5 + 997XF6 + 1368XF7 + 1040XF8 + 1691XF9 + 1376XF10 + 824XF11 + 1107XF12 + 1462XF13 + 1191XF14 + 1810XF15 + 1486XF16 + 1164XF17 + 2955XF18 + 536XF19 + 2098XF20 + 1495XF21 + 1458XF22 + 1613XF23 + 2666XF24 + 281XG1 + 2121XG2 + 1029XG3 + 1828XG4 + 368XG5 + 640XG6 + 783XG7 + 410XG8 + 1147XG9 + 780XG10 + 498XG11 + 601XG12 + 871XG13 + 613XG14 + 1218XG15 + 893XG16 + 569XG17 + 2363XG18 + 1252XG19 + 1506XG20 + 781XG21 + 865XG22 + 1021XG23 + 2073XG24

SUBJECT TO XA1 + XA2 + XA3 + XA4 + XA5 + XA6 + XA7 + XA8 + XA9 + XA10 + XA11 + XA12 + XA13 + XA14 + XA15 + XA16 + XA17 + XA18 + XA19 + XA20 + XA21 + XA22 + XA23 + XA24 = 5396.8

XB1 + XB2 + XB3 + XB4 + XB5 + XB6 + XB7 + XB8 + XB9 + XB10 + XB11 + XB12 + XB13 + XB14 + XB15 + XB16 + XB17 + XB18 + XB19 + XB20 + XB21 + XB22 + XB23 + XB24 = 85093.26

XC1 + XC2 + XC3 + XC4 + XC5 + XC6 + XC7 + XC8 + XC9 + XC10 + XC11 + XC12 + XC13 + XC14 + XC15 + XC16 + XC17 + XC18 + XC19 + XC20 + XC21 + XC22 + XC23 + XC24 = 173292.31

XD1 + XD2 + XD3 + XD4 + XD5 + XD6 + XD7 + XD8 + XD9 + XD10 + XD11 + XD12 + XD13 + XD14 + XD15 + XD16 + XD17 + XD18 + XD19 + XD20 + XD21 + XD22 + XD23 + XD24 = 41783.53

XE1 + XE2 + XE3 + XE4 + XE5 + XE6 + XE7 + XE8 + XE9 + XE10 + XE11 + XE12 + XE13 + XE14 + XE15 + XE16 + XE17 + XE18 + XE19 + XE20 + XE21 + XE22 + XE23 + XE24 = 30353.9

XF1 + XF2 + XF3 + XF4 + XF5 + XF6 + XF7 + XF8 + XF9 + XF10 + XF11 + XF12 + XF13 + XF14 + XF15 + XF16 + XF17 + XF18 + XF19 + XF20 + XF21 + XF22 + XF23 + XF24 = 129566.49

$$\begin{aligned} & XG1 + XG2 + XG3 + XG4 + XG5 + XG6 + XG7 + XG8 + XG9 + XG10 + XG11 + XG12 + XG13 \\ & + XG14 + XG15 + XG16 + XG17 + XG18 + XG19 + XG20 + XG21 + XG22 + XG23 + XG24 = \\ & 338998.52 \end{aligned}$$

$$XA1 + XB1 + XC1 + XD1 + XE1 + XF1 + XG1 \leq 8318.41$$

$$XA2 + XB2 + XC2 + XD2 + XE2 + XF2 + XG2 \leq 37059.57$$

$$XA3 + XB3 + XC3 + XD3 + XE3 + XF3 + XG3 \leq 5508.77$$

$$XA4 + XB4 + XC4 + XD4 + XE4 + XF4 + XG4 \leq 7691.12$$

$$XA5 + XB5 + XC5 + XD5 + XE5 + XF5 + XG5 \leq 28859.18$$

$$XA6 + XB6 + XC6 + XD6 + XE6 + XF6 + XG6 \leq 7634.3$$

$$XA7 + XB7 + XC7 + XD7 + XE7 + XF7 + XG7 \leq 266460.93$$

$$XA8 + XB8 + XC8 + XD8 + XE8 + XF8 + XG8 \leq 5286.78$$

$$XA9 + XB9 + XC9 + XD9 + XE9 + XF9 + XG9 \leq 25916.43$$

$$XA10 + XB10 + XC10 + XD10 + XE10 + XF10 + XG10 \leq 5483.14$$

$$XA11 + XB11 + XC11 + XD11 + XE11 + XF11 + XG11 \leq 74429.48$$

$$XA12 + XB12 + XC12 + XD12 + XE12 + XF12 + XG12 \leq 41587.3$$

$$XA13 + XB13 + XC13 + XD13 + XE13 + XF13 + XG13 \leq 19036.6$$

$$XA14 + XB14 + XC14 + XD14 + XE14 + XF14 + XG14 \leq 51637.88$$

$$XA15 + XB15 + XC15 + XD15 + XE15 + XF15 + XG15 \leq 15177.02$$

$$XA16 + XB16 + XC16 + XD16 + XE16 + XF16 + XG16 \leq 23144.52$$

$$XA17 + XB17 + XC17 + XD17 + XE17 + XF17 + XG17 \leq 12646.59$$

$$XA18 + XB18 + XC18 + XD18 + XE18 + XF18 + XG18 \leq 15282.77$$

$$XA19 + XB19 + XC19 + XD19 + XE19 + XF19 + XG19 \leq 19307.95$$

$$XA20 + XB20 + XC20 + XD20 + XE20 + XF20 + XG20 \leq 23622.5$$

$$XA21 + XB21 + XC21 + XD21 + XE21 + XF21 + XG21 \leq 35636.83$$

$$XA22 + XB22 + XC22 + XD22 + XE22 + XF22 + XG22 \leq 9017.08$$

$$XA23 + XB23 + XC23 + XD23 + XE23 + XF23 + XG23 \leq 62170.65$$

$$XA24 + XB24 + XC24 + XD24 + XE24 + XF24 + XG24 \leq 22511.19$$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 55

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.7217891E+09

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
C	0.000000	1.000000
XA1	0.000000	2621.000000
XA2	0.000000	4592.000000
XA3	0.000000	4306.000000
XA4	0.000000	5.000000
XA5	0.000000	3323.000000
XA6	0.000000	2688.000000
XA7	0.000000	1613.000000
XA8	0.000000	2372.000000
XA9	0.000000	1384.000000
XA10	0.000000	1647.000000
XA11	0.000000	2669.000000
XA12	0.000000	2149.000000
XA13	0.000000	1523.000000
XA14	0.000000	2897.000000
XA15	0.000000	890.000000
XA16	0.000000	1394.000000
XA17	0.000000	2058.000000
XA18	0.000000	297.000000
XA19	0.000000	4306.000000
XA20	0.000000	176.000000
XA21	0.000000	1811.000000
XA22	0.000000	1468.000000

XA23	0.000000	1202.000000
XA24	5396.799805	0.000000
XB1	0.000000	260.000000
XB2	37059.570312	0.000000
XB3	0.000000	643.000000
XB4	0.000000	261.000000
XB5	0.000000	8.000000
XB6	0.000000	456.000000
XB7	0.000000	261.000000
XB8	0.000000	261.000000
XB9	0.000000	276.000000
XB10	0.000000	265.000000
XB11	0.000000	490.000000
XB12	0.000000	308.000000
XB13	0.000000	262.000000
XB14	44999.480469	0.000000
XB15	0.000000	261.000000
XB16	0.000000	262.000000
XB17	0.000000	280.000000
XB18	0.000000	551.000000
XB19	3034.209961	0.000000
XB20	0.000000	261.000000
XB21	0.000000	147.000000
XB22	0.000000	261.000000
XB23	0.000000	261.000000
XB24	0.000000	261.000000
XC1	0.000000	1.000000
XC2	0.000000	1329.000000
XC3	0.000000	1091.000000
XC4	0.000000	0.000000
XC5	28859.179688	0.000000

XC6	0.000000	195.000000
XC7	0.000000	0.000000
XC8	5286.779785	0.000000
XC9	0.000000	15.000000
XC10	5483.140137	0.000000
XC11	0.000000	179.000000
XC12	0.000000	48.000000
XC13	0.000000	1.000000
XC14	6638.399902	0.000000
XC15	6593.939941	0.000000
XC16	0.000000	1.000000
XC17	0.000000	19.000000
XC18	0.000000	290.000000
XC19	0.000000	1091.000000
XC20	23622.500000	0.000000
XC21	35636.828125	0.000000
XC22	0.000000	0.000000
XC23	61171.539062	0.000000
XC24	0.000000	0.000000
XD1	0.000000	206.000000
XD2	0.000000	1378.000000
XD3	0.000000	1131.000000
XD4	0.000000	47.000000
XD5	0.000000	616.000000
XD6	0.000000	7.000000
XD7	0.000000	40.000000
XD8	0.000000	84.000000
XD9	25916.429688	0.000000
XD10	0.000000	51.000000
XD11	15867.099609	0.000000
XD12	0.000000	2.000000

XD13	0.000000	31.000000
XD14	0.000000	615.000000
XD15	0.000000	47.000000
XD16	0.000000	47.000000
XD17	0.000000	69.000000
XD18	0.000000	337.000000
XD19	0.000000	1131.000000
XD20	0.000000	47.000000
XD21	0.000000	226.000000
XD22	0.000000	47.000000
XD23	0.000000	47.000000
XD24	0.000000	39.000000
XE1	0.000000	69.000000
XE2	0.000000	1957.000000
XE3	0.000000	1725.000000
XE4	7691.120117	0.000000
XE5	0.000000	628.000000
XE6	0.000000	317.000000
XE7	0.000000	0.000000
XE8	0.000000	59.000000
XE9	0.000000	15.000000
XE10	0.000000	4.000000
XE11	0.000000	298.000000
XE12	0.000000	116.000000
XE13	0.000000	1.000000
XE14	0.000000	285.000000
XE15	0.000000	0.000000
XE16	0.000000	1.000000
XE17	12646.589844	0.000000
XE18	0.000000	290.000000
XE19	0.000000	1725.000000

XE20	0.000000	0.000000
XE21	0.000000	0.000000
XE22	9017.080078	0.000000
XE23	999.109985	0.000000
XE24	0.000000	0.000000
XF1	0.000000	161.000000
XF2	0.000000	244.000000
XF3	5508.770020	0.000000
XF4	0.000000	40.000000
XF5	0.000000	223.000000
XF6	7634.299805	0.000000
XF7	0.000000	33.000000
XF8	0.000000	82.000000
XF9	0.000000	7.000000
XF10	0.000000	48.000000
XF11	58562.378906	0.000000
XF12	41587.300781	0.000000
XF13	0.000000	39.000000
XF14	0.000000	222.000000
XF15	0.000000	40.000000
XF16	0.000000	41.000000
XF17	0.000000	62.000000
XF18	0.000000	330.000000
XF19	16273.740234	0.000000
XF20	0.000000	40.000000
XF21	0.000000	162.000000
XF22	0.000000	41.000000
XF23	0.000000	40.000000
XF24	0.000000	41.000000
XG1	8318.410156	0.000000
XG2	0.000000	1515.000000

XG3	0.000000	1268.000000
XG4	0.000000	1.000000
XG5	0.000000	314.000000
XG6	0.000000	195.000000
XG7	266460.937500	0.000000
XG8	0.000000	4.000000
XG9	0.000000	15.000000
XG10	0.000000	4.000000
XG11	0.000000	226.000000
XG12	0.000000	46.000000
XG13	19036.599609	0.000000
XG14	0.000000	196.000000
XG15	8583.080078	0.000000
XG16	23144.519531	0.000000
XG17	0.000000	19.000000
XG18	0.000000	290.000000
XG19	0.000000	1268.000000
XG20	0.000000	0.000000
XG21	0.000000	0.000000
XG22	0.000000	0.000000
XG23	0.000000	0.000000
XG24	13454.980469	0.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	0.000000	-655.000000
3)	0.000000	-2730.000000
4)	0.000000	-2193.000000
5)	0.000000	-2065.000000
6)	0.000000	-1865.000000
7)	0.000000	-2625.000000

8)	0.000000	-2073.000000
9)	0.000000	1792.000000
10)	0.000000	1467.000000
11)	0.000000	2312.000000
12)	0.000000	246.000000
13)	0.000000	2019.000000
14)	0.000000	1628.000000
15)	0.000000	1290.000000
16)	0.000000	1667.000000
17)	0.000000	941.000000
18)	0.000000	1297.000000
19)	0.000000	1801.000000
20)	0.000000	1518.000000
21)	0.000000	1202.000000
22)	0.000000	1656.000000
23)	0.000000	855.000000
24)	0.000000	1180.000000
25)	0.000000	1523.000000
26)	15282.769531	0.000000
27)	0.000000	2089.000000
28)	0.000000	567.000000
29)	0.000000	1292.000000
30)	0.000000	1208.000000
31)	0.000000	1052.000000
32)	3659.409912	0.000000

NO. ITERATIONS= 55

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES			
VARIABLE	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	COEF	INCREASE	DECREASE
C	1.000000	INFINITY	1.000000
XA1	1484.000000	INFINITY	2621.000000
XA2	3780.000000	INFINITY	4592.000000
XA3	2649.000000	INFINITY	4306.000000
XA4	414.000000	INFINITY	5.000000
XA5	1959.000000	INFINITY	3323.000000
XA6	1715.000000	INFINITY	2688.000000
XA7	978.000000	INFINITY	1613.000000
XA8	1360.000000	INFINITY	2372.000000
XA9	1098.000000	INFINITY	1384.000000
XA10	1005.000000	INFINITY	1647.000000
XA11	1523.000000	INFINITY	2669.000000
XA12	1286.000000	INFINITY	2149.000000
XA13	976.000000	INFINITY	1523.000000
XA14	1896.000000	INFINITY	2897.000000
XA15	690.000000	INFINITY	890.000000
XA16	869.000000	INFINITY	1394.000000
XA17	1190.000000	INFINITY	2058.000000
XA18	952.000000	INFINITY	297.000000
XA19	2872.000000	INFINITY	4306.000000
XA20	264.000000	INFINITY	176.000000
XA21	1174.000000	INFINITY	1811.000000
XA22	915.000000	INFINITY	1468.000000
XA23	805.000000	INFINITY	1202.000000
XA24	655.000000	5.000000	INFINITY
XB1	1198.000000	INFINITY	260.000000

XB2	1263.000000	244.000000	INFINITY
XB3	1061.000000	INFINITY	643.000000
XB4	2745.000000	INFINITY	261.000000
XB5	719.000000	INFINITY	8.000000
XB6	1558.000000	INFINITY	456.000000
XB7	1701.000000	INFINITY	261.000000
XB8	1324.000000	INFINITY	261.000000
XB9	2065.000000	INFINITY	276.000000
XB10	1698.000000	INFINITY	265.000000
XB11	1419.000000	INFINITY	490.000000
XB12	1520.000000	INFINITY	308.000000
XB13	1790.000000	INFINITY	262.000000
XB14	1074.000000	8.000000	15.000000
XB15	2136.000000	INFINITY	261.000000
XB16	1812.000000	INFINITY	262.000000
XB17	1487.000000	INFINITY	280.000000
XB18	3281.000000	INFINITY	551.000000
XB19	641.000000	15.000000	31.000000
XB20	2424.000000	INFINITY	261.000000
XB21	1585.000000	INFINITY	147.000000
XB22	1783.000000	INFINITY	261.000000
XB23	1939.000000	INFINITY	261.000000
XB24	2991.000000	INFINITY	261.000000
XC1	402.000000	INFINITY	1.000000
XC2	2055.000000	INFINITY	1329.000000
XC3	972.000000	INFINITY	1091.000000
XC4	1947.000000	INFINITY	0.000000
XC5	174.000000	8.000000	INFINITY
XC6	760.000000	INFINITY	195.000000
XC7	903.000000	INFINITY	0.000000
XC8	526.000000	4.000000	INFINITY

XC9	1267.000000	INFINITY	15.000000
XC10	896.000000	4.000000	INFINITY
XC11	571.000000	INFINITY	179.000000
XC12	723.000000	INFINITY	48.000000
XC13	992.000000	INFINITY	1.000000
XC14	537.000000	15.000000	8.000000
XC15	1338.000000	0.000000	0.000000
XC16	1014.000000	INFINITY	1.000000
XC17	689.000000	INFINITY	19.000000
XC18	2483.000000	INFINITY	290.000000
XC19	1195.000000	INFINITY	1091.000000
XC20	1626.000000	0.000000	INFINITY
XC21	901.000000	0.000000	INFINITY
XC22	985.000000	INFINITY	0.000000
XC23	1141.000000	0.000000	0.000000
XC24	2193.000000	INFINITY	0.000000
XD1	479.000000	INFINITY	206.000000
XD2	1976.000000	INFINITY	1378.000000
XD3	884.000000	INFINITY	1131.000000
XD4	1866.000000	INFINITY	47.000000
XD5	662.000000	INFINITY	616.000000
XD6	444.000000	INFINITY	7.000000
XD7	815.000000	INFINITY	40.000000
XD8	482.000000	INFINITY	84.000000
XD9	1124.000000	7.000000	INFINITY
XD10	819.000000	INFINITY	51.000000
XD11	264.000000	2.000000	7.000000
XD12	549.000000	INFINITY	2.000000
XD13	894.000000	INFINITY	31.000000
XD14	1024.000000	INFINITY	615.000000
XD15	1257.000000	INFINITY	47.000000

XD16	932.000000	INFINITY	47.000000
XD17	611.000000	INFINITY	69.000000
XD18	2402.000000	INFINITY	337.000000
XD19	1107.000000	INFINITY	1131.000000
XD20	1545.000000	INFINITY	47.000000
XD21	999.000000	INFINITY	226.000000
XD22	904.000000	INFINITY	47.000000
XD23	1060.000000	INFINITY	47.000000
XD24	2104.000000	INFINITY	39.000000
XE1	142.000000	INFINITY	69.000000
XE2	2355.000000	INFINITY	1957.000000
XE3	1278.000000	INFINITY	1725.000000
XE4	1619.000000	0.000000	INFINITY
XE5	474.000000	INFINITY	628.000000
XE6	554.000000	INFINITY	317.000000
XE7	575.000000	INFINITY	0.000000
XE8	257.000000	INFINITY	59.000000
XE9	939.000000	INFINITY	15.000000
XE10	572.000000	INFINITY	4.000000
XE11	362.000000	INFINITY	298.000000
XE12	463.000000	INFINITY	116.000000
XE13	664.000000	INFINITY	1.000000
XE14	494.000000	INFINITY	285.000000
XE15	1010.000000	INFINITY	0.000000
XE16	686.000000	INFINITY	1.000000
XE17	342.000000	19.000000	INFINITY
XE18	2155.000000	INFINITY	290.000000
XE19	1501.000000	INFINITY	1725.000000
XE20	1298.000000	INFINITY	0.000000
XE21	573.000000	INFINITY	0.000000
XE22	657.000000	0.000000	INFINITY

XE23	813.000000	0.000000	0.000000
XE24	1865.000000	INFINITY	0.000000
XF1	994.000000	INFINITY	161.000000
XF2	1402.000000	INFINITY	244.000000
XF3	313.000000	643.000000	INFINITY
XF4	2419.000000	INFINITY	40.000000
XF5	829.000000	INFINITY	223.000000
XF6	997.000000	7.000000	INFINITY
XF7	1368.000000	INFINITY	33.000000
XF8	1040.000000	INFINITY	82.000000
XF9	1691.000000	INFINITY	7.000000
XF10	1376.000000	INFINITY	48.000000
XF11	824.000000	7.000000	2.000000
XF12	1107.000000	2.000000	INFINITY
XF13	1462.000000	INFINITY	39.000000
XF14	1191.000000	INFINITY	222.000000
XF15	1810.000000	INFINITY	40.000000
XF16	1486.000000	INFINITY	41.000000
XF17	1164.000000	INFINITY	62.000000
XF18	2955.000000	INFINITY	330.000000
XF19	536.000000	31.000000	15.000000
XF20	2098.000000	INFINITY	40.000000
XF21	1495.000000	INFINITY	162.000000
XF22	1458.000000	INFINITY	41.000000
XF23	1613.000000	INFINITY	40.000000
XF24	2666.000000	INFINITY	41.000000
XG1	281.000000	1.000000	INFINITY
XG2	2121.000000	INFINITY	1515.000000
XG3	1029.000000	INFINITY	1268.000000
XG4	1828.000000	INFINITY	1.000000
XG5	368.000000	INFINITY	314.000000

XG6	640.000000	INFINITY	195.000000
XG7	783.000000	0.000000	INFINITY
XG8	410.000000	INFINITY	4.000000
XG9	1147.000000	INFINITY	15.000000
XG10	780.000000	INFINITY	4.000000
XG11	498.000000	INFINITY	226.000000
XG12	601.000000	INFINITY	46.000000
XG13	871.000000	1.000000	INFINITY
XG14	613.000000	INFINITY	196.000000
XG15	1218.000000	0.000000	0.000000
XG16	893.000000	1.000000	INFINITY
XG17	569.000000	INFINITY	19.000000
XG18	2363.000000	INFINITY	290.000000
XG19	1252.000000	INFINITY	1268.000000
XG20	1506.000000	INFINITY	0.000000
XG21	781.000000	INFINITY	0.000000
XG22	865.000000	INFINITY	0.000000
XG23	1021.000000	INFINITY	0.000000
XG24	2073.000000	0.000000	5.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	RHS	INCREASE	DECREASE
2	5396.799805	3659.409912	5396.799805
3	85093.257812	3659.409912	6593.939941
4	173292.312500	3659.409912	6593.939941
5	41783.531250	3034.209961	6593.939941
6	30353.900391	3659.409912	999.109985
7	129566.492188	3034.209961	6593.939941
8	338998.531250	3659.409912	13454.980469
9	8318.410156	13454.980469	3659.409912

10	37059.570312	6593.939941	3659.409912
11	5508.770020	6593.939941	3034.209961
12	7691.120117	999.109985	3659.409912
13	28859.179688	6593.939941	3659.409912
14	7634.299805	6593.939941	3034.209961
15	266460.937500	13454.980469	3659.409912
16	5286.779785	6593.939941	3659.409912
17	25916.429688	6593.939941	3034.209961
18	5483.140137	6593.939941	3659.409912
19	74429.476562	6593.939941	3034.209961
20	41587.300781	6593.939941	3034.209961
21	19036.599609	13454.980469	3659.409912
22	51637.878906	6593.939941	3659.409912
23	15177.019531	13454.980469	3659.409912
24	23144.519531	13454.980469	3659.409912
25	12646.589844	999.109985	3659.409912
26	15282.769531	INFINITY	15282.769531
27	19307.949219	6593.939941	3034.209961
28	23622.500000	6593.939941	3659.409912
29	35636.828125	6593.939941	3659.409912
30	9017.080078	999.109985	3659.409912
31	62170.648438	6593.939941	3659.409912
32	22511.189453	INFINITY	3659.409912

## Anexo B: Segundo modelo

MIN C 952XA18 + 655XA24 + 3281XB18 + 2991XB24 + 2483XC18 + 2193XC24 +  
2402XD18 + 2104XD24 + 2155XE18 + 1865XE24 + 2955XF18 + 2666XF24 + 2363XG18 +  
2073XG24

SUBJECT TO XA18 + XA24 = 12970.9

XB18 + XB24 <= 36901.12

XC18 + XC24 <= 46659.43

XD18 + XD24 <= 39830.64

XE18 + XE24 <= 85534.74

XF18 + XF24 <= 92198.88

XG18 + XG24 <= 250920.79

XA18 + XB18 + XC18 + XD18 + XE18 + XF18 + XG18 = 12250.32

XA24 + XB24 + XC24 + XD24 + XE24 + XF24 + XG24 = 928.72

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 3

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.1252101E+08

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
C	0.000000	1.000000
XA18	12042.179688	0.000000
XA24	928.719971	0.000000
XB18	0.000000	1126.000000
XB24	0.000000	1133.000000
XC18	0.000000	328.000000
XC24	0.000000	335.000000
XD18	0.000000	247.000000
XD24	0.000000	246.000000
XE18	208.139999	0.000000
XE24	0.000000	7.000000
XF18	0.000000	800.000000
XF24	0.000000	808.000000
XG18	0.000000	208.000000
XG24	0.000000	215.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2)	0.000000	1203.000000
3)	36901.121094	0.000000
4)	46659.429688	0.000000
5)	39830.640625	0.000000
6)	85326.601562	0.000000
7)	92198.882812	0.000000
8)	250920.796875	0.000000
9)	0.000000	-2155.000000
10)	0.000000	-1858.000000

NO. ITERATIONS= 3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	OBJ COEFFICIENT RANGES		
	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	COEF	INCREASE	DECREASE
C	1.000000	INFINITY	1.000000
XA18	952.000000	INFINITY	7.000000
XA24	655.000000	7.000000	INFINITY
XB18	3281.000000	INFINITY	1126.000000
XB24	2991.000000	INFINITY	1133.000000
XC18	2483.000000	INFINITY	328.000000
XC24	2193.000000	INFINITY	335.000000
XD18	2402.000000	INFINITY	247.000000
XD24	2104.000000	INFINITY	246.000000
XE18	2155.000000	7.000000	INFINITY
XE24	1865.000000	INFINITY	7.000000
XF18	2955.000000	INFINITY	800.000000
XF24	2666.000000	INFINITY	808.000000
XG18	2363.000000	INFINITY	208.000000
XG24	2073.000000	INFINITY	215.000000

ROW	RIGHTHAND SIDE RANGES		
	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	RHS	INCREASE	DECREASE
2	12970.900391	208.139999	12042.179688
3	36901.121094	INFINITY	36901.121094
4	46659.429688	INFINITY	46659.429688
5	39830.640625	INFINITY	39830.640625
6	85534.742188	INFINITY	85326.601562
7	92198.882812	INFINITY	92198.882812
8	250920.796875	INFINITY	250920.796875
9	12250.320312	85326.601562	208.139999
10	928.719971	12042.179688	208.139999